

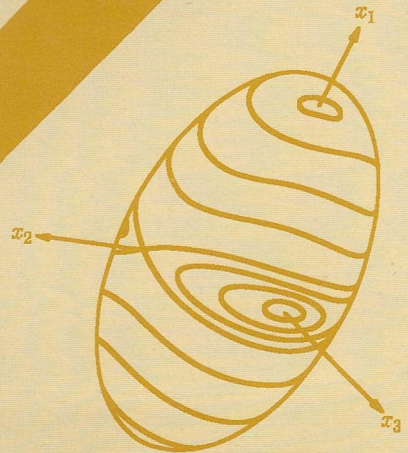


مکانیک

ویرایش جدید

کیت ر. سایمون

اعظم نیرومند راد
غلامحسین همدانی
ترجمه



مکانیک

(ویرایش جدید)

کیث و. سایمون

ترجمه
اعظم نیرومند راد
غلامحسین همدانی



مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف



مؤسسه انتشارات علمی
دانشگاه صنعتی شریف

Mechanics (Third edition)
by: Keith R. Symon
Addison Wesley, 1971

مکانیک (ویرایش جدید)
تألیف کیث ر. سایمون

ترجمه دکتر اعظم نیرومندراد، دکتر غلامحسین همدانی
چاپ دوم: ۱۳۸۶
بها: ۹۰۰۰۰ ریال
شمارگان: ۳۰۰۰

حق چاپ برای مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف محفوظ است.
شابک ۹۷۸-۹۶۴-۷۹۸۲-۵۱-۱

ISBN 978-964-7982-51-1

سرشناسه: سایمون، کیث *Symon, Keith, R.*

عنوان و پدیدآور: مکانیک | کیث ر. سایمون؛ ترجمه اعظم نیرومندراد، غلامحسین همدانی
وضعیت ویراست: [ویراست ۳]

مشخصات نشر: تهران: دانشگاه صنعتی شریف، مؤسسه انتشارات علمی، ۱۳۸۵.

مشخصات ظاهری: هشت ۶۵۰ ص: مصور.

شابک: 978-964-7982-51-1

یادداشت: فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا، کتابنامه.

موضوع: مکانیک

شناسه افزوده: الف. نیرومندراد، اعظم، ۱۳۲۶ - ، مترجم - ب. فراگرلو همدانی، غلامحسین، ۱۳۲۲ - مترجم.

ایچ. دانشگاه صنعتی شریف. مؤسسه انتشارات علمی.

رده بندی کنگره: ۱۳۸۵ م۷ ۲/ QC۱۲۵

رده بندی دبویی: ۵۳۱

کتابخانه ملی ایران: ۴۲۱۵۲-۸۴م

تلفن: ۰۱۳۱۲۹-۶۶۰۰۰۰-۶۶۱۶۴۰۷۰-۶۶۱۶۴۰۷۲

دفتر مرکزی: خیابان آزادی - دانشگاه صنعتی شریف

دفتر فروش: میدان انقلاب - خیابان شهید منیرى جاوید (اردیبهشت) - ساختمان ۲۵۳ - طبقه چهارم - واحد ۴۰۲

تلفن: ۰۵۱۳۲۲-۶۶۴۰۵۱۳۲۲-۶۶۹۶۷۸۹۶ - پست الکترونیکی: publication@mehr.sharif.edu

به نام خدا

فهرست مطالب

نه	پیشگفتار
۱	۱ مبانی مکانیک نیوتنی
۱	۱-۱ مکانیک، علمی دقیق است
۳	۲-۱ سینماتیک - تشریح حرکت
۵	۳-۱ دینامیک - جرم و نیرو
۷	۴-۱ قوانین حرکت نیوتن
۱۰	۵-۱ ثقل
۱۱	۶-۱ آحاد و ابعاد
۱۲	۷-۱ چند مسئله مقدماتی در مکانیک
۱۸	مسائل
۲۱	۲ حرکت یک بعدی ذره
۲۱	۱-۲ قضایای اندازه حرکت و انرژی
۲۲	۲-۲ بحث درباره مسئله کلی حرکت یک بعدی
۲۴	۳-۲ نیروهای وابسته به زمان
۲۷	۴-۲ نیروی میران وابسته به سرعت
۳۰	۵-۲ نیروی کنسرواتیو وابسته به مکان - انرژی پتانسیل
۳۵	۶-۲ اجسام افتان
۳۹	۷-۲ نوسانگر هارمونیک ساده
۴۱	۸-۲ معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت
۴۶	۹-۲ نوسانگر هارمونیک میرا
۵۰	۱۰-۲ نوسانگر هارمونیک واداشته
۵۸	۱۱-۲ اصل ترکیب - نوسانگر هارمونیک با نیروی وارد دلخواه
۶۲	مسائل

۷۲	۳ حرکت دو یا سه بعدی
۷۲	۱-۳ جبر برداری
۸۱	۲-۳ کاربرد بردارها در مجموعه‌ای از نیروهای وارد بر یک ذره
۸۵	۳-۳ مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بردارها
۹۱	۴-۳ سینماتیک در صفحه
۹۴	۵-۳ سینماتیک در فضای سه بعدی
۹۸	۶-۳ مبانی آنالیز برداری
۱۰۳	۷-۳ قضایای اندازه حرکت و انرژی
۱۰۵	۸-۳ قضایای اندازه حرکت زاویه‌ای برداری و صفحه‌ای
۱۰۷	۹-۳ بحث درباره مسئله کلی حرکت دوبعدی و سه بعدی
۱۰۹	۱۰-۳ نوسانگر هارمونیک در فضاهای دوبعدی و سه بعدی
۱۱۱	۱۱-۳ گلوله
۱۱۵	۱۲-۳ انرژی پتانسیل
۱۲۲	۱۳-۳ حرکت ذره تحت تأثیر نیرویی مرکزی
۱۲۸	۱۴-۳ نیروی مرکزی متناسب با عکس مربع فاصله
۱۳۵	۱۵-۳ مدارهای بیضی شکل - مسئله کیپلر
۱۳۷	۱۶-۳ مدارهای هذلولی، مسئله رادرفورد سطح مقطع پراکندگی
۱۴۰	۱۷-۳ حرکت ذره در میدان الکترومغناطیسی
۱۴۷	مسائل

۱۶۰	۴ حرکت دستگاهی از ذرات
۱۶۰	۱-۴ بقای اندازه حرکت خطی. مرکز جرم
۱۶۳	۲-۴ بقای اندازه حرکت زاویه‌ای
۱۶۶	۳-۴ بقای انرژی
۱۶۹	۴-۴ نقد قوانین بقا
۱۷۲	۵-۴ تسمه‌های انتقال، موشکها، و سیارات
۱۷۵	۶-۴ مسائل برخورد
۱۸۲	۷-۴ مسئله دو جسم
۱۸۵	۸-۴ مختصات مرکز جرم
۱۸۸	۹-۴ مسئله N - جسم
۱۹۱	۱۰-۴ دو نوسانگر هارمونیک جفت شده
۲۰۱	مسائل

۵ اجسام صلب - دوران حول یک محور - استاتیک

- ۲۰۷ ۱-۵ مسئله دینامیکی حرکت یک جسم صلب
۲۰۷ ۲-۵ دوران حول یک محور
۲۱۰ ۳-۵ آونگ ساده
۲۱۲ ۴-۵ آونگ مرکب
۲۱۵ ۵-۵ محاسبه مرکز جرم و گشتاور ماند
۲۱۸ ۶-۵ استاتیک اجسام صلب
۲۲۸ ۷-۵ استاتیک سازه‌ها
۲۳۳ ۸-۵ تنش و تغییر طول نسبی
۲۳۵ ۹-۵ تعادل ریسمانهای انعطاف پذیر و کابلها
۲۳۷ ۱۰-۵ تعادل تیرهای جامد
۲۴۱ ۱۱-۵ تعادل سیالات
۲۴۷
۲۵۲ مسائل

۶ ثقل

- ۲۵۹ ۱-۶ مرکز ثقل اجسام گسترده
۲۵۹ ۲-۶ میدان ثقل و پتانسیل ثقل
۲۶۱ ۳-۶ معادلات میدان ثقل
۲۶۴
۲۶۷ مسائل

۷ دستگاههای مختصات متحرک

- ۲۷۱ ۱-۷ مبدأ مختصات متحرک
۲۷۱ ۲-۷ دستگاههای مختصات دوران کننده
۲۷۳ ۳-۷ قوانین حرکت بر روی زمین چرخان
۲۸۰ ۴-۷ آونگ فوکو
۲۸۱ ۵-۷ قضیه لارمور
۲۸۴ ۶-۷ مسئله سه جسم در حالت خاص
۲۸۶
۲۹۱ مسائل

۸ مقدمه‌ای بر مکانیک محیط‌های پیوسته

- ۲۹۵ ۱-۸ معادله حرکت ریسمان مرتعش
۲۹۵ ۲-۸ وجوه طبیعی ارتعاش برای ریسمان مرتعش
۲۹۷ ۳-۸ انتشار موج در امتداد ریسمان
۳۰۱

۳۰۵	۴-۸	ریسمان به صورت حالت حدی دستگاهی از ذرات
۳۱۰	۵-۸	تذکراهایی کلی درباره انتشار امواج
۳۱۳	۶-۸	سینماتیک سیالهای متحرک
۳۲۰	۷-۸	معادلات حرکت برای سیالی آرمانی
۳۲۲	۸-۸	قوانین بقا برای حرکت سیال
۳۲۸	۹-۸	سیلان دائم
۳۳۰	۱۰-۸	امواج صوتی
۳۳۵	۱۱-۸	ارتعاشات طبیعی سیال در یک جعبه مکعب مستطیل
۳۳۹	۱۲-۸	امواج صوتی در لوله‌ها
۳۴۰	۱۳-۸	سرعت گروهی
۳۴۲	۱۴-۸	عدد ماخ
۳۴۵	۱۵-۸	چسبندگی
۳۴۹		مسائل

۳۵۳	۹	معادلات لاگرانژ
۳۵۳	۱-۹	مختصات تعمیم‌یافته
۳۶۳	۲-۹	معادلات لاگرانژ
۳۶۶	۳-۹	مثالها
۳۶۸	۴-۹	دستگاههای مقید
۳۷۲	۵-۹	مثالهایی از دستگاههای مقید
۳۷۸	۶-۹	ثابتهای حرکت و مختصات قابل اغماض
۳۸۰	۷-۹	مثالهای دیگر
۳۸۵	۸-۹	نیروهای الکترومغناطیسی و پتانسیلهای وابسته به سرعت
۳۸۸	۹-۹	معادلات لاگرانژ برای ریسمان مرتعش
۳۹۲	۱۰-۹	معادلات هامیلتون
۳۹۵	۱۱-۹	قضیه لیوویل
۳۹۶		مسائل

۴۰۲	۱۰	جبر تانسوری - تانسورهای ماند و تنش
۴۰۲	۱-۱۰	اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم صلب
۴۰۳	۲-۱۰	جبر تانسوری
۴۱۰	۳-۱۰	تبدیل‌های مختصات
۴۱۵	۴-۱۰	قطری کردن تانسور متقارن

- ۴۲۴ ۵-۱۰ تانسور ماند
 ۴۳۱ ۶-۱۰ تانسور تنش
 ۴۳۹ مسائل

- ۴۴۴ ۱۱ دوران جسم صلب
 ۴۴۴ ۱-۱۱ حرکت جسم صلب در فضا
 ۴۴۵ ۲-۱۱ معادلات اویلر برای حرکت جسم صلب
 ۴۴۹ ۳-۱۱ راه حل پوانسو برای جسمی که آزادانه دوران می کند
 ۴۵۱ ۴-۱۱ زوایای اویلر
 ۴۵۴ ۵-۱۱ فرجه متقارن
 ۴۶۰ مسائل

- ۴۶۵ ۱۲ نظریه ارتعاشات کوچک
 ۴۶۵ ۱-۱۲ شرط پایداری در نزدیکی آرایش در حالت تعادل
 ۴۶۷ ۲-۱۲ معادلات خطی شده حرکت در نزدیکی آرایش حالت تعادل
 ۴۶۹ ۳-۱۲ وجوه طبیعی ارتعاش
 ۴۷۳ ۴-۱۲ ارتعاشات واداشته
 ۴۷۵ ۵-۱۲ نظریه اختلال
 ۴۸۱ ۶-۱۲ ارتعاشات کوچک حول حرکت پاینده
 ۴۸۷ ۷-۱۲ نوسانهای بتاترون در یک شتاب دهنده
 ۴۹۰ ۸-۱۲ پایداری سه جسم لاگرانژ
 ۴۹۷ مسائل

- ۵۰۲ ۱۳ اصول موضوع پایه ای نظریه نسبیت خاص
 ۵۰۲ ۱-۱۳ اصول موضوع نظریه نسبیت خاص
 ۵۰۵ ۲-۱۳ پارادوکس ظاهری مرتبط با سرعت نور
 ۵۰۸ ۳-۱۳ دستگاههای مختصات، چارچوبهای مرجع
 ۵۱۹ ۴-۱۳ رفتار ساعتها و میله های سنج
 ۵۲۳ ۵-۱۳ تبدیل لورنتس
 ۵۲۷ ۶-۱۳ برخی کاربردهای تبدیل لورنتس
 ۵۳۲ مسائل

۱۴ مکانیک نسبیتی

- ۵۳۷ ۱-۱۴ جبر برداری فضا - زمان
۵۳۷ ۲-۱۴ قوانین بقا (پایستگی) نسبیتی
۵۴۸ ۳-۱۴ نظریه برخورد
۵۵۲ ۴-۱۴ معادلات نسبیتی حرکت
۵۵۸ ۵-۱۴ جوابهای معادلات حرکت
۵۶۰ ۶-۱۴ قوانین نیروی نسبیتی. الکترودینامیک
۵۶۷ ۷-۱۴ جبر تانسوری در فضای چهاربعدي
۵۷۴ ۸-۱۴ نظریه نسبیت عام
۵۷۶
۵۸۵ مسائل

کتابنامه

- ۵۹۵ پاسخ مسائل فرد
۵۹۹ کلید علائم
۶۱۵ واژه نامه انگلیسی - فارسی
۶۲۷ واژه نامه فارسی - انگلیسی
۶۳۳ فهرست راهنما
۶۴۱

پیشگفتار مؤلف

این کتاب به عنوان پایه درس مکانیک در سطح متوسط در دوره کارشناسی در نظر شده است. چنین درسی در آماده سازی برای کار پیشرفته در فیزیک جنبه اساسی دارد و چند هدف اصلی دارد: این درس باید طوری باشد که زمینه ای برای درک عمیق اصول اساسی مکانیک در دانشجویان پرورش دهد و پاره ای مسائل خاص که در فیزیک در درجه اول اهمیت اند - مثلاً نوسانگر هارمونیک و حرکت ذره تحت تأثیر نیروی مرکزی - باید در آن به تفصیل بررسی گردند. مسائل پیشنهاد شده و مسائلی که در متن حل شده اند، با در نظر گرفتن فایده و اهمیت فیزیکی و آموزنده بودنشان انتخاب شده اند. انتخاب مطالب و بررسی آنها در سرتاسر کتاب طوری انجام شده است که بر دیده های جدید تأکید دارد. اطلاق قوانین بر فیزیک اتمی، با اشاره به حدود اعتبار نتایج مکانیک تحلیلی، در هر جا که امکان پذیر بوده، انجام شده است. نارساییهای مکانیک تحلیلی به دقت ذکر شده اند، و هر جا که مکانیک کوانتم و نظریه نسبیت از مکانیک تحلیلی منشعب گردیده اند، نشان داده شده است. دو فصل آخر مکانیک نسبیت خاص را تشریح می کند. مطالب کتاب، به جز شش فصل آخر، مستقیماً بر قوانین حرکت نیوتن، که پایه مناسبی برای حل اغلب مسائل مکانیکی است، مبتنی است. روشهای پیشرفته تر که در آنها از معادلات لاگرانژ و جبر تانسوری استفاده می شود در فصلهای ۸ تا ۱۲ معرفی شده اند.

یک هدف مهم نخستین درس در مکانیک این است که دانشجو را برای فکر کردن درباره پدیده های فیزیکی در قالب عبارات ریاضی، آماده کند. اغلب دانشجویان از شمه به نسبت خوبی برای درک کیفی پدیده های مکانیکی برخوردارند. هدف از فراگرفتن مکانیک باید این باشد که شمی تقریباً به همان اندازه شهودی برای بیان ریاضی مسائل فیزیکی و همچنین برای تعبیر فیزیکی جوابهای ریاضی در دانشجو پدید آورد. در حل مثالهای کتاب، تا جایی که ممکن بوده سعی شده است که هم شامل حل ریاضی و هم تعبیر فیزیکی باشد. دانشجو باید پس از حل یک مسئله خاص، آن را آن قدر مطالعه کند تا مطمئن شود که تعبیر فیزیکی تمام صور مختلف حلهای ریاضی را درک کرده است. او باید ببیند که آیا نتیجه مسئله با استنباط فیزیکی خود او توافق دارد یا نه و اگر ندارد باید استنباط فیزیکی یا حل ریاضی به طور مناسبی اصلاح شود. اگر جواب به نسبت پیچیده باشد، دانشجو باید سعی کند تا آن را در قالب برخی موارد حدی یا خاص، ساده سازد. او باید سعی کند که خود مسائلی

مشابه با مثالهای کتاب طرح و آنها را حل کند.

برای مطالعه این کتاب فقط داشتن مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری ضروری فرض شده است. مفاهیم ریاضی که از ریاضیات عمومی سال اول تجاوز کند هر جا که لازم بوده مطرح و بیان شده است. اطلاع قبلی از معادلات دیفرانسیل مقدماتی یا آنالیز برداری خالی از فایده نیست، ولی به تجربه نویسنده، دانشجویانی که آمادگی کافی در جبر و ریاضیات عمومی داشته باشند، قادرند آنالیز برداری و معادلات دیفرانسیل لازم برای این درس را، با توضیحات داده شده در کتاب، درک کنند. اگر دانشجوی فیزیک از قبل با مفاهیم پیشرفته ریاضی در فیزیک برخورد کرده باشد، به احتمال بسیار از مطالب پیشرفته ریاضی چیز بیشتری عایدش خواهد شد.

مطالب این کتاب بیش از آن است که برای دو درس در کارشناسی لازم است، ولی در حین حال این موقعیت به وجود آمده است که با انتخاب مناسب مطالب می‌توان دروس متنوعی را ارائه کرد. هفت فصل اول پایه‌ای برای یک درس نیم‌ساله در مکانیک متوسط را تشکیل می‌دهد. با حذف بعضی از مطالب فصول اولیه، نویسنده به این نتیجه رسیده است که می‌توان در همان درس نیم‌ساله بخشهایی از فصلهای ۸ یا ۹ را نیز ارائه کرد.

این کتاب طوری نوشته شده است که در انتخاب و ترتیب مطالب مورد احتیاج، حداکثر انعطاف رعایت شده باشد. بسیاری از بخشها یا گروههایی از آنها را به استثنای بعضی از موارد خاص، می‌توان حذف کرد و یا تدریس آنها را به تعویق انداخت، بی آنکه این کار در فهم مطالب باقیمانده اثری داشته باشد. هر جا به مطالب خاص از فصول گذشته احتیاج بوده اشاره‌هایی به شماره‌های بخش یا معادله مورد نظر شده است و یافتن مطالب قبلی مورد نیاز به این طریق آسان می‌شود.

فصلهای بعدی از فصل ۷ عمدتاً وابسته به مطالبی هستند که در فصلهای ۲، ۳، ۴؛ یا در بخشهای ۱، ۲، و ۶ از فصل ۵؛ و بخشهای ۱ و ۲ از فصل ۷ ارائه شده‌اند. وقتی این مطالب عرضه شوند اغلب مطالب در فصلهای بعدی به آسانی قابل فهم‌اند. بخش ۱۱.۵ باید قبل از مطالب مربوط به حرکت سیال در فصل ۸ ارائه شود، البته اگر قرار بر آن باشد که این موضوع تدریس شود. فصلهای ۹ و ۱۰ باید قبل از فصلهای ۱۱ یا ۱۲ تدریس شوند. دو فصل آخر درباره نسبت را می‌توان هر زمانی، بعد از فصل ۷ مطالعه کرد. فصل ۱۴ شامل چند مرجع، مثالها و تعمیم مطالبی از فصلهای ۸، ۹، و ۱۰ است، ولی اینها را می‌توان حذف کرد بی آنکه اثری روی توالی مطالب باقیمانده داشته باشد.

در فصل اول مفاهیم اساسی مکانیک را مرور می‌کنیم، و قوانین مکانیک و ثقل به زبان ریاضی بیان می‌شوند و در مورد چند مثال ساده به کار می‌روند. در فصل دوم مسئله حرکت در فضای یک بعدی به نسبت کامل مورد بحث قرار می‌گیرد. این فصل با بررسی نوسانگر هارمونیک، که شاید مهمترین مثال حرکت یک بعدی باشد. خاتمه می‌یابد. در این فصل از اعداد مختلط برای نمایش کمیت‌های نوسانی استفاده می‌شود. در آخرین بخش این فصل، از سری فوریه در اصل ترکیب استفاده می‌شود، و این پایه‌ای برای بعضی از قسمتهای فصول ۸ و ۱۲ به شمار می‌رود. اگر قرار بر این شود که این فصلها تدریس نشوند، بخش ۱۱.۲ را می‌توان حذف کرد یا به طور سطحی از آن گذشت تا به

اختصار به اهمیت اصل ترکیب و نیز راه استفاده از سری فوریه برای حل مسائل مربوط به تابع نیروی وارد دلخواه پی برد.

فصل سوم با جبر برداری و استفاده از آن در توصیف حرکات در فضای دوبعدی و سه بعدی شروع می شود. برای بردارها حروف سیاه به کار می رود، بخش ۶.۳ مقدمه مختصری است بر آنالیز برداری که جز در فصل ۸ در فصلهای دیگر کمتر مورد استفاده قرار می گیرد، و اگر فصل ۸ و معدودی موارد اثبات در بعضی فصلهای دیگر حذف شوند، این بخش را نیز می توان حذف و یا به طور سطحی مرور کرد. نویسنده معتقد است که آشنا کردن دانشجویان با مفاهیم و نمادهای آنالیز برداری بهتر است در این مرحله که زبان بیان مطالب به نسبت ساده است صورت گیرد تا در دوره های بعدی که مفاهیم فیزیکی و زبان ریاضی دشوارتر می شود، آشنایی قبلی با این نمادها حاصل شده باشد. قضایای مربوط به میزان تغییر اندازه حرکت نسبت به زمان، انرژی، و اندازه حرکت زاویه ای، برای ذره متحرک به دست آورده می شوند و چند مسئله مورد بحث قرار می گیرد، از آن میان به حرکت تحت تأثیر نیروهای مرکزی توجه خاص معطوف می گردد. مثالها از مسائل نجومی و اتمی گرفته می شوند.

در فصل ۴ قوانین بقای انرژی، اندازه حرکت، و اندازه حرکت زاویه ای به دست آمده است و بر اهمیت آنها به عنوان شالوده های فیزیک امروز تأکید می گردد. این قوانین سپس در مسائلی نمونه، به خصوص مسائل برخورد به کار برده می شوند. مسئله دو جسم و حرکت دو نوسانگر هارمونیک جفت شده، مورد بررسی قرار می گیرد. بهترین روش بررسی نظریه عمومی نوسانهای جفت شده تبدیل خطی در فضاهای برداری است، چنان که در فصل ۱۲ آمده است. ولی چگونگی عمل دستگاههای نوسان کننده جفت شده مهتر از آن است که بتوان آن را به راحتی از درس یک نیمساله به کلی حذف کرد. بخش مربوط به دو نوسانگر جفت شده را می توان نادیده انگاشت و یا تدریس آن را تا فصل ۱۲ به تعویق انداخت. در فصل ۵، جسم صلب به صورت نوع خاصی از دستگاه ذرات، مورد بحث قرار می گیرد. در این فصل فقط چرخش به دور یک محور ثابت، به تفصیل بررسی می شود و بررسی کلی تر حرکت جسم صلب برای فصل آتی که در آن از روشهای پیشرفته تری استفاده شده است گذاشته می شود. در بخش مربوط به استاتیک، مسئله تبدیل دستگاهی از نیروها به دستگاه معادل ساده تری بررسی می گردد. بررسی مقدماتی تعادل تیرها و ریسمانهای الاستیک و سیالات در بخشهای ۹.۵ و ۱۰.۵ و ۱۱.۵ ارائه می شود. به استثنای بخشهای ۱، ۲، ۶، و ۸ که هر یک از آنها پایه ای برای مطالبی هستند که بعد از آنها می آید، بخشهای متفاوت در فصل ۵ مستقل از یکدیگرند و به هر ترتیبی می توانند ارائه شوند و یا حذف شوند.

نظریه ثقل اندکی به تفصیل در فصل ۶ بررسی می گردد. در آخرین بخش این فصل، معادلات میدان ثقل را می توان بی آنکه اختلالی در تسلسل مطالب باقیمانده ایجاد شود حذف کرد. در فصل ۷ قوانین حرکت در دستگاههای مختلف متحرک به دست می آیند که در مورد حرکت بر روی زمین چرخان و نیز در مورد حرکت دستگاهی از ذرات باردار در میدان مغناطیسی به کار می روند. نیروهای کاذب در مکانیک نیوتنی که در دستگاههای مختصات متحرک ظاهر می شوند و همچنین نقشی که

این نیروها در نظریه نسبیت عام به عهده دارند، مورد توجه خاص قرار می‌گیرد.

در فصل ۸ بررسی تفصیلی ریسمانهای مرتعش و حرکت سیالات به‌طور مقدماتی بیان می‌شود و ضمن آن بر مفاهیم بنیادی و روشهای ریاضی مورد استفاده در بررسی مکانیک محیطهای پیوسته تأکید می‌گردد. فصل ۹ درباره معادلات لاگرانژ است و به منظور آشنایی با روشهای مورد استفاده در دینامیک عالی مورد بحث قرار می‌گیرد. معادلات همپلتن و مفهوم فضای فاز بدان سبب آورده شده است که برای درسهای بعدی در مکانیک کوانتم یا مکانیک آماری به منزله پیش نیاز است. ولی نظریه تبدیلیهای کانونی و استفاده از اصول تغییرات از حد این کتاب بیرون است. در فصل ۱۰، جبر تانسوری، از جمله تبدیل مختصات متعامد، که در فصلهای ۱۱ و ۱۲ مورد احتیاج است، بسط داده می‌شود. تانسور ماند و تانسور تنش به‌عنوان مثال، تا حدی مشروح بیان می‌شوند. بخش ۶.۱۰ درباره تانسور تنش خواننده را قادر می‌سازد که بحث سیالهای آرمانی فصل ۸ را به محیطهای ویسکوز یا جامد گسترش دهد. روشهای بسط داده شده در فصول ۹ و ۱۰ در فصل ۱۱ در مورد دوران عمومی جسم صلب حول یک نقطه، و در فصل ۱۲ در مورد بررسی ارتعاشهای کوچک یک دستگاه فیزیکی حول حالت تعادل و یا حالت حرکت پایدار به کار می‌رود.

فصل ۱۳ مقدمه‌ای است بر نظریه نسبیت خاص. در این فصل مفاهیم پایه‌ای و اصول فیزیکی ارائه می‌شود و با به‌دست آوردن و بحث تبدیل لورنتس خاتمه می‌یابد. فصل ۱۴ شامل بسط به نسبت کاملی از مکانیک ذره نسبیتی است. ابزار ریاضی لازم برای بیشتر کاربردهای نظری ارائه می‌شود. خواننده‌ای که علاقه‌مند است اشرافی به نظریه نسبیت خاص داشته باشد، لازم است تمامی فصل را مطالعه کند. اگر فقط درک پایه‌ای دینامیک نسبیتی مورد نظر است، بخشهای ۱.۱۴، ۲.۱۴، ۴.۱۴، و ۸.۱۴ کافی خواهند بود.

مسائل انتهای هر فصل به منظور سهولت در امر انتساب آنها به مطالب به ترتیب مطالب درسی آن فصل آورده می‌شود. کوشش شده است تا تنوعی کافی در انتخاب مسائل رعایت شود و تضمین می‌کنیم که هر کس بتواند آنها را حل کند، مطالب متن را به‌خوبی آموخته است. عکس این مطلب الزاماً صادق نیست، زیرا برای حل اغلب مسائل علاوه بر درک مطالب متن، ابتکاری فیزیکی نیز کم و بیش لازم است. بسیاری از مسائل به نسبت ساده‌اند و حل آنها برای خواننده‌ای که مطالب ارائه شده را درک کرده آسان است. حل معدودی از آنها شاید برای بیشتر دانشجویان اعم از دانشجویان سالهای بالا و پایین دشوارتر از آن است که بی‌کمک استاد میسر گردد. مسائل دشوار، یا آنها که حلشان مستلزم صرف وقت بسیار است با ستاره مشخص شده‌اند.

تفاوت این ویرایش با ویرایش دوم اساساً در اضافه کردن دو فصل آخر درباره نظریه نسبیت و اضافه کردن مسائلی در هفت فصل اول است که مشابه با مسائل ویرایشهای پیشین ولی عموماً با میزان سختی کم‌ترند.

مبانی مکانیک نیوتنی

۱-۱ مکانیک، علمی دقیق است

وقتی می‌گوییم مکانیک علم دقیقی است مقصودمان این است که قوانین آن به صورت معادلاتی ریاضی بیان می‌شوند که نتایج اندازه‌گیریهای کمی دقیق را بیان و پیشگویی می‌کنند. برتری نظریه‌های کمی فیزیکی فقط در جنبه عملی آنها نیست که ما را قادر می‌سازد که پدیده‌های طبیعی را با دقت پیش‌بینی و کنترل کنیم. از مقایسه نتایج حاصل از اندازه‌گیریهای دقیق با پیش‌بینی‌های عددی نظریه، می‌توانیم به میزان قابل ملاحظه‌ای از صحت نظریه اطمینان حاصل کنیم یا مشخص کنیم که از چه نظر محتاج اصلاح است. اغلب می‌توان پدیده فیزیکی داده شده‌ای را به چند روش کیفی تقریبی توضیح داد و اگر به این روشها قانع باشیم، چه بسا تشخیص نظریه صحیح مقدور نباشد، ولی اگر بتوان نظریه‌ای پدید آورد که نتایج حاصل از اندازه‌گیریها را تا چهار یا پنج (حتی دو یا سه) رقم معنی‌دار تقریب پیش‌بینی کند، آن نظریه نمی‌تواند چندان ناصحیح باشد. توافق تقریبی ممکن است فقط تصادفی باشد، ولی توافق نزدیک به کمال محال است چنین باشد. از این گذشته موارد بسیاری در تاریخ علوم بوده است که اختلافهای کوچک اما مهم میان نظریه و نتایج حاصل از اندازه‌گیریهای دقیق باعث به وجود آمدن نظریه‌های تازه و پردامنه‌تری شده‌اند. حال آنکه اگر فقط به توضیح کیفی پدیده‌ها قانع بودیم، نمی‌توانستیم حتی به وجود چنین اختلافهایی پی ببریم.

علائمی که ناچار در معادله‌ها برای بیان قوانین علمی ظاهر می‌شوند باید نماینده کمیت‌هایی باشند که بتوان آنها را به صورت عددی بیان کرد. بنابراین مفاهیمی که به کمک آنها بیان علمی دقیق می‌شود، باید معانی عددی دقیقی داشته باشند. اگر بخواهیم کمیتی (مانند جرم) را تعریف کنیم، تعریف باید چنان باشد که به دقت مشخص کند، مقدار آن کمیت را در هر مورد مفروض چگونه باید معین کرد. تذکری کیفی درباره معنی کمیتها ممکن است مفید باشد ولی در مقام تعریف کافی نیست. البته شاید ممکن نباشد که برای کلیه مفاهیمی که در نظریه‌های فیزیکی پیش می‌آید، تعریفی با دقتی آرمانی ارائه داد. با این همه وقتی معادله‌ای ریاضی می‌نویسیم، فرض بر این است که هر یک از علائم معادله دارای معنی دقیقی است و باید سعی کنیم اندیشه‌های خود را تا آنجا که ممکن است دقیق و روشن بیان کنیم و نقاط سستی دقت یا ابهام را تشخیص دهیم. گاه مفهومی جدید را می‌توان برحسب مفاهیم دیگری که معانی معلوم دارند بیان داشت مانند:

$$\text{اندازه حرکت} = \text{سرعت} \times \text{جرم}$$

که تعریف دقیقی است از «اندازه حرکت» به شرط آنکه «جرم» و «سرعت» از پیش به دقت تعریف شده

فرض شوند. ولی این نوع تعریف برای کلیه مفاهیم موجود در یک نظریه مناسب نیست، زیرا کار را باید از جایی و با گروهی از مفاهیم بنیادی یا اصطلاحات «ابتدایی» که معانی آنها دانسته فرض شده باشند شروع کنیم. زیرا در ابتدا چیزی نداریم که در سمت راست معادله بگذاریم. معانی این اصطلاحات اولیه فیزیکی باید به وسیله‌ای خارج از نظریه‌های فیزیکی که می‌خواهیم پدید آوریم روشن شوند. برای مثال ممکن است به‌سادگی این اصطلاحات را آنقدر به کار ببریم تا معانی آنها روشن شود. به این طریق است که کودکان زبان می‌آموزند و دانشجویان سال اول فیزیک نیز شاید درس خود را تا اندازه‌ای به همین راه فرا گیرند. ممکن است تمام اصطلاحات ابتدایی را با بیان معانی آنها ضمن مشاهده و تجربه تعریف کنیم. به‌خصوص اسامی دال بر کمیت‌های قابل اندازه‌گیری مانند «نیرو» و «جرم» و غیره را می‌توان با مشخص کردن فرایندی عملی که برای اندازه‌گیری آنها به کار می‌رود تعریف کرد. بنا به یک مکتب فکری، کلیه اصطلاحات فیزیکی را باید بدین طریق تعریف کرد یا آنکه می‌توان مفاهیم اولیه را به سادگی با اشاره‌ای تقریبی به معنی فیزیکی آنها بیان داشت و سپس تعیین دقیق‌تر معنی را به‌عهده قوانین و فرضیه‌هایی گذاشت که وضع می‌کنیم و قواعدی که برای تعبیر نتایج نظری برحسب حاصل تجربه‌ها قرار می‌گذاریم. این مناسب‌ترین و قابل‌انعطاف‌ترین روش‌هاست و نیز معمولاً به همین طریق است که نظریه‌های فیزیکی به‌وجود می‌آیند. عیب آن این است که هرگز از دقت معانی داده شده به مفاهیم مطمئن نیستیم و تجربه است که نه تنها محک صحت قوانین ماست، بلکه حتی تشخیص دقت معانی مفاهیم به کار رفته نیز به‌عهده آن است. نظریه‌های جدید نسبت و کوانتم همان‌قدر که از ابهام مفاهیم کلاسیک ناشی شده‌اند، حاصل دقیق نبودن قوانین فیزیک کلاسیک نیز هستند.

از نظر تاریخی، مکانیک اولین شاخه‌ای از فیزیک است که به‌صورت علمی دقیق توسعه یافت. دانشمندان یونانی در قرن سوم قبل از میلاد مسیح با قوانین اهرم‌ها و سیالات در حال تعادل استاتیکی آشنا بوده‌اند. گسترش شگرف فیزیک در سه قرن اخیر با کشف قوانین مکانیک توسط گالیله و نیوتن شروع شد. قوانین مکانیک چنانکه توسط اسحاق نیوتن در اواسط قرن هفدهم، و قوانین الکتروسیسته و مغناطیس که توسط جیمس کلارک ماکسول در حدود دو‌یست سال بعد به زبان ریاضی بیان شدند، دو نظریه اساسی فیزیک کلاسیک به‌شمار می‌روند. فیزیک نسبت به کار اینشتین در سال ۱۹۰۵ شروع شد و فیزیک کوانتم که بر اساس کار هایزنبرگ^۱ و شرودینگر^۲ در سالهای ۱۹۲۵ و ۱۹۲۶ استوار بود اصلاح و بیان تازه قوانین مکانیک و الکترودینامیک را بر حسب مفاهیم فیزیکی جدید ایجاد می‌کرد. با این همه فیزیک جدید بر پایه‌هایی استوار است که توسط فیزیک کلاسیک بنا شده است و درک روشن اصول مکانیک و الکترودینامیک کلاسیک هنوز هم برای آموختن فیزیک نسبت و کوانتم اهمیت اساسی دارد. به‌علاوه قوانین مکانیک کلاسیک هنوز هم در اکثر کاربردهای علمی مکانیک در رشته‌های مهندسی و نجوم قابل اعمال‌اند. مگر در مواردی که اجسام با سرعت‌هایی نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کنند و یا هنگامی که اجرام یا فواصل عظیم در کار باشند، مکانیک نسبت به همان نتایج مکانیک کلاسیک منجر می‌شود و

به راستی هم باید چنین باشد، زیرا به تجربه می دانیم که مکانیک کلاسیک در کاربردهای معمولی به نتایج صحیحی می انجامد. به همین ترتیب مکانیک کوانتوم باید با مکانیک کلاسیک در توافق باشد و هست، مگر به هنگامی که آن را در مورد دستگاههای فیزیکی با اندازههای ملکولی یا کوچکتر به کار ببریم. در حقیقت یکی از اصول مهم راهنما در تقریر نظریه‌های جدید فیزیکی این شرط است که باید در مورد پدیده‌هایی که صحت نظریه‌های قدیم در اطلاق به آنها محقق است با نظریه‌های قدیم در توافق باشد.

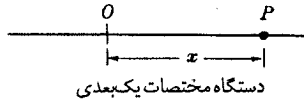
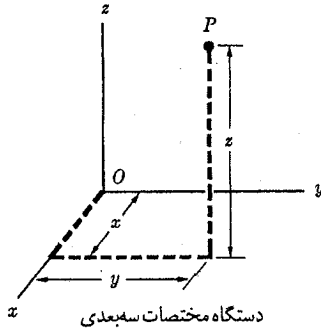
مکانیک، علم حرکات اجسام مادی است و می توان آن را به سه شاخه سینماتیک، دینامیک و استاتیک تقسیم کرد. سینماتیک بررسی و تشریح حرکات ممکن اجسام مادی است. دینامیک بررسی قوانینی است که معین می کنند از میان حرکات ممکن، کدام حرکت در هر مورد اتفاق می افتد. در دینامیک است که مفهوم نیرو وارد می شود. مسئله اصلی دینامیک این است که برای هر دستگاه فیزیکی، حرکاتی را که تحت تأثیر نیروهای داده شده به وجود می آید مشخص کند. استاتیک بررسی نیروها و دستگاههای نیروهاست (با توجه خاص به دستگاههای نیروهایی که به اجسام ساکن وارد می شوند).

همچنین می توان مکانیک را بر حسب نوع دستگاه فیزیکی مورد بررسی تقسیم کرد، و این به طور کلی اساس طرح این کتاب است. ساده ترین دستگاه فیزیکی، و نیز آنکه ما نخست بررسی خواهیم کرد، یک تک ذره است. سپس حرکت دستگاهی از ذرات را مطالعه خواهیم کرد. جسم صلب را می توان نوع خاصی از دستگاه ذرات دانست. سرانجام حرکت محیطهای پیوسته، مواد الاستیک و پلاستیک (کشور و ناکشور)، جامدها، مایعات، و گازها را مطالعه خواهیم کرد.

بسیاری از کاربردهای مکانیک کلاسیک را می توان به طور مستقیم بر اساس قوانین حرکت نیوتن استوار دانست. تمام مسائل این کتاب جز مسائل فصلهای ۹ تا ۱۴، بدین طریق بررسی شده اند. اما راههای دیگری نیز برای بیان اصول مکانیک کلاسیک وجود دارد. برای مثال معادلات لاگرانژ و هامیلتون را می توان نام برد. البته اینها نظریه‌های جدید فیزیکی نیستند، زیرا می توان آنها را از قوانین نیوتن به دست آورد، و روشهای دیگری برای بیان همان نظریه فیزیکی اند. در آنها مفاهیم پیشرفته تر ریاضی به کار رفته است و از پاره‌ای جهات، از بیان ریاضی نیوتن پرداخته تر و در بعضی موارد از آنها تواناترند، زیرا راه‌حلهایی برای پاره‌ای مسائل ارائه می دهند که حلشان مستقیماً بر پایه قوانین نیوتن بسیار دشوار می بود. هر قدر راههایی که برای بیان ریاضی نظریه‌ای فیزیکی می شناسیم متعددتر باشد، امکان ما برای پی بردن به رموز تغییر و تکمیل آن چنانکه بر پدیده‌های جدیدی که کشف می شوند قابل اعمال باشد، بیشتر خواهد بود. این یکی از دلایل اصلی اهمیت انحای بیان ریاضی پیشرفته تر مکانیک است. آنها به منزله نقطه شروع کار برای نظریه‌های جدیدتر نسبت و کوانتوم اند.

۲-۱ سینماتیک - تشریح حرکت

مکانیک علمی است که حرکات اجسام فیزیکی را مطالعه می کند. لذا ابتدا باید حرکت را تشریح کنیم. از همه آسانتر تشریح حرکات ذره است، و ذره چیزی است که اندازه و ساختمان داخلی آن برای مسئله مورد نظر ما قابل اغماض است. برای مثال زمین را می توان در بیشتر مسائل مربوط به حرکت



شکل ۱-۱ مختصات متعامد که محل ذره P را نسبت به مبدأ O مشخص می‌کند.

سیارات، یک ذره دانست. در حالی که این کار برای مسائل زمینی البته ممکن نیست. مکان یک ذره را می‌توان با مشخص کردن نقطه‌ای در فضا معین کرد. این کار با تعیین سه مختصه امکان‌پذیر است. معمولاً مختصات متعامد به کار می‌رود. برای ذره‌ای که در امتداد خط مستقیمی حرکت کند، (فصل ۲)، فقط یک مختصه لازم است. برای تشریح حرکت یک ذره مختصات آن را به صورت توابعی از زمان مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & x(t), \text{ یک‌بعدی,} \\ & x(t), y(t), z(t), \text{ سه‌بعدی.} \end{aligned} \quad (1-1)$$

مسئله اصلی مکانیک کلاسیک یافتن راههایی برای پیدا کردن توابعی از این نوع است که مکان اشیا را برای هر وضع مکانیکی به صورت توابعی از زمان بیان کند. معنی فیزیکی تابع $x(t)$ در قواعدی گنجانده شده است، که چگونگی اندازه‌گیری مختصه x ذره‌ای را در زمان t بیان می‌کند. اگر فرض کنیم که معنی $x(t)$ را می‌دانیم و یا لافل می‌دانیم که $x(t)$ دارای معنایی است (این فرض که در مکانیک کلاسیک جایز است در مکانیک کوانتم کاملاً صحیح نیست)، در این صورت می‌توانیم مؤلفه x سرعت، یعنی v_x را در لحظه t به صورت زیر تعریف کنیم^۱:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad (2-1)$$

و به همین ترتیب

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}.$$

۱. مشتق نسبت به زمان را با d/dt یا با نقطه‌ای بر روی حرف مربوط، مشخص خواهیم کرد. هر دو طریق در معادله (۲-۱) نشان داده شده است.

حال می‌توانیم مؤلفه‌های شتاب a_x ، a_y ، a_z را به صورت مشتق‌های مؤلفه‌های سرعت نسبت به زمان تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} a_x = \dot{v}_x &= \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y = \dot{v}_y &= \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z = \dot{v}_z &= \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (3-1)$$

برای بسیاری از موارد ممکن است دستگاه مختصات دیگری برای مشخص کردن مکان یک ذره مناسب‌تر باشد. وقتی که دستگاه‌های مختصات دیگری به کار رود باید فرمولهای مناسبی برای مؤلفه‌های سرعت و شتاب به دست آورد. مختصات کروی، استوانه‌ای و قطبی در صفحه، در فصل ۳ مورد بحث قرار خواهند گرفت. در مسائل دو یا سه بعدی، بردار به عنوان وسیله‌ای برای نشان دادن مکان و سرعت شتاب، بسیار مفید واقع می‌شود. در بخش ۳-۱ جبر برداری را به قاعده مطالعه خواهیم کرد.

برای تشریح دستگاهی از ذرات، می‌توان مختصات هر ذره را در هر دستگاه مختصات مناسبی مشخص کرد. یا دستگاه‌های مختصات دیگری، مثلاً دستگاه مختصات مرکز جرم، یا فاصله میان دو ذره را به کار وارد کرد. اگر ذرات، جسم صلبی را تشکیل دهند، سه مختصه مرکز جرم و سه مختصه زاویه‌ای که طرز قرارگیری آن را در فضا مشخص می‌کند برای تعیین مکان ذره کافی است. برای تشریح حرکت ماده‌ای پیوسته مانند سیالات، باید چگالی $\rho(x, y, z, t)$ را در هر نقطه (x, y, z) از فضا در هر لحظه t از زمان و همچنین بردار سرعت، $v(x, y, z, t)$ که سرعت حرکت ماده را در نقطه (x, y, z) در لحظه t معین می‌کند مشخص کنیم. راه‌های مناسبی برای توصیف حرکت دستگاه‌های فیزیکی به هنگام احتیاج به کار خواهد رفت.

۳-۱ دینامیک - جرم و نیرو

تجربه به ما می‌آموزد که حرکات اجسام فیزیکی تابع برهم کنشهای میان آنها و محیطهای آنهاست. مشاهده رفتار گلوله‌ها، و اجسامی که بر سطحهای هموار و روغن زده می‌لغزند این فکر را القا می‌کند که تغییرهای سرعت جسم در اثر برهم کنش آن با محیطش به وجود آمده است. جسمی که از همه برهم‌کنشها دور نگه داشته شده باشد دارای سرعتی ثابت خواهد بود. بنابراین در بیان ریاضی قوانین دینامیک، توجه خود را بر شتاب متمرکز می‌کنیم.

دو جسم را که با هم در کنش، اما از اثرهای محیط دور باشند در نظر می‌گیریم. به عنوان نمونه‌ای تقریبی برای این حال، دو پسر را - که لازم نیست هم قد باشند - در نظر آورید که بر روی سطح یخی همواری به طناب‌کشی مشغول‌اند. هر چند که دو جسم واقعی هرگز نمی‌توانند کاملاً از برهم‌کنش با کلیه اجسام دیگر دور نگه داشته شوند، این ساده‌ترین وضعی است که می‌توان در نظر گرفت و

ساده‌ترین قانونهای ریاضی را برای آن انتظار داشت. با انجام آزمایشهای دقیق با اجسام واقعی به این نتیجه می‌رسیم که اگر می‌توانستیم دو جسم را به کمال از هم دور داریم چه چیز مشاهده می‌کردیم. مشاهده می‌کردیم که آنها پیوسته در جهت مخالف شتاب می‌گیرند و نسبت شتابهای آنها برای هر جفت جسم معین، بی‌توجه به اینکه با چه نیرویی یکدیگر را دفع یا جذب می‌کنند، مقدار ثابتی است. اگر مختصات x_1 و x_2 این دو جسم را در امتداد خط شتابهای آنها اندازه بگیریم نتیجه می‌شود:

$$\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_2} = -k_{12}, \quad (4-1)$$

که در آن k_{12} ضریب ثابت مثبتی است که از مشخصات دو جسم مورد نظر است. علامت منفی بدین معنی است که شتابها در خلاف جهت یکدیگرند.

از این گذشته نتیجه می‌گیریم که به‌طور کلی هر چه جسم بزرگتر یا سنگین‌تر باشد، شتاب آن کمتر است. در واقع مشاهده می‌کنیم که نسبت k_{12} با نسبت وزن جسم ۲ به وزن جسم ۱ متناسب است. شتابهای دو جسم متأثر از هم، با عکس وزنها متناسب است. این نشان از امکان تعریف دینامیکی مفاهیمی است که ما اجرام اجسام بر حسب شتابهای متقابل آنها می‌نامیم. جسم معیاری را واحد جرم اختیار می‌کنیم. جرم هر جسم دیگر بر حسب نسبت شتاب واحد جرم به شتاب جسم مورد نظر در حالی که آن دو تحت تأثیر متقابل یکدیگر قرار گیرند تعریف می‌شود:

$$m_i = k_{1i} = \frac{-\ddot{x}_1}{\ddot{x}_i}, \quad (5-1)$$

که در آن m_i ، جرم جسم i و جسم ۱، واحد جرم معیار است.

برای اینکه معادله (۵-۱) بتواند تعریف مفیدی باشد، نسبت k_{12} شتابهای متقابل دو جسم باید دارای پاره‌ای شرایط باشد. اگر قرار است جرمی که توسط معادله (۵-۱) تعریف شده است مقیاسی از چیزی باشد که به ابهام مقدار ماده موجود در جسم می‌نامیم، در این صورت جرم جسم باید حاصل جمع اجرام اجزاء آن جسم باشد، و می‌بینیم که با دقت بسیار چنین است. برای آنکه مفاهیم فیزیکی که ما برای آنها تعاریف دقیق می‌یابیم، در نظریه‌های فیزیکی مفید باشند، مهم آن نیست که با هیچ یک از تصورات قبلی شعور عادی ما به نزدیکی مطابقت داشته باشند. با این همه بیشتر مفاهیم دقیق فیزیکی از تصورات کم و بیش مبهم شعور عادی ما ناشی شده است و جرم، نمونه خوبی از این نوع است. اما مفهوم جرم بعدها، در نظریه نسبیت اندکی اصلاح شد و امروز دیگر به دقت درست نیست که جرم یک جسم را حاصل جمع اجرام اجزاء آن بدانیم.

شرطی که به تحقیق اساسی است، این است که مفهوم جرم باید مستقل از جسم خاصی باشد که به تصادف به‌عنوان واحد جرم انتخاب شده است، بدین معنی که واحد جرم انتخاب شده هر چه باشد نسبت دو جرم باید یکی باشد. این درست است، زیرا تجربه نشان داده است که بین نسبتهای شتابهای متقابل که به وسیله معادله (۴-۱) برای هر سه جسم دلخواه تعریف می‌شود، رابطه زیر برقرار است:

$$k_{12} k_{23} k_{31} = 1. \quad (6-1)$$

فرض کنید که جسم ۱ واحد جرم باشد. اگر اجسام ۲ و ۳ با یکدیگر درکنش متقابل باشند، با استفاده از معادلات (۱-۴)، (۱-۶) و (۱-۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\ddot{x}_2}{\ddot{x}_3} = -k_{23} = -\frac{1}{(k_{12}k_{31})} = -\frac{k_{13}}{k_{12}} = -\frac{m_3}{m_2} \quad (۷-۱)$$

در نتیجه نهایی اشاره‌ای به جسم ۱ که به عنوان واحد جرم معیاری انتخاب شده بود دیده نمی‌شود. بنابراین نسبت جرمهای هر دو جسم دلخواه بهم، برابر است با عکس نسبت شتابهای متقابل آنها با علامت منفی، و نیز به واحد جرم انتخاب شده بستگی ندارد.

بنا به معادله (۷-۱)، برای دو جسم که با هم درکنش متقابل اند، داریم:

$$m_2 \ddot{x}_2 = -m_1 \ddot{x}_1 \quad (۸-۱)$$

یعنی کمیت (شتاب \times جرم) کمیتی مهم است و ما این کمیت را «نیروی» می‌نامیم. شتاب یک جسم در فضا دارای سه مؤلفه است و سه مؤلفه نیروی وارد بر جسم عبارت‌اند از:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z} \quad (۹-۱)$$

نیروهایی که بر یک جسم وارد می‌شوند از انواع مختلفی مانند الکتریکی، مغناطیسی، ثقل و غیره هستند و به رفتار اجسام دیگر بستگی دارند. به طور کلی ممکن است از چند منبع مختلف به جسمی نیرو وارد شود. نیروی کل که به وسیله معادله‌های (۱-۹) داده می‌شود، مجموع بردارهای نیروهایی است که هر یک از منابع اگر به تنهایی وجود می‌داشت، اعمال می‌کرد.

نظریه الکترومغناطیس مربوط به مسئله تعیین نیروهای الکتریکی و مغناطیسی است که به وسیله بارهای الکتریکی و جریانها بر هم اعمال می‌شوند. نظریه ثقل مربوط است به مسئله تعیین نیروهای ثقل که اجرام به یکدیگر وارد می‌کنند. مسئله اساسی مکانیک عبارت است از تعیین حرکات هر دستگاه مکانیکی با در نظر گرفتن نیروهای وارد بر اجسام تشکیل دهنده دستگاه.

۴-۱ قوانین حرکت نیوتن

اسحاق نیوتن اولین کسی بود که قوانین مکانیک را به طور کامل به زبان ریاضی بیان کرد. نیوتن سه قانون معروف خود را به شرح زیر بیان داشت:^۱

۱. هر جسم حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود را بر روی خطی مستقیم حفظ می‌کند مگر اینکه تحت تأثیر نیروهای وارد بر آن مجبور به تغییر حالت خود گردد.
۲. میزان تغییر اندازه حرکت یک جسم بر حسب زمان، با نیروی وارد بر آن متناسب و با آن هم جهت است.

۳. هر عملی همواره با عکس‌العملی مساوی و در جهت مخالف روبه‌روست.

1. Isaac Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*, tr. by F. Cajori (p. 13). Berkeley: University of California Press, 1934.

اندازه حرکت را در قانون دوم باید حاصل ضرب جرم یک ذره در سرعت آن تعریف کرد. اندازه حرکت، که ما آن را با p نمایش می‌دهیم، دارای سه مؤلفه در امتداد محورهای x ، y و z است که از طریق معادله‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad p_z = mv_z. \quad (10-1)$$

دو قانون اول، به اتفاق تعریف اندازه حرکت، معادلات (۱۰-۱)، و اینکه جرم بنا به معادله (۱-۴) ثابت است، همه با هم با معادلات (۹-۱) که آنها را به صورت ریاضی بیان می‌کنند، معادل‌اند. قانون سوم بیان می‌دارد که وقتی دو جسم به طور متقابل بر یکدیگر اثر می‌کنند، نیروی وارد از جسم ۲ به جسم ۱ با نیروی وارد از جسم ۱ به جسم ۲ مساوی و در جهت مخالف آن است. این قانون واقعیت تجربی مستتر در معادله (۴-۱) را بیان می‌کند و به آسانی می‌توان آن را از معادله (۴-۱) و معادلات (۵-۱) و (۹-۱) به دست آورد.

مقام و ارزش دو معادله اول نیوتن، یا معادلات (۹-۱) اغلب موضوع بحث و جدل است. می‌توانیم معادلات (۹-۱) را به منزله تعریف نیرو بر حسب جرم و شتاب در نظر بگیریم. در این صورت، دو قانون اول نیوتن، به هیچ روی قانون محسوب نمی‌شوند بلکه فقط تعاریف مفهوم جدیدی هستند که باید در نظریه وارد گردد. بنابراین قوانین فیزیکی عبارت‌اند از قوانین ثقل، الکترومغناطیس و غیره که در هر حالت خاص نیروها را معین می‌کنند. کشف نیوتن این نبود که نیرو برابر است با حاصل ضرب جرم در شتاب. زیرا این فقط تعریفی برای «نیرو» است. کشف نیوتن این بود که قوانین فیزیکی را می‌توان به ساده‌ترین نحو، بر حسب مفهوم نیرو که به این طریق تعریف شود، بیان داشت. ولی قانون سوم نیوتن هنوز قانون فیزیکی معتبری است که نتیجه تجربی داده شده در معادله (۴-۱) را بر حسب مفهوم نیرو بیان می‌کند. نظر فوق در مورد دو قانون اول نیوتن برای بسیاری از مقاصد مناسب است و اغلب هم اختیار می‌شود ولی مهمترین عیب آن این است که معادلات (۹-۱) فقط نیروی کل وارد بر جسم را تعریف می‌کند در حالی که ما اغلب مایلیم که نیروی کل را به صورت حاصل جمع (برداری) انواع مختلف نیروهای جزء، که از منابع مختلف اعمال می‌شوند بیان کنیم. اگر معادلات (۹-۱) را به عنوان تعریف نیرو به کار ببریم، سراسر علم استاتیک که با نیروهای وارد بر سازه‌های ساکن سروکار دارد، نامفهوم خواهد شد زیرا در سازه‌های ساکن شتابها همه برابر با صفر است.

همچنین می‌توان قوانین الکترومغناطیس، ثقل و غیره را همراه با قانون جمع‌پذیری بردارها (متوازی‌الاضلاع) به عنوان تعریف «نیرو» قبول کرد. در این صورت معادلات (۹-۱) به منزله قانونی برای ارتباط کمیت‌هایی که در گذشته تعریف شده‌اند خواهند بود. عیب این تعریف آن است که هرگاه نیروی جدیدی (مثلاً نیروی هسته‌ای) کشف می‌شود و یا در نظریه‌های الکترومغناطیس یا ثقل اصلاحی ضرورت می‌یابد تغییر می‌کند. شاید بهترین یا دست‌کم قابل انعطاف‌ترین کار این باشد که

۱. در نظریه نسبیت، جرم یک جسم ثابت نیست، بلکه بستگی به سرعت آن دارد. در این حالت قانون ۲ و معادلات (۹-۱) معادل نخواهند بود و چنین بر می‌آید که بیان صحیح همان قانون ۲ است. در این صورت نیرو باید مساوی با میزان تغییر اندازه حرکت نسبت به زمان باشد. تعریف ساده (۵-۱) جرم بنا بر نظریه نسبیت صحیح نیست مگر آنکه ذرات شتابانده با سرعت‌های کم حرکت کنند.

نیرو را به صورت مفهومی ابتدایی در نظریه خود بیاوریم که در عمل بر حسب اندازه گیریهایی که توسط ترازوی فنری انجام می شود تعریف می گردد. در این صورت قوانین نیوتن، مانند قوانین نظریه های نیروهای خاص مثل ثقل و الکترومغناطیس، قانون خواهند بود.

علاوه بر مسئله روش در مورد تعریف نیرو، مشکلات دیگری هم در مکانیک نیوتنی وجود دارد. قانون سوم همیشه صادق نیست. مثلاً در مورد نیروهای الکترومغناطیسی وقتی که اجسام مؤثر بر هم از یکدیگر بسیار دور باشند و یا به تندی شتاب دار شوند و یا در مورد هر نیرویی که با سرعت های معمولی از یک جسم به یک جسم دیگر منتقل گردد، صدق نمی کند. خوشبختانه بیشتر بسط های ما بر اساس دو قانون اول اند. هر جا که قانون سوم به کار رود، استفاده از آن به صراحت ذکر خواهد شد و نتایج حاصل فقط تا جایی که قانون سوم صادق است معتبر خواهد بود.

مشکل دیگر این است که مفاهیم مکانیک نیوتنی به طور کامل واضح و دقیق نیستند، چنانکه در واقع شاید هیچ مفهومی در هیچ نظریه ای نتواند چنین باشد، اگر چه ما باید نظریه را با فرض آنکه مفاهیم چنین اند پدید آوریم. مثال بارز در این باره آن است که دستگاه مختصاتی که شتابهای نامبرده در قوانین اول و دوم نیوتن نسبت به آن باید اندازه گیری بشوند، هیچ جا مشخص نشده است. نیوتن خود این مشکل را تشخیص داد ولی هیچ راه چندان رضایت بخشی برای تعیین خصوصیات دستگاه مختصات صحیحی که باید به کار برد، پیدا نکرد. شاید بهترین راه بیان این قوانین آن باشد که بگوییم دستگاه مختصاتی وجود دارد که این قوانین نسبت به آن صادق اند و تعیین دستگاه مختصات صحیح را به عهده آزمایش بگذاریم. می توان نشان داد که اگر این قوانین در دستگاه مختصاتی صادق باشند در هر دستگاه مختصاتی که به طور یکنواخت نسبت به آن دستگاه حرکت کند نیز صادق اند. این را اصل نسبییت نیوتنی می گوئیم و آن را در بخش ۷-۱ ثابت خواهیم کرد، هر چند که خواننده خود نیز می تواند آن را به آسانی ثابت کند.

دو فرض رایج در سراسر مکانیک کلاسیک عبارت اند از: (۱) حرکت وسایل اندازه گیری تا زمانی که به تندی شتابنده نباشند در رفتار آنها اثری ندارد. (۲) دست کم علی الاصول امکان دارد که برای اندازه گیری هر کمیتی وسایلی ابداع کنیم که خطای آنها به اندازه دلخواه کوچک باشد. این دو فرض در موارد افراطی اعتبار خود را از دست می دهند، یکی در سرعت های بسیار بزرگ، و دیگری زمانی که کمیت های سنجیدنی بسیار کوچک باشند. عدم اعتبار این دو فرض به ترتیب مبانی نظریه نسبیت و نظریه مکانیک کوانتم را تشکیل می دهند. با وجود این مکانیک نیوتنی برای تعداد بسیار زیادی از پدیده ها، با دقت بسیار زیاد صحیح است و به منزله نقطه شروع نظریه های جدیدی است. نه تنها قوانین، بلکه مفاهیم فیزیک کلاسیک نیز باید بنا به نظریه های جدید اصلاح شوند. با این همه درک مفاهیم فیزیک جدید از طریق درک روشن مفاهیم فیزیک کلاسیک آسانتر می شود. این مشکلات به آن سبب اینجا مورد اشاره قرار گرفت که خواننده برای قبول اصلاح های بعدی نظریه آماده شود. ولی مقصود این نیست که نیوتن (و یا خواننده در این مرحله) قبل از وضع قوانین حرکتش باید از این مطالب نگران می بود. اگر نگران بود هرگز نمی توانست نظریه خود را به وجود آورد. برای شروع، لازم بود که هر گونه فرضی را که معقول می نمود در نظر بگیرد. حال، اینکه کدام یک از فرضها، و چه وقت و به چه طریق احتیاج به اصلاح داشتند، تنها بعدها به نشان موفقیت یا شکست نظریه در پیش بینی نتایج آزمایشها، تعیین می شد.

۵-۱ ثقل

هر چند که از پیش اشاره‌هایی شده بود که علت حرکات سیارات و سقوط اجسام بر زمین ممکن است ناشی از خاصیتی در اجسام فیزیکی باشد که توسط آن یکدیگر را جذب می‌کنند، ولی اسحاق نیوتن اولین کسی بود که این پدیده را به صورت ریاضی بیان کرد. نیوتن به روشهایی که در آینده بررسی خواهد شد نشان داد که اگر فرض کند که با هر جفت جسم نیروی جاذبه‌ای متناسب با اجرام آنها و متناسب با معکوس مجذور فاصله آنها از هم، همراه است، می‌تواند حرکات سیارات را به طور کمی توجیه کند. یا به زبان علائم:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (11-1)$$

که در آن m_1 و m_2 اجرام اجسام جذب‌کننده و r فاصله بین آنها و G ثابتی کیهانی است که مقدار آن طبق آزمایش برابر است با^۱

$$G = (6,670 \pm 0,005) \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{-sec}^{-2} \text{-g}^{-1}. \quad (12-1)$$

در آینده در بخش ۶-۲ نشان خواهیم داد که برای جسمی با تقارن کروی، می‌توان نیرو را چنان حساب کرد که گویی تمام جرم جسم در مرکز آن متمرکز است. بنابراین برای جسم کوچکی به جرم m که در سطح زمین قرار دارد، نیروی ثقل چنین است:

$$F = mg, \quad (13-1)$$

که در آن

$$g = \frac{GM}{R^2} = 980,7 \text{ cm-sec}^{-2}, \quad (14-1)$$

و M جرم زمین و R شعاع آن است. کمیت g دارای بعد شتاب است و با کمک معادلات (۱-۹) و (۱۳-۱) به آسانی می‌توان نشان داد که هر جسمی که آزادانه در سطح زمین رها شود، با شتابی برابر g فرو خواهد شتابید.

این امر که نیروی ثقل مؤثر بر یک جسم با جرم آن و نه با ثابت دیگری (مثلاً بار الکتریکی) که از ویژگیهای جسم است، متناسب است، از دید نظریه نیوتن کم و بیش تصادفی است. این امر در نظریه عمومی نسبیت اساسی است. شاید به سبب تناسب نیروی ثقل با جرم باشد که بنا به معمول نظریه ثقل شعبه‌ای از مکانیک قلمداد می‌شود، حال آنکه نظریه‌های مربوط به انواع دیگر نیرو، چنین به حساب نمی‌آیند.

برای اندازه‌گیری جرم جسم، معادله (۱۳-۱) روش عملی مناسب‌تری از آنچه در تعریف ابتدایی، یعنی در معادله (۱-۵) مشاهده شد ارائه می‌دهد. می‌توان جرمی را از طریق اندازه‌گیری نیروی ثقل وارد بر آن، چنانکه با ترازویی فنری، و یا از طریق مقایسه نیروی ثقل وارد بر آن با نیروی ثقل وارد بر جرمی معیاری، چنانکه با ترازویی شاهین‌دار، یا با قبان سنجید.

۱-۶-۱ واحدها و ابعاد

به منظور برقراری دستگاه آحادی که بر حسب آن بتوانیم اندازه‌گیریهای فیزیکی را بیان کنیم، ابتدا واحدهای معیاری دلخواهی برای تعدادی کمیتهای «بنیادی» فیزیکی (از قبیل جرم، طول، و زمان) انتخاب می‌کنیم و سپس واحدهای مشتق دیگر را بر حسب واحدهای بنیادی تعریف می‌کنیم (مثلاً واحد سرعت عبارت است از واحد طول نسبت به واحد زمان). در مکانیک مرسوم است که جرم، طول، و زمان را به‌عنوان کمیتهای بنیادی انتخاب کنند، هر چند که این انتخاب آیه منزل نیست، و به همان آسانی می‌توانیم کمیتهای سه‌گانه دیگری یا حتی بیشتر یا کمتر از سه کمیت را، بنیادی اختیار کنیم. بنا به معمول سه دستگاه آحاد، استفاده می‌شود که عبارت‌اند از دستگاه سانتی‌متر-گرم-ثانیه، یا CGS، و دستگاه متر-کیلوگرم-ثانیه، یا mks و دستگاه فوت-پاوند-ثانیه یا دستگاه انگلیسی که هر یک از حروف همان نام واحدهای بنیادی آن دستگاه است.^۱ برای به‌دست آوردن واحد کمیتهای دیگر فیزیکی کافی است در معادله‌هایی که آنها را تعریف می‌کنند واحد کمیتهای بنیادی مناسب را قرار دهیم. به‌عنوان مثال سرعت طبق معادله (۱-۲)

$$v_x = \frac{dx}{dt},$$

به‌صورت فاصله‌ای تقسیم بر زمان تعریف می‌شود. بنابراین واحدهای سرعت در سه دستگاه فوق به‌ترتیب عبارت‌اند از سانتی‌متر بر ثانیه، متر بر ثانیه و فوت بر ثانیه. به همین ترتیب خواننده می‌تواند نشان دهد که واحدهای نیرو که به وسیله معادلات (۱-۹) تعریف می‌شود در سه دستگاه مذکور عبارت‌اند از:

$$\text{g-cm-sec}^{-2}, \text{ kg-m-sec}^{-2}, \text{ lb-ft-sec}^{-2},$$

این واحدها به‌ترتیب به اسامی خاص دین^۲ و نیوتن^۳ و پوندال^۴ نامیده می‌شوند. گاهی واحدهای ثقلی نیرو را با گذاشتن معادلات زیر به‌جای معادلات (۱-۹) تعریف می‌کنند:

$$F_x = \frac{m\ddot{x}}{g}, \quad F_y = \frac{m\ddot{y}}{g}, \quad F_z = \frac{m\ddot{z}}{g}, \quad (15-1)$$

که در آن $g = 980.7 \text{ cm-sec}^{-2} = 9.807 \text{ m-sec}^{-2} = 32.17 \text{ ft-sec}^{-2}$ شتاب ثقل در سطح زمین است. در این صورت واحد نیرو، نیرویی است که میدان ثقل معیاری به واحد جرم وارد می‌کند. واحدهای ثقلی نیرو را در سه دستگاه به‌ترتیب گرم-وزن، کیلوگرم-وزن و پوند-وزن می‌نامند. در این کتاب، قانون بنیادی مکانیک را به شکل (۱-۹) می‌نویسیم نه به شکل (۱-۱۵) و بنابراین آحاد مطلق نیرو، و نه واحدهای ثقلی را به‌کار خواهیم برد.

از آنجا که تقریباً تمام مثالهای فیزیکی ما به‌صورت جبری حل می‌شوند، از این به بعد مسئله واحدها به‌ندرت پیش خواهد آمد. فرض بر این است که خواننده به اندازه کافی با واحدهای

۱. در دستگاه mks، واحد بنیادی دیگری به نام کولن برای بار الکتریکی وجود دارد که در تعریف واحدهای الکتریکی وارد می‌شود. واحدهای الکتریکی در دستگاه CGS، همه بر حسب سانتی‌متر، گرم، و ثانیه تعریف شده‌اند و واحدهای الکتریکی عملاً هرگز در دستگاه انگلیسی به‌کار نمی‌روند.

اندازه‌گیری و کار کردن با آنها آشنایی دارد و به راحتی می‌تواند مثالهای عددی را در صورت نیاز، در هر دستگاه دلخواه حل کند.

در هر معادله فیزیکی باید ابعاد تمام جملات در طرفین معادله پس از خلاصه شدن به واحدهای بنیادی با هم برابر باشند. به‌عنوان مثال می‌توانیم ببینیم که آیا ابعاد ضریب ثابت ثقل در معادله (۱۱-۱) با آنچه در معادله (۱۲-۱) ذکر شد یکسان است؟

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (11-1)$$

حال ابعاد مربوط به هر کمیت را در معادله فوق جایگزین می‌کنیم:

$$(g\text{-cm-sec}^{-2}) = \frac{(\text{cm}^3\text{-sec}^{-2}\text{-g}^{-1})(g)(g)}{(\text{cm}^2)} = (g\text{-cm-sec}^{-2}). \quad (16-1)$$

تا زمانی که ابعاد مطلق نیرو را به کار می‌بریم، آزمون فوق به دستگاه آحادی که به کار می‌بریم بستگی ندارد و می‌توانیم ابعاد را بی‌مراجعه به آحاد با استفاده از علائم l ، m ، و t برای طول، جرم، و زمان بیازماییم.

$$(mlt^{-2}) = \frac{(l^3t^{-2}m^{-1})(m)(m)}{(l^2)} = (mlt^{-2}). \quad (17-1)$$

البته وقتی که ضرایب ثابتی مانند G در معادله‌ای وجود داشته باشند، همیشه می‌توان ابعاد مناسبی برای آن ثابت چنان اختیار کرد که ابعاد دو طرف معادله یکسان شوند. اگر واحدهای دو طرف معادله‌ای باهم برابر نباشند آن معادله به تحقیق غلط است. ولی توافق آحاد معادله ضامن صحت آن نیست. لکن آزمون ابعاد نتیجه به‌دست آمده، اغلب اشتباههایی را که از خطاهای جبری ناشی می‌شوند آشکار خواهد کرد. خواننده باید عادت کند و ابعاد فرمولهایی را که به‌دست می‌آورد در هر مرحله امتحان کند. وقتی ضرایب ثابتی در مسئله‌ای وارد می‌شوند، ابعاد آنها باید از نخستین معادله‌ای که این ضرایب در آن ظاهر می‌شوند به‌دست آیند، و برای آزمون ابعاد، در مراحل بعدی به کار برده شوند.

۷-۱ چند مسئله مقدماتی در مکانیک

قبل از اینکه بسط منظم و با قاعده مکانیک را بر پایه قوانینی که در این فصل معرفی شدند آغاز کنیم چند مسئله از مکانیک مقدماتی را مرور می‌کنیم تا این قوانین به‌طور واضح در خاطر نقش بندند.

یکی از ساده‌ترین مسائل مکانیکی عبارت است از پیدا کردن چگونگی حرکت جسمی که در امتداد خطی راست حرکت می‌کند و نیروی ثابتی بر آن وارد می‌شود. اگر جرم جسم، m و نیروی وارد بر آن، F باشد، بنا به قانون دوم نیوتن

$$F = ma. \quad (18-1)$$

بنابراین شتاب ثابت خواهد بود:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}. \quad (19-1)$$

اگر معادله (۱۹-۱) را در dt ضرب کنیم، رابطه‌ای برای تغییر سرعت dv در فاصله زمان dt به‌دست می‌آوریم

$$dv = \frac{F}{m} dt. \quad (20-1)$$

با انتگرال‌گیری از (۲۰-۱) می‌توان تغییر کل سرعت را طی زمان t به دست آورد:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t \frac{F}{m} dt, \quad (21-1)$$

$$v - v_0 = \frac{F}{m} t, \quad (22-1)$$

که در آن v سرعت در $t = 0$ است. اگر x فاصله جسم از مبدأ ثابتی باشد، که در امتداد مسیر حرکت جسم اندازه‌گیری می‌شود، در این صورت

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{F}{m} t. \quad (23-1)$$

حال معادله (۲۳-۱) را دوباره در dt ضرب می‌کنیم و برای یافتن x ، از آن انتگرال می‌گیریم

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{m} t \right) dt, \quad (24-1)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2, \quad (25-1)$$

که در آن x_0 نماینده مکان جسم در $t = 0$ است. و این تشریح کاملی از حرکت جسم است. از معادلات (۲۵-۱) و (۲۲-۱) می‌توان سرعت جسم را در زمان دلخواه t و مسافت طی شده را حساب کرد. اگر مقاومت هوا قابل اغماض باشد، به هر جسمی که در نزدیکی سطح زمین آزادانه فروافتد، نیروی ثابتی که توسط معادله (۱۳-۱) داده می‌شود، اعمال می‌گردد و در صورتی که مقاومت هوا قابل اغماض باشد، هیچ نیروی دیگری بر آن وارد نمی‌شود. در این حالت، اگر x ارتفاع جسم نسبت به سطح مبدأیی باشد،

$$F = -mg. \quad (26-1)$$

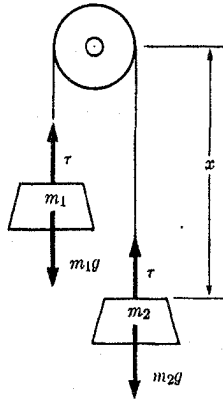
علامت منفی به دلیل آن است که نیرو به سمت پایین و جهت مثبت x به سمت بالاست. جایگزین کردن معادله (۲۶-۱) در معادلات (۱۹-۱)، (۲۲-۱)، و (۲۵-۱) نتیجه می‌شود که:

$$a = -g, \quad (27-1)$$

$$v = v_0 - g t, \quad (28-1)$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (29-1)$$

مهم آن است که به هنگام کاربرد قانون حرکت نیوتن، معادله (۱۸-۱)، ابتدا تشخیص دهیم قانون برای چه جسمی به کار برده می‌شود و سپس m ، جرم جسم و F نیروی کل وارد بر آن را در معادله (۱۸-۱) قرار دهیم. اهمال در به یاد داشتن این نکته بدهی منشأ مشکلات فراوانی است، که یکی از آنها در برهان دو حدی اسب و ارابه نشان داده می‌شود. اسبی ارابه‌ای را می‌کشد، اما بنا به قانون سوم نیوتن ارابه نیز اسب را با نیرویی مساوی و مختلف‌الجهت، به عقب می‌کشد در این صورت چطور ممکن است اسب یا ارابه حرکت کنند؟ خواننده‌ای که بتواند مسئله ۶ آخر این فصل را حل کند هیچ‌گونه اشکالی در جواب دادن به این مسئله نخواهد داشت.



شکل ۱-۲ ماشین آتوود.

حرکت دستگاه نشان داده شده در شکل ۱-۲ را در نظر بگیرید. دو جرم m_1 و m_2 از دو انتهای طنابی بر روی قرقره‌ای آویزان شده‌اند و فرض می‌کنیم که m_1 بزرگتر است. x را فاصله قرقره تا جرم m_2 می‌گیریم. چون طول طناب ثابت است، مختصه x مکان m_1 و m_2 را معین می‌کند. هر دو جرم با یک سرعت حرکت می‌کنند،

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (30-1)$$

سرعت موقعی مثبت است که جرم m_1 به سمت بالا و جرم m_2 به سمت پایین حرکت کند. اگر از اصطکاک و مقاومت هوا صرف نظر کنیم، نیروهای وارد به m_1 و m_2 عبارت‌اند از:

$$F_1 = -m_1g + \tau, \quad (31-1)$$

$$F_2 = m_2g - \tau, \quad (32-1)$$

که در آن τ نیروی کشش طناب است. نیروها هنگامی مثبت گرفته می‌شوند که سرعت مثبتی، dx/dt به وجود آورند. توجه کنید که جملاتی که در این معادلات شامل τ هستند با قانون سوم نیوتن توافق‌اند. معادلات حرکت دو جرم عبارت‌اند از:

$$-m_1g + \tau = m_1a, \quad (33-1)$$

$$m_2g - \tau = m_2a, \quad (34-1)$$

که در آن a شتاب و مساوی با dv/dt ، و برای هر دو جرم یکسان است. با جمع کردن معادلات (۳۳-۱) و (۳۴-۱)، می‌توان τ را حذف، و شتاب را حساب کرد.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} g. \quad (35-1)$$

شتاب ثابت است و سرعت v و مکان x را می‌توان در هر زمان t (مانند مثال قبل) به دست آورد. اگر در معادله (۳۳-۱) یا (۳۴-۱) به جای a طرف راست معادله (۳۵-۱) را قرار دهیم نیروی کشش

به دست می آید.

$$\tau = \frac{\gamma m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (36-1)$$

در مقام آزمون، توجه داریم که اگر $m_1 = m_2$ ، $a = 0$ و

$$\tau = m_1 g = m_2 g, \quad (37-1)$$

چنانکه در حالت برقراری تعادل استاتیکی باید چنین باشد و نیز بد نیست توجه داشته باشید که اگر $m_2 \gg m_1$ ، در این صورت

$$a \doteq g, \quad (38-1)$$

$$\tau \doteq \gamma m_1 g. \quad (39-1)$$

خواننده باید خود را قانع کند که در این مورد، انتظاری جز این دو نتیجه نیز نباید می رفت.

وقتی چند نیرو بر جسمی وارد شوند، شتاب جسم توسط حاصل جمع برداری نیروهای عامل معین می گردد. به عکس هر نیرو را می توان به هر ترتیب که مناسب باشد به اجزایی برداری تجزیه کرد به طوری که جمع برداری آنها، نیروی داده شده باشد. این مؤلفه ها را می توان نیروهای مستقلی دانست که به جسم وارد می شوند.^۱ به عنوان مثال، آجری به جرم m را که بر روی سطح شیب داری فرو می لغزد در نظر می گیریم، (شکل ۱-۳). دو نیروی وارد بر آجر عبارتند از نیروی وزن mg و F ، یعنی نیرویی که سطح بر آجر وارد می کند. این دو نیرو طبق قانون متوازی الاضلاع با هم جمع می شوند تا بردار متوجه R که بر آجر اعمال می شود به دست آید.

$$R = ma. \quad (40-1)$$

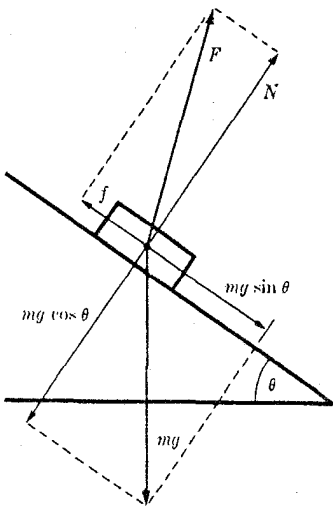
چون آجر در جهت نیروی متوجه شتاب می یابد، بدیهی است که اگر آجر بی آنکه از روی سطح شیب دار فرابجهد یا به درون آن فرو برود، روی آن پایین بلغزد، نیروی متوجه R باید در امتداد سطح شیب دار باشد. برای پیدا کردن R مطابق شکل ۱-۴، هر یک از نیروها را به مؤلفه هایی موازی و عمود بر سطح شیب دار تجزیه می کنیم. نیروی F که از سطح بر آجر وارد می شود، چنانکه در شکل ۱-۴ نشان داده شده است، به دو مؤلفه تجزیه می شود، یکی N ، عمود بر سطح که مانع ورود آجر به سطح است و دیگری نیروی f موازی سطح شیب دار، و مخالف جهت حرکت آجر، که از اصطکاک میان آجر و سطح ناشی می گردد. با جمع کردن مؤلفه های موازی با هم نتیجه می شود که:

$$R = mg \sin \theta - f, \quad (41-1)$$

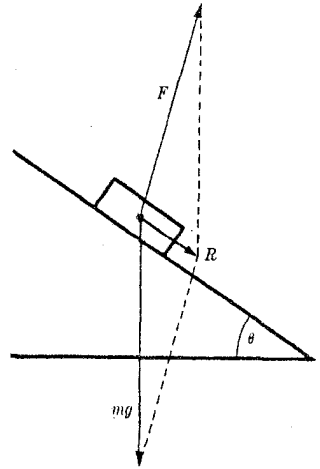
و

$$0 = N - mg \cos \theta. \quad (42-1)$$

۱. بسط به قاعده جبر برداری در فصل ۳ خواهد آمد. در بحث حاضر فقط درک قانون متوازی الاضلاع برای جمع برداری مورد احتیاج است.



شکل ۴-۱ تجزیه نیروها به مؤلفه‌های موازی و عمود بر سطح شیب‌دار.



شکل ۳-۱ نیروهای وارد بر آجری که بر سطح شیب‌دار فرو می‌لغزد.

اگر نیروی اصطکاک f متناسب با نیروی قائم N باشد، چنانکه اغلب برای سطوح لغزنده خشک تقریباً صادق است، در این صورت

$$f = \mu N = \mu mg \cos \theta, \quad (۴۳-۱)$$

که در آن μ ضریب اصطکاک است. با استفاده از معادلات (۴۳-۱)، (۴۱-۱)، و (۴۰-۱) می‌توان شتاب را حساب کرد:

$$a = g (\sin \theta - \mu \cos \theta). \quad (۴۴-۱)$$

اکنون سرعت و مکان را می‌توان (مانند مثال اول) به صورت توابعی از زمان به دست آورد. معادله (۴۴-۱) فقط هنگامی برقرار است که آجر به سمت پایین سر می‌خورد. اگر به سمت بالا بلغزد، نیروی f با حرکت آن مخالفت می‌کند و دومین جمله در معادله (۴۴-۱) مثبت خواهد بود. این حالت فقط زمانی ممکن است که سرعت اولیه‌ای رو به بالا به آجر داده شده باشد. اگر آجر ساکن باشد، نیروی اصطکاک f ممکن است هر مقداری داشته باشد و حداکثر برابر $\mu_s N$ باشد.

$$f \leq \mu_s N, \quad (۴۵-۱)$$

که در آن μ_s ضریب اصطکاک استاتیکی و بنا به معمول از μ بزرگتر است. در این حالت R صفر است و

$$f = mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta. \quad (۴۶-۱)$$

بنا به معادله (۴۶-۱)، θ ، زاویه سطح شیب‌دار نباید از اندازه حدی θ_r ، که به زاویه سکون موسوم است بزرگتر باشد،

$$\tan \theta \leq \tan \theta_r = \mu_s. \quad (۴۷-۱)$$

اگر θ بزرگتر از θ_r باشد، آجر نمی‌تواند ساکن بماند.

اگر جسمی با سرعت ثابت v روی محیط دایره‌ای به شعاع r حرکت کند، شتاب آن رو به مرکز دایره است و در فصل ۳ ثابت خواهیم کرد که مقدار آن برابر است با:

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (48-1)$$

چنین جسمی باید تحت تأثیر نیروی ثابت رو به مرکزی قرار گرفته باشد. این نیروی مرکزی به وسیله فرمول زیر داده می‌شود:

$$F = ma = \frac{mv^2}{r}. \quad (49-1)$$

توجه کنید که mv^2/r «نیروی گریز از مرکز نیست» که جهت آن از مرکز دایره به بیرون باشد، بلکه حاصل ضرب جرم در شتاب است و چنانکه از نامش پیداست، رو به مرکز متوجه است. به عنوان مثال، مدار ماه به گرد زمین نزدیک به مدور است و اگر فرض کنیم که زمین در مرکز این دایره ساکن است، بنا بر معادله (۱-۱۱)، نیروی وارد بر ماه عبارت است از:

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad (50-1)$$

که در آن M و m به ترتیب اجرام زمین و ماه‌اند. با جایگزین کردن GM از معادله (۱-۱۴) در معادله (۵۰-۱) می‌توان این نیرو را بر حسب R ، شعاع زمین و g شتاب ثقل در سطح زمین بیان داشت.

$$F = \frac{mgR^2}{r^2}. \quad (51-1)$$

سرعت ماه عبارت است از

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad (52-1)$$

که در آن T زمان تناوب دوران است. با جایگزین کردن معادلات (۱-۵۱) و (۱-۵۲) در معادله (۴۹-۱) می‌توان r را به دست آورد

$$r^3 = \frac{gR^2 T^2}{4\pi^2}. \quad (53-1)$$

این معادله اولین بار به وسیله اسحاق نیوتن به دست آمد.^۱ البته این معادله کاملاً صحیح نیست، زیرا مدار ماه دایره کامل نیست و همچنین به علت آنکه، زمین در مرکز مدار ماه ساکن نمی‌ماند، و در اثر جاذبه ماه کمی نوسان می‌کند. بنا به قانون سوم نیوتن، این نیروی جاذبه به وسیله معادله (۱-۵۱) نیز داده می‌شود. از آنجا که زمین به مراتب سنگینتر از ماه است، شتاب آن به مراتب کمتر است و معادله (۱-۵۳) بسیار ناصحیح نخواهد بود. بحث دقیق این مسئله در بخش ۴-۷ داده شده است. خطای کوچک دیگری به سبب چرخش زمین روی g ، که به وسیله آزمایش معین می‌گردد، در

محاسبه وارد می شود (رجوع شود به بخش ۷-۳). اگر مقادیر اندازه گیری شده

$$g = 980 / 2 \text{ cm-sec}^{-2},$$

$$R = 6368 \text{ km},$$

$$T = 27 \frac{1}{3} \text{ روز},$$

را در معادله (۱-۵۳) قرار دهیم خواهیم داشت

$$r = 383000 \text{ km}.$$

بنا به اندازه گیریهای جدید، فاصله متوسط زمین تا ماه عبارت است از

$$r = 385000 \text{ km}.$$

مقادیر r و R که در اختیار نیوتن بودند، امکان چنین توافق نزدیکی را نمی دادند.

مسائل

۱. مطلوب است محاسبه نیروی جاذبه اعمال شده میان یک الکترون و یک پروتون که به فاصله 0.5 \AA از هم قرار گرفته باشند ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$). این نیرو را با نیروی جاذبه الکترواستاتیکی میان آنها در حالی که به همین فاصله از یکدیگر قرار گرفته باشند مقایسه کنید.

۲. ضریب چسبندگی η به وسیله رابطه

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{ds},$$

تعریف می شود، که در آن F نیروی اصطکاک مؤثر در سطح A در سیالی متحرک، و dv اختلاف سرعت دو لایه از سیال است که به موازات سطح A و به فاصله ds از هم فرض می شوند. فاصله ds در امتداد عمود بر سطح A سنجیده می شود. واحدهای چسبندگی η را به صورتی که در سه دستگاه فوت - پاوند - ثانیه و cgs و mks بیان می شود به دست آورید. همچنین مطلوب است محاسبه ضرایبی که برای تبدیل واحد چسبندگی از هر یک از این سه دستگاه به دو دستگاه دیگر لازم است. ۳. سیالی در لوله ای استوانه ای به طول l و شعاع a سیلان می کند. اختلاف فشار ΔP (نیرو بر واحد سطح) سبب می شود که یک شار Φ (حجم در ثانیه) در لوله سیلان کند. فرض کنید که ΔP متناسب با l است و در غیر این صورت فقط به Φ ، به شعاع لوله a ، و به چسبندگی η (که در مسئله ۲ بالا تعریف شده است) بستگی دارد. با در نظر گرفتن ملاحظات بعدی، نشان دهید که ΔP باید متناسب با η و با Φ و به طور معکوس متناسب با a^4 هم باشد.

۴. یک دستگاه واحدها که اغلب توسط مهندسان مکانیک به کار برده می شود، علاوه بر پا و ثانیه، واحد نیروی اساسی سومی نیز انتخاب می کند به نام پوند - وزن (که معمولاً فقط پوند نامیده می شود). بنابراین واحد جرم بر اساس معادلات (۱-۹) یک واحد مشتق است که اسلاج نامیده می شود. اسلاج را بر حسب واحدهای اساسی (پا، پوند - وزن، ثانیه) بیان کنید. اسلاج را بر حسب پوند در دستگاه پا - پوند - ثانیه بیان کنید. ثابت گرانشی G را در دستگاه پا - پوند - وزن - ثانیه پیدا کنید.

۵. راننده‌ای با سرعت v_0 به چراغ راهنما، هنگامی که از سبز به زرد می‌رود، نزدیک می‌شود: (الف) اگر زمان عکس‌العمل او، که طی آن تصمیم به توقف می‌گیرد و پایش را روی ترمز می‌گذارد، τ باشد و اگر حداکثر شتاب کندکننده در اثر ترمز برابر a باشد حداقل فاصله راننده از چهارراه، s_{\min} ، به هنگام زرد شدن چراغ چقدر باید باشد تا او بتواند اتومبیل را متوقف کند. (ب) اگر چراغ زرد قبل از قرمز شدن به مدت t روشن بماند، راننده از حداکثر چه مسافتی، s_{\max} می‌تواند با سرعت v_0 به حرکت خود ادامه دهد تا قبل از قرمز شدن چراغ از چهارراه بگذرد. (پ) ثابت کنید که اگر سرعت اولیه‌ی او v_0 از

$$v_{0,\max} = \gamma a (t - \tau),$$

بیشتر باشد، رشته فواصلی (از چهارراه) وجود خواهد داشت که او در آنها نه می‌تواند بی‌برخورد به چراغ قرمز توقف کند و نه به حرکت خود ادامه دهد. (ت) برای t, τ, a و تخمینی منطقی بزنید و $v_{0,\max}$ را بر حسب مایل در ساعت حساب کنید. اگر $v_0 = \frac{1}{3} v_{0,\max}$ باشد مطلوب است s_{\min} و s_{\max} .

۶. پسر بچه‌ای به جرم m سورت‌های به جرم M را به‌طور افقی می‌کشد. ضریب اصطکاک میان سورت‌ها و برف μ است.

(الف) نموداری رسم کنید که تمام نیروهای وارد بر پسر بچه و سورت‌ها در آن نشان داده شده باشد. (ب) مطلوب است مؤلفه‌های افقی و قائم هر یک از نیروها در لحظه‌ای که پسر و سورت‌ها هر یک دارای شتاب a باشند. (پ) اگر ضریب اصطکاک استاتیکی میان پاهای پسر و زمین μ_0 و اصطکاک تنها عامل محدودکننده باشد، بزرگترین شتابی را که او می‌تواند به خود و سورت‌ها بدهد حساب کنید.

۷. یک جاروی زمین‌شویی به جرم m که دسته آن با جهت قائم زاویه θ می‌سازد با نیروی F که در امتداد دسته آن وارد است، رانده می‌شود. ضریب اصطکاک با زمین μ است.

(الف) نموداری رسم کنید که تمام نیروهای وارد بر جارو در آن نشان داده شده باشد. (ب) اگر θ و μ معلوم باشند نیروی لازم جهت راندن این جارو را با سرعت ثابت روی زمین پیدا کنید. (پ) نشان دهید که اگر θ کوچکتر از زاویه سکون باشد نمی‌توان جارو را با فشار دادن در جهت دسته آن به حرکت در آورد. از جرم دسته جارو صرف‌نظر کنید.

۸. جعبه‌ای به جرم m بر روی سطح افقی میزی با ضریب اصطکاک μ ، حرکت می‌کند و با ریسمانی از روی قرقه‌ای که بر لبه میز قرار دارد به جسم آویخته‌ای به جرم M متصل است. شتاب دستگاه و کشش ریسمان را پیدا کنید.

۹. به آجر نشان داده شده در شکل‌های ۱-۳ و ۱-۴ سرعت اولیه‌ای برابر v_0 به‌طرف بالای سطح شیب‌دار می‌دهیم. زاویه θ بزرگتر از زاویه سکون منظور می‌شود. مطلوب است محاسبه مسافتی که آجر روی سطح شیب‌دار بالا می‌رود و نیز زمان لازم برای بالا رفتن و برگشتن به نقطه اول آن.

۱۰. سطح بزرگراهی در پیچی به شعاع انحنای r با سطح افق زاویه θ می‌سازد. اگر ضریب اصطکاک

۱۰. باشد، مطلوب است محاسبه حداکثر سرعتی که یک اتومبیل می تواند با آن بی انحراف از این پیچ بگذرد.

۱۱. فرض کنید که زمین در مداری مدور به شعاع 93000000 مایل با زمان تناوب دورانی برابر یک سال حرکت می کند. جرم خورشید را بر حسب تن به دست آورید.

۱۲. (الف) با در دست داشتن شعاع زمین و مقادیر g و G ، جرم زمین را حساب کنید. (ب) اجرام و فواصل ماه و خورشید تا زمین را از جدول استخراج کنید و نیروی جاذبه میان زمین و خورشید و زمین و ماه را به دست آورید. با در نظر گرفتن این نکته که نیروی اولی سبب دوران سالانه زمین به دور خورشید و نیروی دومی سبب نوسان زمین حول مرکز ثقل مشترک دستگاه زمین - ماه می شود، نتایج خود را به وسیله تخمین تقریبی نسبت این دو نیرو امتحان کنید.

۱۳. خورشید نزدیک به 25000 سال نوری از مرکز کهکشان فاصله دارد و با سرعت 175 مایل در ثانیه بر مداری که نزدیک به مدور است حرکت می کند. اگر در محاسبه نیروی ثقل وارد بر خورشید، تمام جرم کهکشان را در مرکزش فرض کنیم، جرم تقریبی کهکشان را پیدا کنید. نتیجه را به صورت نسبت جرم کهکشان به جرم خورشید بیان کنید. (اگر گردش خورشید به دور مرکز کهکشان را با گردش زمین به دور خورشید مقایسه کنید، برای حل این مسئله احتیاجی به دانستن جرم خورشید یا عدد ثابت G نخواهید داشت.)

۱۴. یک ستاره نوترنی مجموعه ای از نوترنهایی است که در اثر نیروی گردش متقابل به هم چسبیده اند و دارای چگالی قابل مقایسه با چگالی یک هسته اتمی (تقریباً 10^{12} g/cm^3) هستند. فرض کنید که ستاره نوترنی یک کره است و نشان دهید که فرکانس حداکثر که با آن ستاره ممکن است دوران کند، به شرط آنکه جرم در خط استوا نیفتد، عبارت است از

$$f = (\rho G / 3\pi)^{1/2}$$

که در آن ρ چگالی است. f را برای یک چگالی 10^{12} g/cm^3 حساب کنید. گفته شده است که تپ های اختر، که ترنهای منظم رادیواکتیو به طور مکرر، تا در حدود 30 عدد در ثانیه، تولید می کنند، ستاره های نوترنی دوار هستند.

حرکت یک بعدی ذره

۱-۲ قضایای اندازه حرکت و انرژی

در این فصل حرکت ذره‌ای به جرم m را بررسی می‌کنیم که در امتداد خطی مستقیم، که آن را محور x در نظر خواهیم گرفت، تحت تأثیر نیروی F ، که در امتداد محور x بر آن وارد است، انجام می‌شود. چنانکه خواهیم دید این بحث در موارد دیگری، که حرکت دستگاهی مکانیکی تنها به یک مختصه بستگی دارد و یا حالاتی که جز یکی از مختصات، بقیه را می‌توان حذف کرد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. حرکت ذره طبق معادلات (۱-۹) تابع معادله زیر است.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F. \quad (1-2)$$

قبل از آن که به حل معادله (۱-۲) بپردازیم، مفاهیمی را که در بحث مسائل مکانیکی مفیدند تعریف و نیز قضایای کلی ساده‌ای را در مورد حرکت یک بعدی ثابت خواهیم کرد. اندازه حرکت خطی p طبق معادله (۱-۱۰) چنین تعریف می‌شود:

$$p = m v = m \frac{dx}{dt}. \quad (2-2)$$

با استفاده از معادله (۲-۲) و نیز در نظر گرفتن اینکه جرم m ثابت است، از معادله (۱-۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{dp}{dt} = F. \quad (3-2)$$

این معادله بیان می‌کند که میزان تغییرات اندازه حرکت بر حسب زمان با نیروی وارد بر جسم برابر است، و البته این درست همان قانون دوم نیوتن است و آن را قضیه (دیفرانسیل) اندازه حرکت می‌نامیم. اگر معادله (۳-۲) را در dt ضرب کنیم و از آن طی زمان t_1 تا t_2 انتگرال بگیریم، قضیه اندازه حرکت به صورت زیر در می‌آید:

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt. \quad (4-2)$$

معادله (۴-۲) تغییرات اندازه حرکت را در اثر نیروی F بین زمانهای t_1 و t_2 معین می‌کند. انتگرال سمت راست را ضربه نیروی F در این فاصله زمانی می‌گویند. برای محاسبه انتگرال، باید F به صورت تابعی از فقط t معلوم باشد. اگر F به صورت $F(x, v, t)$ در دست باشد، ضربه را می‌توان برای هر حرکت خاص $x(t)$ و $v(t)$ حساب کرد.

انرژی جنبشی کمیتی است که دارای اهمیت بسیار است و (در مکانیک کلاسیک) با معادله زیر تعریف می شود:

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \quad (5-2)$$

اگر معادله (۱-۲) را در v ضرب کنیم نتیجه می شود

$$m v \frac{dv}{dt} = F v,$$

و یا

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{dT}{dt} = F v. \quad (6-2)$$

معادله (۶-۲) میزان تغییرات انرژی جنبشی است و می توان آن را قضیه (دیفرانسیل) انرژی نامید. اگر معادله (۶-۲) را در dt ضرب کنیم و در فاصله t_1 تا t_2 از آن انتگرال بگیریم، قضیه به صورت انتگرال گرفته حاصل خواهد شد.

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} F v dt. \quad (7-2)$$

معادله (۷-۲) تغییرات انرژی ناشی از نیروی F در فاصله زمانی t_1 و t_2 است. انتگرال سمت راست را کار انجام شده توسط نیرو در این فاصله زمانی می نامند. تابع $F v$ در سمت راست، میزان انجام کار بر حسب زمان است و آن را توان داده شده به وسیله نیروی F می گویند. به طور کلی وقتی که F به صورت $F(x, v, t)$ داده شده باشد، کار را فقط می توان برای یک حرکت خاص و معین $x(t)$ و $v(t)$ حساب کرد. چون $v = dx/dt$ است، هنگامی که تابع $F(x)$ در دست باشد، انتگرال کار را می توان به شکل مناسب زیر نوشت

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} F dx. \quad (8-2)$$

۲-۲ بحث درباره مسئله کلی حرکت یک بعدی

اگر نیروی F معلوم باشد، معادله حرکت (۱-۲) به صورت معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم برای تابع مجهول $x(t)$ در می آید. نیروی F ممکن است به صورت تابعی از هر یک، یا کلیه متغیرهای x ، t ، و v معلوم باشد. البته برای هر حرکت معلوم یک دستگاه دینامیکی، تمام متغیرهای دینامیکی دستگاه (مانند x ، v ، F ، p ، T ، و غیره) که با دستگاه مربوط اند تابعی از t اند، یعنی هر یک از آنها در زمان معین t اندازه معینی دارند. لیکن در بسیاری حالتها متغیری دینامیکی مانند نیرو می تواند رابطه ای تابعی با x و یا v و یا هر ترکیبی از t ، v ، و x داشته باشد. به عنوان مثال - هرگاه جسمی از ارتفاع زیادی بالای سطح زمین رها شود، نیروی ثقل وارد بر آن به صورت تابعی از ارتفاع معلوم است. نیروی کندکننده اصطکاک وارد بر چنین جسمی با سرعت آن و چگالی هوا و در نتیجه به ارتفاع از سطح زمین وابسته خواهد بود و اگر اوضاع جوی متغیر باشد به t نیز بستگی خواهد داشت. اگر F به صورت $F(x, v, t)$ داده شده باشد، هرگاه $x(t)$ و $v(t)$ را در دست داشته باشیم، می توانیم این توابع را در تابع F منظور کنیم و F را فقط به صورت تابعی از t در آوریم. لیکن در حالت کلی تا وقتی که معادله (۱-۲) حل نشده باشد این کار عملی نیست و حتی در

این صورت ممکن است، تابع $F(t)$ برای حرکات مختلف ممکن ذره متفاوت باشد. در همه حال اگر F به صورت $F(x, v, t)$ داده شده باشد، (که در آن F ممکن است به یک یا تمام این متغیرها بستگی داشته باشد)، معادلهٔ (۱-۲) معادلهٔ دیفرانسیل معینی می شود که باید آن را حل کرد:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(x, \dot{x}, t). \quad (9-2)$$

این کلی ترین نوع معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم معمولی است و ما در این فصل راه حلها و کاربردهای آنها را در مسائل مکانیکی بررسی خواهیم کرد.

معادلهٔ (۹-۲) در مورد تمام حرکات ممکن ذره در اثر نیروی مشخص F به کار می رود. به طور کلی این حرکات بسیارند، زیرا معادلهٔ (۹-۲) فقط شتاب لحظه ای ذره را بر حسب مکان و سرعت ذره در آن لحظه معین می کند. اگر مکان و سرعت ذره ای را در زمان معینی بدانیم مکان آن را می توانیم در لحظه ای بعد (یا قبل) معلوم کنیم. همچنین با دانستن شتاب ذره می توانیم سرعت آن را در لحظه ای بعد پیدا کنیم، پس معادلهٔ (۹-۲) شتاب ذره را در مدت کوتاهی پیش از آن به ما می دهد. بدین ترتیب اگر مکان x و سرعت v ذره ای در هر زمان t معلوم باشد، می توان مکان و سرعت گذشته و یا آیندهٔ آن را مشخص کرد. هر جفت مقادیر x و v ، به یکی از حرکات ممکن ذره منجر می شود. زمان t را لحظهٔ اولیه می نامیم، اگر چه ممکن است هر یک از لحظات تاریخ ذره باشد و مقادیر x و v را در t شرایط اولیه می نامیم. به جای تعیین مقادیر اولیهٔ x و v ، می توانیم مقادیر اولیهٔ کمیت هایی را تصریح کنیم که از آنها بتوان x و v را به دست آورد. به عنوان مثال می توان x و اندازهٔ حرکت اولیهٔ $p = mv$ را معین کرد. در این صورت این شرایط اولیه همراه با معادلهٔ (۹-۲) نمایشگر مسئله ای کاملاً معین اند، که جواب آن باید تابع منحصر به فرد $x(t)$ باشد، که نمایندهٔ حرکت ذره در آن شرایط معین است.

نتایج حاصل از نظریهٔ ریاضی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم معمولی با آنچه ما از طبیعت مسئلهٔ فیزیکی انتظار داریم در توافق است. نظریهٔ ریاضی حکم می کند که معمولاً معادله ای به شکل (۹-۲) دارای جوابی یگانه و متصل به صورت $x(t)$ است به طوری که در هر لحظه انتخاب شدهٔ اولیهٔ t به ازای t ، مقادیر مشخص x و v را به ازای x و \dot{x} اختیار می کند. اینجا «معمولاً» یعنی «در کلیهٔ موارد فیزیکی» تا آنجا که به دانشجویان مبتدی مکانیک مربوط می شود.^۱ خصوصیات معادلات دیفرانسیلی مانند معادلهٔ (۹-۲) در بیشتر کتب مشروح دربارهٔ معادلات دیفرانسیل به دست آمده اند. می دانیم که هر مسئلهٔ فیزیکی همیشه باید جواب یگانه ای داشته باشد، بنابراین هر تابع نیروی $F(x, \dot{x}, t)$ که ممکن است در مسئله ای فیزیکی پیش آید، به ضرورت شرایط لازم برای مقادیری از x ، \dot{x} و t را که دارای ارزش فیزیکی باشند برقرار خواهد کرد. پس معمولاً احتیاجی نیست که در مورد وجود جواب نگران باشیم. لکن اغلب مسائل مکانیکی شامل نوعی ساده سازی وضع فیزیکی واقعی است و بنابراین ممکن است که مسئلهٔ فیزیکی را بیش از حد ساده کرد و یا آن را طوری

۱. برای بحث ریاضی دقیق دربارهٔ شرایط وجود جواب برای معادلهٔ (۹-۲) به کتاب زیر مراجعه کنید.

تغییر شکل داد که مسئلهٔ ریاضی حاصل جواب منحصر به فردی نداشته باشد. معمول فیزیکدانها در مکانیک و دیگر زمینه‌ها این است که با نادیده انگاشتن پرسشهایی که مربوط به حفظ دقت ریاضی می‌شوند کار خود را پیش ببرند. در مواردی که دچار اشکال می‌شویم، و این خوشبختانه بسیار نادر است، به شم فیزیکی خود مراجعه می‌کنیم و یا موارد بی‌دقتی خود را بررسی می‌کنیم تا سرچشمهٔ اشکال کشف شود. چنین روشی ممکن است برای ریاضی‌دانها ناخوشایند باشد، اما مناسب‌ترین و سریع‌ترین روش به کار بردن ریاضیات برای حل مسائل فیزیکی است. اگر چه فیزیکدانها می‌توانند روشهای غیردقیق به کار برند، با این حال باید با راه و رسم اعمال دقت بسیار در روشهای ریاضی که به کار می‌برند آشنایی داشته باشند.

قضیهٔ وجود جواب برای معادلهٔ (۲-۹) تضمین می‌کند که در تمام حالات عملی، یک جواب منحصر به فرد ریاضی برای این معادله وجود دارد. در بسیاری از حالتها، جواب دقیق را می‌توان از روشهای مقدماتی به دست آورد. در پاره‌ای از موارد یافتن جواب دقیق به روشهای ابتدایی میسر است. اغلب مسائل این کتاب از این نوع‌اند. خوشبختانه بسیاری از مهمترین مسائل مکانیکی در فیزیک را می‌توان بی‌اشکال بسیار حل کرد. در واقع یکی از دلایل اینکه بعضی از مسائل مهم تلقی می‌شوند این است که آنها را به سهولت می‌توان حل کرد. کار فیزیکدانها کشف و تحقیق قوانین فیزیک است و در تحقیق اعتبار این قوانین از راه تجربه آزادند حالتی را اختیار کنند که تحلیل ریاضی آنها دشوار نباشد. اما مهندسان به بختیاری آنها نیستند زیرا مسائل آنها به علت اهمیت عملی که دارند اختیار می‌شوند نه به سبب سهولت حل. در مهندسی و اغلب در فیزیک نیز، حالات بسیاری پیش می‌آید که یافتن جواب دقیق معادلهٔ (۲-۹) دشوار و یا غیرممکن است. در چنین مواردی روشهای متعددی برای پیدا کردن دست‌کم جواب تقریبی وجود دارد. خواننده می‌تواند برای بحث دربارهٔ چنین روشهایی به کتابهای معادلات دیفرانسیل مراجعه کند.^۱ از دیدگاه مکانیک نظری، مهم آن است که همیشه جوابی موجود است و می‌توانیم آن را با هر دقتی که بخواهیم به دست آوریم. توجه خود را به مثالهایی معطوف خواهیم کرد که با روشهای ساده قابل حل باشند.

۲-۳ نیروهای وابسته به زمان

اگر نیروی F به صورت تابعی از زمان در دست باشد، معادلهٔ حرکت (۲-۹) را می‌توانیم به روش زیر حل کنیم. معادلهٔ (۲-۹) را در dt ضرب می‌کنیم و پس از محاسبهٔ انتگرال آن از لحظهٔ اولیهٔ t_0 تا هر لحظهٔ بعدی (یا قبلی) t ، معادلهٔ (۲-۴) به دست می‌آید که در این حالت می‌توان آن را به صورت بالا نوشت:

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^t F(t) dt. \quad (10-2)$$

چون $F(t)$ تابع معلومی از t است، انتگرال سمت راست (دست‌کم از نظر اصولی) قابل محاسبه

1. W. E. Milne, *Numerical Calculus*. Princeton: Princeton University Press, 1949. (Chapter 5.)
H. Levy and E. A. Baggott, *Numerical Solutions of Differential Equations*. New York: Dover Publications, 1950.

است و در نتیجه سمت راست معادله تابعی از t (و t_0) است. v را از این معادله به دست می آوریم:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt. \quad (11-2)$$

حال معادله فوق را در dt ضرب می کنیم و باز انتگرال آن را از t_0 تا t حساب می کنیم،

$$x - x_0 = v_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t F(t) dt \right] dt. \quad (12-2)$$

به منظور اجتناب از ابهام می توانیم متغیر را در انتگرال اول t' ، و در انتگرال دوم t'' بنویسیم

$$x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t''} F(t') dt'. \quad (13-2)$$

معادله فوق، $x(t)$ را که مورد نظر بود، بر حسب دو انتگرال به دست می دهد که به شرط معلوم بودن $F(t)$ قابل محاسبه اند. یک انتگرال معین همیشه قابل محاسبه است. اگر نتوانیم فرمول گویایی برای انتگرال پیدا کنیم، لافل می توانیم آن را به وسیله روشهای عددی با هر دقتی که بخواهیم به دست آوریم. به همین دلیل، در بحث مسائل کلی (مانند فوق)، معمولاً همین که جواب به صورت یک یا چند انتگرال معین بیان شود، آن مسئله را حل شده می دانیم. در مسائل عملی ممکن است لازم باشد که انتگرالها برای به دست آوردن جواب نهایی به شکل قابل استفاده، حساب شوند.^۱

مسائلی که در آنها F به صورت تابعی از t داده شده است معمولاً زمانی پیش می آیند که ما در صدد یافتن رفتار دستگاهی مکانیکی هستیم که تحت تأثیر اثری خارجی قرار گرفته است. به عنوان مثال، حرکت الکترونی آزاد با بار $-e$ را در نظر می گیریم که در امتداد محور x تحت تأثیر میدان الکتریکی نوسان کننده ای قرار گرفته باشد:

$$E_x = E_0 \cos(\omega t + \theta). \quad (14-2)$$

نیروی وارد بر الکترون چنین است

$$F = -e E_x = -e E_0 \cos(\omega t + \theta). \quad (15-2)$$

معادله حرکت عبارت است از

$$m \frac{dv}{dt} = -e E_0 \cos(\omega t + \theta). \quad (16-2)$$

۱. خواننده ای که راجع به معادلات دیفرانسیل مطالعه ای داشته باشد ممکن است از ظاهر شدن سه ضریب ثابت در x ، v ، و t_0 در جواب (۱۳-۲) نگران شود، زیرا جواب کلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم باید فقط دو ضریب ثابت دلخواه داشته باشد. از نظر ریاضی جز دو ضریب مستقل در معادله (۱۳-۲) موجود نیست، یکی ضریب ثابت افزایشی شامل جملات t_0 ، $-v_0$ ، و x_0 و جمله حاصل از حد پایینی آخرین انتگرال، و ضریب ثابتی که مضربی از t است و شامل v_0 است و جمله ای حاصل از حد پایینی اولین انتگرال. از نظر فیزیکی می توان هر لحظه t_0 را برای شروع اختیار کرد و بنابراین فقط دو پارامتر x_0 و v_0 برای مشخص کردن یک حرکت از میان کلیه حرکات ممکن در اثر نیروی داده شده لازم خواهد بود.

معادله فوق را در dt ضرب می‌کنیم و انتگرال آن را به شرط $t = 0$ حساب می‌کنیم.

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{e E_0 \sin \theta}{m \omega} - \frac{e E_0}{m \omega} \sin(\omega t + \theta). \quad (17-2)$$

از انتگرال‌گیری مجدد نتیجه می‌شود:

$$x = x_0 - \frac{e E_0 \cos \theta}{m \omega^2} + \left(v_0 + \frac{e E_0 \sin \theta}{m \omega} \right) t + \frac{e E_0}{m \omega^2} \cos(\omega t + \theta). \quad (18-2)$$

اگر الکترون ابتدا در نقطه $x_0 = 0$ ساکن باشد، معادله فوق چنین می‌شود

$$x = -\frac{e E_0 \cos \theta}{m \omega^2} + \frac{e E_0 \sin \theta}{m \omega} t + \frac{e E_0}{m \omega^2} \cos(\omega t + \theta). \quad (19-2)$$

به‌عهده خواننده است که منشأ جمله ثابت و جمله خطی t در معادله (۱۹-۲) را به‌عنوان فاز میدان الکتریکی لحظه شروع به‌صورت فیزیکی بیان کند. از نظر فیزیکی توضیح دهید که چگونه جملات معادله (۱۹-۲) به E_0 ، m ، e و ω بستگی دارند؟ چرا جمله نوسانی معادله با نیروی وارد همفاز نیست؟

مسئله‌ای که در اینجا در نظر گرفته شده است از نظر ارتباطش با انتشار امواج رادیویی در یونسفر که چگالی الکترونیهای آزاد در آن بسیار است دارای اهمیت است. با هر موج رادیویی با سرعت زاویه‌ای ω میدانی الکتریکی همراه است، که می‌توان آن را با معادله (۱۴-۲) بیان داشت. جمله نوسانی در معادله (۱۸-۲) دارای همان سرعت زاویه‌ای ω است و از شرایط اولیه مستقل است. این نوسان همفاز الکترونیهای آزاد، کیفیت انتشار موج را تغییر می‌دهد، جمله غیرنوسانی در معادله (۱۸-۲) به شرایط اولیه و در نتیجه به حرکت جزئی هر یک از الکترونها به هنگام رسیدن موج بستگی دارد. این جملات نمی‌توانند در خصوصیت‌های انتشاری موج اثری داشته باشند، زیرا با سرعت زاویه‌ای نوسان نمی‌کنند. اگر چه ممکن است بر لبه پیشین موجی که اول می‌رسد اثر بگذارند. مشاهده می‌کنیم که قسمت نوسانی تغییر مکان x با نیروی وارد ناشی از میدان الکتریکی به اندازه 180° اختلاف فاز دارد. چون الکترون دارای بار منفی است، پلاریزگی الکتریکی حاصل با میدان الکتریکی به اندازه 180° اختلاف فاز دارد. نتیجه این است که ضریب ثابت دی‌الکتریک یونسفر کوچکتر از یک است (در یک دی‌الکتریک معمولی در فرکانسهای پایین، ذرات باردار در جهت نیروی الکتریکی وارد بر آنها تغییر مکان می‌دهند، و ضریب دی‌الکتریک بزرگتر از یک است.) چون سرعت نور

$$v = c(\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}, \quad (20-2)$$

که در آن $c = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$ ، ϵ/ϵ_0 و μ/μ_0 به ترتیب ضرایب دی‌الکتریک و ضریب قابلیت نفوذ مغناطیسی است و چون در اینجا $\mu = \mu_0$ ، سرعت (فاز) v امواج رادیویی در یونسفر از سرعت امواج الکترومغناطیسی در خلأ، c ، بزرگتر است. بنابراین امواجی که با زاویه‌ای وارد یونسفر می‌شوند، به سمت زمین بر می‌گردند. مشاهده می‌شود که این اثر با ω^2 نسبت معکوس دارد، بدین معنی که امواجی که فرکانس آنها به قدر کافی بالا باشد، به زمین باز نمی‌گردند و از یونسفر عبور می‌کنند.

برای ادامه این بحث به بیان ریاضی، اندک اطلاعاتی از فرضیه الکترومغناطیس کافی است. اگر ما فقط جمله نوسانی را در نظر بگیریم، گشتاور دو قطبی الکترونی که از حال تعادل خود جابه‌جا شده است، چنین است:

$$-e x = -\frac{e^2}{m \omega^2} E_0 \cos(\omega t + \theta) = -\frac{e^2}{m \omega^2} E_x \quad (21-2)$$

اگر در هر سانتی متر مکعب N الکترون وجود داشته باشد گشتاور دو قطبی کل بر حسب واحد حجم چنین است:

$$P_x = -\frac{N e^2}{m \omega^2} E_x. \quad (22-2)$$

جابه‌جایی الکتریکی D عبارت است از:

$$D_x = \epsilon_0 E_x + P_x = \epsilon_0 \left(1 - \frac{N e^2}{m \omega^2}\right) E_x. \quad (23-2)$$

چون ضریب دی‌الکتریک به صورت

$$D_x = \epsilon E_x, \quad (24-2)$$

تعریف شده است، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 - \frac{N e^2}{m \omega^2}, \quad (25-2)$$

و چون $\mu = \mu_0$ است، پس

$$v = c \left(1 - \frac{N e^2}{m \omega^2}\right)^{-1/2}. \quad (26-2)$$

۲-۴ نیروی میران وابسته به سرعت

نوع دیگری نیرو که حل آسان معادله (۲-۹) را میسر می‌کند زمانی پیش می‌آید که F فقط تابع v باشد:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v). \quad (27-2)$$

برای حل، طرفین معادله فوق را در $[m F(v)]^{-1} dt$ ضرب می‌کنیم و از t_0 تا t انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \frac{t - t_0}{m}. \quad (28-2)$$

هر گاه $F(v)$ معلوم باشد، انتگرال سمت چپ (لااقل از نظر اصول) قابل محاسبه است و نتیجه معادله‌ای است که شامل مجهول v است. اگر آن را بر حسب v حل کنیم (در بحث‌های کلی فرض می‌کنیم که این کار همیشه ممکن است)، معادله‌ای به صورت زیر خواهیم داشت:

$$v = \frac{dx}{dt} = \varphi \left(v_0, \frac{t - t_0}{m}\right). \quad (29-2)$$

۱. رجوع شود به مثلاً:

بنابراین داریم

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi \left(v_0, \frac{t - t_0}{m} \right) dt. \quad (30-2)$$

در مورد حرکت یک‌بعدی، نیروهای اصطکاکی تنها انواع نیروهای مهمی‌اند که به سرعت بستگی دارند. نیروی اصطکاک لغزشی یا غلتشی بین سطوح خشک و سخت، برای هر زوج سطح معلوم و نیروی قائم معلوم بین آنها تقریباً ثابت است و تنها بستگی آن به سرعت، این است که جهتش مخالف آن است. نیروی اصطکاک بین سطوح روغنکاری شده و یا بین یک جسم جامد و مایع و یا محیطهای گازی، به صورت پیچیده‌ای به سرعت بستگی دارد و تابع $F(v)$ بنا به معمول فقط به صورت جدولی خلاصه از داده‌های تجربی در دست است. در بعضی از حالات و برای سلسله سرعتهایی، نیروی اصطکاک با توان معینی از سرعت متناسب است:

$$F = (\pm) b v^n. \quad (31-2)$$

اگر n عددی فرد باشد، در معادله فوق باید علامت منفی اختیار شود. در غیر این صورت علامت باید طوری انتخاب شود که علامت نیرو مخالف علامت سرعت v باشد. نیروی اصطکاک همیشه در جهت مخالف سرعت است و بنابراین کار منفی انجام می‌دهد، بدین معنی که از جسم متحرک انرژی می‌گیرد. نیروی وابسته به سرعتی که با سرعت هم‌جهت باشد، به منزله یک منبع انرژی است و چنین حالاتی بسیار نیستند.

به عنوان مثال، قایقی را در نظر می‌گیریم که با سرعت اولیه v_0 حرکت می‌کند و در لحظه $t = 0$ در مکان $x_0 = 0$ قرار دارد موتورهای خود را خاموش می‌کند. فرض می‌کنیم که نیروی اصطکاک به وسیله معادله (۳۱-۲) و با فرض $n = 1$ داده شده باشد:

$$m \frac{dv}{dt} = -b v. \quad (32-2)$$

برای حل کردن معادله (۳۲-۲) از همان اعمالی که در بالا به آنها اشاره شد [از معادله (۲۷-۲) تا معادله (۳۰-۲)] پیروی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= -\frac{b}{m} t, \\ \ln \frac{v}{v_0} &= -\frac{b}{m} t, \\ v &= v_0 e^{-bt/m}. \end{aligned} \quad (33-2)$$

مشاهده می‌کنیم که هرگاه $t \rightarrow \infty$ ، $v \rightarrow 0$ و این بدیهی است. اما همچنین می‌بینیم که قایق هرگز در زمان متناهی کاملاً به حال سکون در نمی‌آید. مقدار x برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t v_0 e^{-bt/m} dt \\ &= \frac{mv_0}{b} (1 - e^{-bt/m}). \end{aligned} \quad (34-2)$$

وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، x به حد

$$x_s = \frac{m v_0}{b} \quad (۳۵-۲)$$

نزدیک می‌شود. بنابراین می‌توان فاصله معینی را مشخص کرد که قایق پس از پیمودن آن به حال سکون در می‌آید. اگر چه بنا به نتیجه فوق، معادله (۲-۳۳)، سرعت هرگز درست صفر نمی‌شود، لکن وقتی t به اندازه کافی بزرگ باشد، سرعت به اندازه‌های کوچک می‌شود که قایق عملاً ایستاده است. سرعت کوچک v_s را طوری اختیار می‌کنیم که وقتی $v < v_s$ است، حاضر باشیم قایق را ایستاده تلقی کنیم (مثلاً سرعت متوسط داده شده به قایقی لنگر انداخته، توسط امواجی که از کنار آن می‌گذرند). در این صورت می‌توانیم t_s ، زمان لازم برای توقف قایق، را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$v_s = v_0 e^{-bt_s/m}, \quad t_s = \frac{m}{b} \ln \frac{v_0}{v_s} \quad (۳۶-۲)$$

چون تابع لگاریتمی به کندی تغییر می‌کند، تا زمانی که v_s از v_0 خیلی کوچکتر است، زمان توقف t_s بستگی زیادی به اندازه دقیقی که برای v_s انتخاب می‌کنیم، ندارد. اغلب اگر جوابها را بر حسب t به صورت سری تیلور بسط دهیم آموزنده خواهد بود. اگر طرف راست معادلات (۲-۳۳) و (۲-۳۴) را به صورت سریهای نمایی بر حسب t بسط دهیم نتیجه می‌شود:

$$v = v_0 - \frac{b v_0}{m} t + \dots \quad (۳۷-۲)$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} \frac{b v_0}{m} t^2 + \dots \quad (۳۸-۲)$$

توجه کنید که دو جمله اول سریهای فوق درست همان فرمولهای حرکت ذره‌ای هستند که تحت تأثیر نیروی ثابت $-b v_0$ که همان مقدار اولیه نیروی اصطکاک در معادله (۲-۳۲) است، قرار گرفته باشد. و انتظاری جز این نباید داشت و این آزمون به نسبت خوبی برای صحت عملیات جبری است که به حل معادله (۲-۳۴) انجامید. بسط سریها، روش بسیار مفیدی برای به دست آوردن فرمولهای تقریبی ساده‌ای است که برای مدت زمان کوتاه t معتبرند.

خصوصیات حرکت یک جسم تحت تأثیر نیروی اصطکاکی چنانکه به وسیله معادله (۲-۳۱) داده شده است، به توان n بستگی دارد. به طور کلی بزرگ بودن n موجب کند شدن سریع حرکت در

۱. خواننده‌ای که تاکنون این کار را انجام نداده است بهتر است بسط تیلور چند تابع ساده زیر را به خاطر بسپارد:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{x^4}{2 \times 3 \times 4} + \dots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \times 3} x^3 + \dots$$

این سه سری وقتی که x کوچک است معتبرند و در به دست آوردن تقریب فرمولهای پیچیده بسیار مفیدند.

آغاز و توقف کند نهایی می شود و به عکس چنانکه می توان با رسم منحنیهای $F(v)$ برای مقادیر مختلف n مشاهده کرد، برای مقادیری از n که به اندازه کافی کوچک باشند، سرعت در مدت زمانی متناهی صفر می شود. برای مقادیر بزرگ n ، جسم نه تنها زمان، بلکه مسافتی بی نهایت بزرگ لازم دارد تا متوقف شود. البته این نتیجه با تجربه عادی مطابقت ندارد، و این نشان آن است که اگر چه در سرعتهای زیاد توان n بزرگ است ولی در سرعتهای کم باید کوچک شود. اغلب در مسائلی که شامل نیروی اصطکاک اند، $n = 1$ فرض می شود، به خصوص هنگامی که اصطکاک اثری ناچیز داشته باشد و به طور تقریب منظور گردد. علت اختیار $n = 1$ این است که موجب ساده شدن حل معادلات می شود و غالباً برای نیروهای اصطکاک کوچک، به شرط آنکه b به طرز صحیحی اختیار شده باشد، تقریب نسبتاً مناسبی است.

۲-۵ نیروی کنسرواتیو وابسته به مکان - انرژی پتانسیل

یکی از مهمترین انواع حرکت هنگامی است که نیروی F فقط تابعی از مختصه x باشد:

$$m \frac{dv}{dt} = F(x). \quad (2-39)$$

بنابراین طبق قضیه انرژی (۲-۸) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx. \quad (2-40)$$

انتگرال طرف چپ عبارت است از کار انجام شده توسط نیرو، هنگامی که ذره از نقطه x_0 به نقطه x حرکت می کند. اکنون انرژی پتانسیل $V(x)$ را، کار انجام شده توسط نیرو (هنگامی که ذره از نقطه x_0 به نقطه انتخاب شده معیاری x_0 می رود) تعریف می کنیم.

$$V(x) = \int_x^{x_0} F(x) dx = - \int_{x_0}^x F(x) dx. \quad (2-41)$$

به زودی معلوم می شود که چرا این کمیت را انرژی پتانسیل می نامیم. انتگرال معادله (۲-۴۰) را می توان بر حسب $V(x)$ به صورت زیر نوشت:

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = -V(x) + V(x_0). \quad (2-42)$$

با استفاده از معادله (۲-۴۲) می توان معادله (۲-۴۰) را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(x_0). \quad (2-43)$$

کمیت طرف راست معادله فوق فقط به شرایط اولیه بستگی دارد و بنابراین هنگام حرکت ثابت می ماند. این کمیت را انرژی کل E می گویند و این همان قانون بقای انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی است و چنانکه مشاهده می کنیم تنها زمانی معتبر است که نیرو فقط تابعی از x باشد:

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = T + V = E. \quad (2-44)$$

اگر v را از معادله فوق به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} [E - V(x)]^{1/2}. \quad (۴۵-۲)$$

تابع $x(t)$ از حل معادله زیر به دست می آید

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x [E - V(x)]^{-1/2} dx = t - t_0. \quad (۴۶-۲)$$

در این حالت، شرایط اولیه بر حسب ضرایب ثابت E و x_0 بیان شده اند.

بر حسب اینکه سرعت v در معادله (۴۵-۲) مثبت و یا منفی باشد، باید در به کار بردن معادله (۴۶-۲) و در محاسبه ریشه دوم تابع زیر علامت انتگرال دقت کرد که علامت مناسب اختیار شود. در حالتی که v در قسمتهایی از حرکت مثبت و در قسمتهای دیگر منفی است ممکن است لازم باشد که انتگرال گیری معادله (۴۶-۲) را برای هر قسمت، جداگانه انجام دهیم.

بنا به تعریف (۴۱-۲) می توان نیرو را بر حسب انرژی پتانسیل بیان کرد:

$$F = - \frac{dV}{dx}. \quad (۴۷-۲)$$

این معادله را می توان بیانگر مفهوم فیزیکی انرژی پتانسیل دانست. انرژی پتانسیل تابعی است که مشتق آن با علامت منفی برابر با نیروست. اثر تغییر مختصه نقطه معیار x_0 این است که به $V(x)$ ضریب ثابتی اضافه می شود. از آنجا که مشتق تابع $V(x)$ است که در معادلات دینامیکی به صورت نیرو وارد می شود، انتخاب نقطه معیار x_0 اهمیتی ندارد. همیشه می توان ضریب ثابتی به پتانسیل $V(x)$ اضافه کرد بی آنکه نتایج فیزیکی در اثر آن تغییر کند. (البته به شرط آنکه همان ضریب به E اضافه شود).

به عنوان مثال مسئله ذره ای را بررسی می کنیم که تحت تأثیر یک نیروی بازگرداننده خطی قرار گرفته باشد. مثلاً جرمی که به فنری وصل شده است:

$$F = -kx. \quad (۴۸-۲)$$

اگر $x_0 = 0$ فرض شود انرژی پتانسیل عبارت خواهد بود از

$$V(x) = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2. \quad (۴۹-۲)$$

در این حالت و با اختیار $t_0 = 0$ ، معادله (۴۶-۲) چنین می شود:

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \left(E - \frac{1}{2} kx^2 \right)^{-1/2} dx = t. \quad (۵۰-۲)$$

حال اگر تساویهای زیر را در نظر بگیریم

$$\sin \theta = x \sqrt{\frac{k}{\gamma E}}, \quad (51-2)$$

و

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (52-2)$$

خواهیم داشت

$$\sqrt{\frac{m}{\gamma}} \int_{x_0}^x \left(E - \frac{1}{\gamma} kx^2 \right)^{-1/2} dx = \frac{1}{\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \frac{1}{\omega} (\theta - \theta_0),$$

و طبق معادله (۵۰-۲)،

$$\theta = \omega t + \theta_0.$$

حال می توان x را از معادله (۵۱-۲) به دست آورد:

$$x = \sqrt{\frac{\gamma E}{k}} \sin \theta = A \sin (\omega t + \theta_0), \quad (53-2)$$

که در آن:

$$A = \sqrt{\frac{\gamma E}{k}}. \quad (54-2)$$

بنابراین مختصه x به طور هارمونیک بر حسب زمان با دامنه A و فرکانس $\omega/2\pi$ نوسان می کند. در اینجا شرایط اولیه توسط ضرایب A و θ_0 معین می شوند، که خود توسط معادلات زیر به E و x_0 مربوط می گردند:

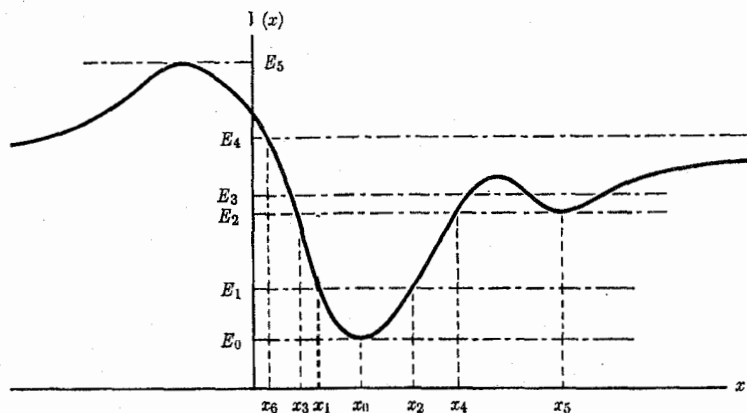
$$E = \frac{1}{\gamma} k A^2, \quad (55-2)$$

$$x_0 = A \sin \theta_0. \quad (56-2)$$

توجه کنید که در این مثال به هنگام استخراج ریشه دوم در معادله (۵۰-۲) مشکل علامت را با قرار دادن $(\cos \theta)^{-1}$ به جای $(1 - \sin^2 \theta)^{-1/2}$ ، هموار می کنیم و این جمله ای است که علامت آن را می توان با انتخاب θ در ربع مناسب دایره بنا به ضرورت مثبت یا منفی اختیار کرد.

تابعی از متغیر وابسته و مشتق اول آن را که برای تمام جوابهای یک معادله دیفرانسیل درجه دوم ثابت است انتگرال اول معادله می گویند. تابع $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$ را انتگرال انرژی معادله (۳۹-۲) می نامند. انتگرال معادلات حرکت یک دستگاه مکانیکی را همچنین ثابت حرکت می گویند. به طور کلی اگر بتوان به اندازه کافی انتگرالهای اول و ثابتهای حرکت پیدا کرد هر مسئله مکانیکی قابل حل خواهد بود.

حتی در حالاتی که انتگرال معادله (۴۶-۲) و یا معادله حاصل که از حل آن جواب صریح $x(t)$ به دست می آید، به سادگی قابل محاسبه نباشند، انتگرال انرژی (۴۴-۲) اطلاعات مفیدی در مورد



شکل ۱-۲ تابع انرژی پتانسیل برای حرکت یک بعدی.

جواب معادله می دهد. از معادله (۲-۴۵) مشاهده می شود که برای یک انرژی معلوم E ، حرکت ذره محدود به آن نواحی از محور x است که به ازای آنها $V(x) \leq E$ باشد. به علاوه سرعت با جذر تفاضل E و $V(x)$ متناسب است. بنابراین اگر منحنی $V(x)$ را بر حسب تغییرات x رسم کنیم، می توانیم بیان کیفی خوبی درباره انواع حرکات ممکن ذره عرضه کنیم. توجه کنید که برای تابع انرژی پتانسیل در شکل ۱-۲، کمترین انرژی ممکن E_0 است. ذره با این انرژی، فقط می تواند در نقطه x_0 ساکن باشد. و با انرژی اندکی بیشتر E_1 می تواند بین نقاط x_0 و x_1 حرکت کند. با نزدیک شدن به x_1 یا x_0 سرعت آن کاهش می یابد، و وقتی به نقطه x_1 یا x_0 که نقاط برگشت نامیده می شوند می رسد، توقف می کند و تغییر جهت می دهد. ذره با انرژی E_2 ، می تواند بین نقاط برگشت x_0 و x_2 نوسان کند و یا در نقطه x_0 ساکن بماند. با انرژی E_3 ، چهار نقطه برگشت وجود دارد و ذره می تواند در هر یک از دو چاه پتانسیل نوسان کند. با انرژی E_4 ، فقط یک نقطه برگشت وجود دارد، اگر ذره در ابتدا به سمت چپ در حرکت باشد، در نقطه x_0 به سمت راست بر می گردد و سرعت آن حین عبور از نقاط x_0 و x_1 در چاههای پتانسیل افزایش می یابد و روی تپه کم می شود. با انرژیهای بالاتر از E_5 هیچ نقطه برگشتی وجود ندارد و ذره فقط در یک جهت حرکت می کند و سرعت بر حسب عمق پتانسیل در هر نقطه متغیر است.

وقتی ذره ای نزدیک نقطه تعادل پایداری نوسان می کند، می توانیم جوابی تقریبی برای حرکت آن پیدا کنیم. فرض کنید نقطه $x = x_0$ یک نقطه حداقل (می نیمم) $V(x)$ است. بسط تیلور تابع $V(x)$ حول این نقطه عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= V(x_0) + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0} (x - x_0)^2 \\
 &+ \frac{1}{6} \left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{۵۷-۲}$$

ثابت $V(x_0)$ را می توان حذف کرد بی آنکه در نتایج فیزیکی اثری داشته باشد. چون x_0 یک نقطه حداقل است:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0} = 0, \quad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0} \geq 0. \quad (58-2)$$

با در نظر گرفتن

$$k = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0}, \quad (59-2)$$

$$x' = x - x_0, \quad (60-2)$$

تابع انرژی پتانسیل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$V(x') = \frac{1}{2} k x'^2 + \dots \quad (61-2)$$

برای مقادیر به اندازه کافی کوچک x' به شرط آنکه $k \neq 0$ ، می توان از جملاتی که به وسیله چند نقطه نمایش داده شده اند صرف نظر کرد، در این صورت معادله (۶۱-۲) به معادله (۴۹-۲) مبدل می شود. بنابراین برای نوسانهای کوچک حول هر نقطه حداقل تابع $V(x)$ بجز در حالت استثنایی $k = 0$ ، حرکت همان حرکت یک نوسانگر هارمونیک است که فرکانسش به وسیله معادلات (۵۲-۲) و (۵۹-۲) داده می شود.

نقطه ای که در آن تابع $V(x)$ دارای حداقلی است نقطه تعادل پایدار نامیده می شود. ذره ای که در چنین نقطه ای ساکن باشد، ساکن باقی می ماند. اگر کوچکترین تغییر مکانی پیدا کند، تحت تأثیر نیروی بازگرداننده ای قرار می گیرد که سعی می کند ذره را به مکان اولیه برگرداند و حول نقطه تعادل نوسان خواهد کرد. نقطه ای که در آن تابع $V(x)$ ، دارای حداکثری است، نقطه تعادل ناپایدار نامیده می شود. ذره ای که در چنین نقطه ای ساکن باشد از دیدگاه نظری می تواند ساکن باقی بماند، زیرا هیچگونه نیروی بدان وارد نمی شود. ولی اگر کوچکترین تغییر مکانی پیدا کند، نیروی وارد بر آن، آن را از نقطه تعادل ناپایدار دور می کند. ناحیه ای که در آن $V(x)$ ثابت است، ناحیه تعادل خنثی نامیده می شود، زیرا ذره می تواند تغییر مکان کوچکی پیدا کند بی آنکه تحت تأثیر نیروی بازگرداننده یا دافعی قرار گیرد. این نوع بحث کیفی بر اساس انتگرال انرژی، بسیار ساده و مفید است. این مثال را آن قدر مطالعه کنید تا آن را چنان خوب بفهمید که بتوانید با یک نظر کوتاه بر هر منحنی انرژی پتانسیل، انواع حرکات ممکن را تشخیص دهید.

ممکن است فقط قسمتی از نیروی وارد بر ذره ای را بتوان از تابع پتانسیل $V(x)$ به دست آورد. فرض کنید که F' بقیه نیروی وارد بر ذره باشد:

$$F = -\frac{dV}{dx} + F'. \quad (62-2)$$

در این حالت دیگر انرژی $(T + V)$ ثابت نیست. اگر F را از معادله (۶۲-۲) در معادله (۱-۲) جایگزین و سپس در dx/dt ضرب کنیم، پس از جابه جا کردن جملات خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = F'v. \quad (63-2)$$

میزان تغییرات مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی برابر است با توان داده شده توسط نیروی اضافی F' .

۶-۲ اجسام افتان

حرکت اجسام افتان، ساده‌ترین و فراوان‌ترین نوع حرکت یک‌بعدی است. در اینجا این نوع حرکت را به منظور روشن شدن اصولی که در بخشهای قبل مورد بحث قرار گرفت، مطرح می‌کنیم.

در صورتی که از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، جسمی که در نزدیکی سطح زمین فرو می‌افتد، تحت تأثیر نیروی ثابت زیر قرار می‌گیرد:

$$F = -mg, \quad (۶۴-۲)$$

که در آن، جهت مثبت به سمت بالا اختیار شده است. معادله حرکت چنین است:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg. \quad (۶۵-۲)$$

چون نیرویی ثابت را می‌توان تابعی از t ، v ، یا x دانست، جواب معادله فوق را می‌توان به روشهای مذکور در بخشهای ۲-۳، ۲-۴ و ۲-۵ به دست آورد. برای خواننده آموزنده خواهد بود اگر مسئله را به هر سه روش حل کند. نتیجه را پیش از این در فصل ۱ [معادلات (۱-۲۸) و (۱-۲۹)] به دست آورده‌ایم.

برای منظور کردن مقاومت هوا، می‌توان نیرویی اصطکاکی متناسب با v در نظر گرفت. بنابراین نیروی کل چنین است:

$$F = -mg - bv. \quad (۶۶-۲)$$

ضریب ثابت b به اندازه و شکل جسم و همچنین به چسبندگی هوا بستگی دارد. اکنون باید مسئله را به صورت حالتی از $F(v)$ پنداشت:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - bv. \quad (۶۷-۲)$$

فرض می‌کنیم در لحظه $t = 0$ ، $v = 0$ و همانند بخش ۲-۴ [معادله (۲-۲۸)] عمل می‌کنیم:

$$\int_0^v \frac{dv}{v + (mg/b)} = -\frac{bt}{m}. \quad (۶۸-۲)$$

انتگرال را حساب می‌کنیم و سپس v را به دست می‌آوریم:

$$v = -\frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m}). \quad (۶۹-۲)$$

تابع نمایی را به صورت یک سری نمایی بسط می‌دهیم و از این راه می‌توانیم برای مدت کوتاهی از سقوط، فرمول مفیدی به دست آوریم:

$$v = -gt + \frac{1}{2} \frac{bg}{m} t^2 + \dots \quad (۷۰-۲)$$

بنابراین برای مدتی کوتاه ($t \ll m/b$) به تقریب $v = -gt$ ، و می‌توان از اثر مقاومت هوا صرف‌نظر کرد. از معادله (۲-۶۹) می‌توان نتیجه گرفت که پس از زمانی طولانی:

$$v \doteq -\frac{mg}{b}, \quad t \gg \frac{m}{b}.$$

سرعت mg/b را سرعت نهایی^۱ جسم افتان مورد بحث گویند. سرعت جسم در $t=m/b$ به v/e سرعت نهایی خود می‌رسد. می‌توان از سرعت نهایی که از راه تجربه به دست آمده است برای پیدا کردن ضریب ثابت b استفاده کرد. اکنون از معادله (۲-۶۹) انتگرال می‌گیریم و $x=0$ اختیار می‌کنیم:

$$x = \frac{m^2 g}{b^2} \left(1 - \frac{bt}{m} - e^{-bt/m} \right). \quad (2-71)$$

به وسیله بسط تابع نمایی به سری نمایی خواهیم داشت:

$$x = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{6} \frac{bg}{m} t^3 + \dots \quad (2-72)$$

همانند معادله (۱-۲۹) اگر $t \ll m/b$ ، $x \doteq -\frac{1}{2} g t^2$ هنگامی که $t \gg m/b$:

$$x \doteq \left(\frac{m^2 g}{b^2} - \frac{mg}{b} t \right).$$

این نتیجه به سادگی بر حسب سرعت نهایی تفسیر می‌شود. وجود ضریب مثبت برای چیست؟ لازم به یادآوری است که می‌توانیم جواب سری (۲-۷۰) را مستقیماً از معادله دیفرانسیل (۲-۶۷)، بدون اینکه آن را به‌طور دقیق حل کنیم، به دست آوریم. ابتدا جمله‌ای را که شامل b است نادیده می‌گیریم و در نتیجه جواب عبارت است از

$$v^{(0)} = -gt.$$

با درج این نتیجه در جمله آخر معادله (۲-۶۷) و دوباره انتگرال‌گیری

$$v^{(1)} = -gt + \frac{1}{2} \frac{bg}{m} t^2.$$

این نتیجه توافق می‌کند با دو جمله اول در معادله (۲-۷۰). اگر $v = v^{(1)}$ را در جمله آخر معادله (۲-۶۷) گذاشته و انتگرال بگیریم تقریب بهتر $v^{(2)}$ ، از مرتبه b^2 ، به دست می‌آوریم، و چنین ادامه داده می‌شود. این روش تقریبهای پیاپی اغلب مفید است. برای حل معادله‌ای که شامل جمله کوچکی است که در تقریب مرتبه صفر قابل چشم‌پوشی است. روشی مشابه برای حل معادله‌ای جبری که شامل یک یا بیشتر از یک جمله کوچک است، با به کار گرفتن تقریبهای پیاپی، می‌توان به کار برد. تقریب بهتری برای اجسام سنگین و کوچک با سرعتهای نهایی بزرگ ممکن است به صورت زیر

باشد:

$$F = bv^2. \quad (2-73)$$

خواننده باید بتواند نشان دهد که با نیروی اصطکاک داده شده در (۷۳-۲) نتیجه (با اختیار $x_0 = v_0 = 0$ در $t_0 = 0$) عبارت است از:

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t\right)$$

$$\doteq \begin{cases} -gt, & \text{اگر } t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}}, \\ -\sqrt{\frac{mg}{b}}, & \text{اگر } t \gg \sqrt{\frac{m}{bg}}, \end{cases} \quad (74-2)$$

$$x = -\frac{m}{b} \ln \cosh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t\right)$$

$$\doteq \begin{cases} -\frac{1}{2} gt^2, & \text{اگر } t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}}, \\ \frac{m}{b} \ln 2 - \sqrt{\frac{mg}{b}} t, & \text{اگر } t \gg \sqrt{\frac{m}{bg}}. \end{cases} \quad (75-2)$$

اینجا نیز سرعتی نهایی موجود است که این بار برابر $(mg/b)^{1/2}$ است. همیشه سرعت نهایی را می‌توان سرعتی دانست که در آن نیروی اصطکاک با نیروی ثقل مساوی می‌شود، و هنگامی موجود است که نیروی اصطکاک در سرعت‌های زیاد به اندازه کافی بزرگ می‌شود.

در حالتی که اجسام از ارتفاع زیادی فرو می‌افتند، باید تغییر نیروی ثقل در اثر ارتفاع را در حساب آورد. در این حالت از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم و x را از مرکز زمین اندازه می‌گیریم. حال اگر M جرم زمین و m جرم افتان باشد:

$$F = -\frac{mMG}{x^2}, \quad (76-2)$$

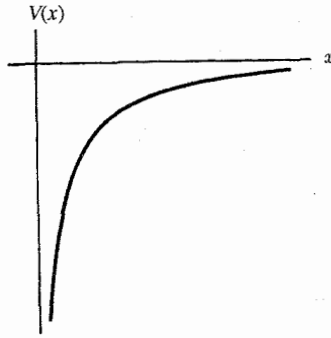
و

$$V(x) = -\int_{\infty}^x F dx = -\frac{mMG}{x}, \quad (77-2)$$

که در آن به منظور اجتناب از ظهور جمله ثابتی در $V(x)$ ، $x_g = \infty$ اختیار شده است. معادله (۷۵-۲) چنین می‌شود:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{mMG}{x} \right)^{1/2}}. \quad (78-2)$$

که در آن علامت مثبت مربوط به حرکت صعودی و علامت منفی مربوط به حرکت نزولی است.



شکل ۲-۲ نمودار تابع $V(x) = - (mMG/x)$

تابع $V(x)$ در شکل ۲-۲ رسم شده است. بر حسب اینکه E مثبت و یا منفی باشد دو نوع حرکت موجود است. وقتی که E مثبت است، نقطه برگشتی وجود ندارد و اگر جسم ابتدا به سمت بالا در حرکت باشد، تا ابد حرکت خود را به سمت بالا ادامه خواهد داد، و سرعت آن کاهش می یابد و به سرعت حدی زیر نزدیک می شود:

$$v_l = \frac{\sqrt{E}}{m} \quad (۷۹-۲)$$

وقتی E منفی است، نقطه برگشتی در ارتفاع

$$x_T = \frac{mMG}{-E} \quad (۸۰-۲)$$

وجود دارد. اگر جسم به سمت بالا در حرکت باشد، در نقطه x_T متوقف می شود و به سمت زمین برمی گردد. حالت ممیز میان این دو نوع حرکت، زمانی است که مکان و سرعت اولیه جسم چنان باشند که $E = 0$ شود. در این حالت نقطه برگشت در بی نهایت خواهد بود و جسم تا ابد به سمت بالا حرکت می کند و سرعتش به سرعت حدی $v_l = 0$ نزدیک می شود. اگر $E = 0$ باشد، سرعت در هر ارتفاع x ، چنین خواهد بود:

$$v_e = \sqrt{\frac{2MG}{x}} \quad (۸۱-۲)$$

این را سرعت فرار^۱ جسم در ارتفاع x از مرکز زمین گویند، زیرا جسمی که در ارتفاع x با سرعت v_e حرکت می کند، درست به اندازه ای انرژی دارد که تا ابد به سمت بالا حرکت کند (به شرط آنکه مقاومت هوا موجود نباشد).

برای به دست آوردن $x(t)$ ، باید انتگرال زیر را حساب کرد:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm(E + (mMG/x))^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t, \quad (۸۲-۲)$$

که در آن x ارتفاع در $t = 0$ است. وقتی که E منفی است باید برای حل معادله از تغییر متغیر زیر استفاده کرد:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{-Ex}{mMG}} \quad (۸۳-۲)$$

در این صورت معادله (۸۲-۲) چنین می شود:

$$\frac{mMG}{(-E)^{3/2}} \int_0^\theta \gamma \cos^2 \theta d\theta = \sqrt{\frac{\gamma}{m}} t. \quad (۸۴-۲)$$

(برای تابع زیر علامت انتگرال، علامت مثبت اختیار می کنیم تا با افزایش t ، θ نیز افزایش یابد). بی آنکه از کلیت کار کم شود، می توان x را نقطه عطف x_T اختیار کرد، زیرا به شرط آنکه $E < 0$ ، هیچ نیرویی بجز نیروی ثقل بر جسم وارد نشود، جسم در زمانی، گذشته یا آینده، از نقطه x_T عبور خواهد کرد. در این صورت $\theta_0 = 0$.

$$\frac{mMG}{(-E)^{3/2}} (\theta + \sin \theta \cos \theta) = \sqrt{\frac{\gamma}{m}} t,$$

یا

$$\theta + \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \theta = \sqrt{\frac{\gamma MG}{x_T^3}} t, \quad (۸۵-۲)$$

و

$$x = x_T \cos^2 \theta. \quad (۸۶-۲)$$

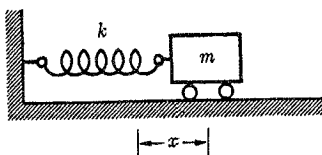
$x(t)$ را نمی توان به طور گویا از این دو معادله به دست آورد، ولی جواب عددی آن را می توان با انتخاب رشته مقادیری برای θ و یافتن مقادیر x و t مربوط به آنها از معادلات (۸۵-۲) و (۸۶-۲) به دست آورد. قسمتی از حرکت که برای آن x از شعاع زمین کوچکتر است البته به درستی بیان نمی شود، زیرا در معادله (۷۶-۲) فرض بر این است که تمام جرم زمین در نقطه $x = 0$ متمرکز است (صرف نظر از اینکه، نیروهایی که در موقع برخورد جسم با زمین بر جسم وارد می شوند، از معادله حرکت حذف شده اند).

به همین ترتیب در حالتی که E مثبت و یا صفر باشد می توان مسئله را حل کرد.

۷-۲ نوسانگر هارمونیک ساده

نوسانگر هارمونیک یا خطی مهمترین مسئله در حرکت یک بعدی است که خوشبختانه حل آن نیز ساده است. ساده ترین مثال، حرکت جرمی است که به فنری با ضریب ثابت k وصل شده است. اگر x از حالت آزاد فتر اندازه گیری شود، فتر نیروی بازگرداننده

$$F = -kx. \quad (۸۷-۲)$$



شکل ۲-۳ نمونه یک نوسانگر هارمونیک ساده.

را به جسم وارد می‌کند. انرژی پتانسیل مربوط به این نیرو عبارت است از:

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (۸۸-۲)$$

اگر فرض کنیم که نیروی دیگری وارد نشود، معادله حرکت چنین است:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \quad (۸۹-۲)$$

معادله فوق نوسانگر هارمونیک آزاد را تشریح می‌کند و جواب آن در بخش (۵-۲) به دست آمد. حرکت آن نوسانی ساده و سینوسی حول نقطه تعادل است. در تمام حالات فیزیکی نیروی اصطکاکی اعمال می‌شود، اگر چه اغلب بسیار کوچک است. می‌توان نیروی اصطکاک را با سرعت متناسب فرض کرد و این در بسیاری از حالات (به خصوص هنگامی که اصطکاک کوچک است) تقریب خوبی است. از آنجا که تنها نیروی اصطکاکی است که مسئله با آن به راحتی قابل حل است، ما توجه خود را به این حالت محدود می‌کنیم. اگر معادله (۲-۳۱) را با $n = 1$ به کار ببریم، معادله حرکت چنین می‌شود:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (۹۰-۲)$$

معادله فوق، نوسانگر هارمونیک میرا را تشریح می‌کند. چنانکه در آینده نشان خواهیم داد، حرکت آن دست‌کم برای میرایی کوچکی، نوسانی سینوسی است که دامنه آن به تدریج کم می‌شود. اگر نوسانگر تحت تأثیر نیروی اضافی وارد $F(t)$ قرار گیرد، حرکت آن به وسیله معادله زیر بیان خواهد شد.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t). \quad (۹۱-۲)$$

اگر $F(t)$ نیرویی باشد که به طور سینوسی تغییر کند، معادله (۲-۹۱) به یک پدیده همسازی^۱ منجر می‌شود، یعنی وقتی که فرکانس نیروی $F(t)$ با فرکانس طبیعی نوسانگر آزاد مساوی شود، دامنه نوسان خیلی بزرگتر می‌گردد.

اهمیت مسئله نوسانگر هارمونیک در این است که معادلات همانند معادلات (۲-۸۹) تا (۲-۹۱) در مسائل بسیار متنوع فیزیکی ظاهر می‌شوند. تقریباً در تمام حرکت‌های یک بعدی که تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ در آنها دارای یک یا چند حداقل است، حرکت ذره برای نوسانهای کوچک حول نقطه حداقل از معادله (۲-۸۹) پیروی می‌کند همان‌طور که در بخش (۵-۲) نشان دادیم.

وقتی جسم جامدی تغییر شکل پیدا می‌کند، به شرط آنکه تغییر شکل بیش از حد زیاد نباشد، جسم با نیرویی متناسب با مقدار تغییر شکل، در مقابل تغییر شکل مقاومت می‌کند. این بیان را قانون هوک^۱ می‌نامند. این قانون از این حقیقت ناشی می‌شود که هر جسم جامد تغییر شکل نیافتاده‌ای دارای حداقل انرژی پتانسیل است و انرژی پتانسیل را می‌توان بر حسب مختصه‌ای که تغییر شکل را تشریح می‌کند، بنابر سری تیلور بسط داد. اگر جسم جامدی بیش از حد معینی که حد الاستیک (کشواری) نامیده می‌شود، تغییر شکل یابد، تغییر شکل آن همیشه باقی خواهد ماند، بدین معنی که سازه آن طوری تغییر می‌کند که حالت تغییر شکل نیافتاده آن برای حداقل انرژی پتانسیل، تغییر می‌کند. در اکثر حالات به این نتیجه می‌رسیم که جملاتی از سری (۲-۵۷)، که توانهای بالاتر دارند تقریباً تا حد الاستیک (کشواری) قابل صرف نظر کردن‌اند و بنابرین قانون هوک، تقریباً تا حد الاستیک (کشواری) برقرار است. وقتی از این حد بگذریم شار پلاستیک (ناکشواری) ایجاد می‌شود. نیروها به‌طور پیچیده‌ای، نه تنها به شکل ماده بلکه به سرعت تغییر شکل یافتن ماده و حتی تاریخچه گذشته ماده بستگی پیدا می‌کنند، به طوری که دیگر نمی‌توان نیروها را بر حسب تابع انرژی پتانسیل مشخص کرد.

بنابراین هر مسئله‌ای که شامل ارتعاشهای مکانیکی باشد در دامنه‌های کوچک ارتعاش، یعنی تا هنگامی که از حد الاستیک (کشواری) ماده تجاوز نکرده باشیم عملاً به مسئله نوسانگر هارمونیک منجر می‌شود. حرکات ریسمانها و غشاهای کشیده شده و حرکت ارتعاشات صوتی در گاز محبوس و یا در جسم جامد، به تعدادی وجوه معروف به وجوه طبیعی نوسان منجر می‌شود و هر وجه از بسیاری جهات در حکم یک نوسانگر هارمونیک مستقل است. مداری الکتریکی که شامل خودالقایی L و مقاومت R و خازن C باشد که به‌طور سری به هم وصل شده‌اند و تحت تأثیر یک نیروی الکتروموتوری $E(t)$ قرار گرفته باشد، با معادله زیر در توافق است:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t), \quad (2-92)$$

که در آن q بار خازن و dq/dt جریان مدار است. این معادله از نظر شکل شبیه معادله (۲-۹۱) است. در گذشته مسائل مربوط به مدارهای الکتریکی اغلب از راه تشابه با مسائل مکانیکی نظیر آنها حل می‌شد ولی امروزه این وضع اغلب معکوس شده است، و اغلب مهندسان مکانیک و صوت می‌توانند از روشهای ساده و مؤثری استفاده کنند که مهندسان برق برای حل مسائل ارتعاشات، به دست آورده‌اند. و نظریه نوسانات الکتریکی در یک خط انتقال و یا در یک حفره، از نظر ریاضی مشابه است با مسئله ریسمان مرتعش و یا حفره هوای همساز. نظریه مکانیک کوانتومی اتم را می‌توان به صورتی در آورد که از نظر ریاضی با نظریه دستگاهی از نوسانگرهای هارمونیک یکسان باشد.

۲-۸ معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

معادلات (۲-۸۹) تا (۲-۹۱) مثالهایی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی‌اند. مرتبه یک معادله دیفرانسیل، مرتبه بزرگترین مشتقی است که در آن معادله ظاهر می‌شود. اکثر معادلات مکانیکی از

مرتبه دوم اند. (چرا؟) معادله دیفرانسیل خطی معادله‌ای است که در آن درجه متغیر تابع (در این حالت x) و مشتقهای آن از یک بیشتر نباشد. بنابراین عمومی‌ترین نوع معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه n م چنین است:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t) x = b(t). \quad (93-2)$$

اگر $b(t) = 0$ باشد معادله را همگن گویند، در غیر این صورت غیر همگن نامیده می‌شود. اهمیت معادلات خطی در این است که روشهای عمومی ساده‌ای برای حل آنها وجود دارد، به خصوص هنگامی که ضرایب a_0, a_1, \dots, a_n همانند ضرایب معادلات (۲-۸۹) تا (۲-۹۱) ثابت باشند. در این بخش مسئله نوسانگر هارمونیک آزاد [معادله (۲-۸۹)] را حل می‌کنیم و در ضمن روشی کلی برای حل معادلات دیفرانسیل همگن خطی با ضرایب ثابت به دست می‌آوریم. در بخش ۲-۹ این روش در مورد معادله نوسانگر هارمونیک میرا (۲-۹۰)، به کار برده می‌شود. در بخش ۲-۱۰ رفتار یک نوسانگر هارمونیک را بررسی خواهیم کرد که تحت تأثیر نیروی نوسانی سینوسی شکلی قرار گرفته باشد. در بخش ۲-۱۱ قضیه‌ای را به دست می‌آوریم که اساس حل معادلات (۲-۹۱) با هر نوع نیروی $F(t)$ است و روشهای حل نیز به طور خلاصه مورد بحث قرار می‌گیرند.

جواب معادله (۲-۸۹) را که در بخش ۲-۵ به دست آوردیم، اینک به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \theta), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}. \quad (94-2)$$

این جواب به دو ضریب «دلخواه» A و θ بستگی دارد. آنها را دلخواه می‌نامند، زیرا هر مقداری به آنها داده شود، جواب (۲-۹۴) در معادله (۲-۸۹) صدق خواهد کرد. ولی در یک مسئله فیزیکی دلخواه نیستند و به شرایط اولیه بستگی دارند. می‌توان نشان داد که جواب «عام» هر معادله دیفرانسیل مرتبه دومی به دو ضریب دلخواه بستگی دارد. مقصود این است که جواب معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x = x(t; C_1, C_2), \quad (95-2)$$

به طوری که به ازای هر مقدار C_1 و C_2 یا به ازای هر مقدار از سلسله مقادیر مشخصی، تابع $x(t; C_1, C_2)$ در معادله صدق کند و به علاوه تابع $x(t; C_1, C_2)$ عملاً کلیه جوابهای معادله را به ازای مقادیری از C_1 و C_2 شامل است.^۱ اگر بتوانیم جوابی شامل دو ضریب دلخواه به دست آوریم که در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم صدق کند، می‌توانیم مطمئن باشیم که عملاً شامل تمام جوابها است. روشهای حل معادلات دیفرانسیلی که در بخش پیشین بررسی گردیدند، همه مستقیماً به جوابی منجر می‌شدند که به شرایط اولیه مسئله فیزیکی مربوط می‌شد. در این بخش و بخشهای آینده این فصل، روشهایی را بررسی خواهیم کرد که به جوابی عام، شامل دو ضریب دلخواه منجر گردد سپس باید مقادیر مناسبی به این ضرایب دلخواه نسبت داد که با شرایط اولیه

۱. تنها موارد «استثنا» پاره‌ای جوابهای «خاص» اند که در ناحیه‌هایی پدید می‌آیند که شرایط ریاضی برای یک جواب یگانه، (بخش ۲-۲) برقرار نیستند.

مسئله فیزیکی سازگار باشند. این واقعیت که یک جواب با دو ضریب دلخواه جواب عام مسئله است، ضامن آن است که ما همواره می توانیم با انتخاب مناسب ثابتها، شرایط اولیه را برقرار کنیم. حال دو قضیه در مورد معادلات دیفرانسیل همگن خطی بیان می داریم.

قضیه ۱. اگر $x = x_1(t)$ جوابی از یک معادله دیفرانسیل همگن خطی، و C ضریب ثابتی باشد، در این صورت $x = Cx_1(t)$ نیز یک جواب است.

قضیه ۲. اگر $x = x_1(t)$ و $x = x_2(t)$ جوابهایی از یک معادله دیفرانسیل همگن خطی باشند، در این صورت $x = x_1(t) + x_2(t)$ نیز یک جواب است.

این قضایا را فقط در مورد معادله مرتبه دوم ثابت می کنیم، زیرا معادلات مکانیکی بنا به معمول از این نوع اند:

$$a_2(t) \frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = 0. \quad (96-2)$$

فرض کنید که $x = x_1(t)$ در معادله (۹۶-۲) صدق کند. در این صورت

$$a_2(t) \frac{d^2(Cx_1)}{dt^2} + a_1(t) \frac{d(Cx_1)}{dt} + a_0(t)(Cx_1) \\ = C \left[a_2(t) \frac{d^2x_1}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx_1}{dt} + a_0(t)x_1 \right] = 0,$$

بنابراین $x = Cx_1(t)$ نیز در معادله (۹۶-۲) صدق می کند. اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در معادله (۹۶-۲) صدق کنند، در این صورت

$$a_2(t) \frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} + a_1(t) \frac{d(x_1+x_2)}{dt} + a_0(t)(x_1+x_2) \\ = \left[a_2(t) \frac{d^2x_1}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx_1}{dt} + a_0(t)x_1 \right] + \left[a_2(t) \frac{d^2x_2}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx_2}{dt} + a_0(t)x_2 \right] = 0.$$

بنابراین $x = x_1(t) + x_2(t)$ نیز در معادله (۹۶-۲) صدق می کند. به این ترتیب مسئله یافتن جواب عام معادله (۹۶-۲) منجر می شود به مسئله یافتن دو جواب مستقل «خاص» $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ، زیرا در این صورت قضایای ۱ و ۲ ضامن آن اند که

$$x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \quad (97-2)$$

نیز یک جواب باشد. از آنجا که، این جواب دو ضریب دلخواه دارد، باید جواب عام معادله باشد. شرط مستقل بودن $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در این مورد این است که یکی از آنها مضربی از دیگری نباشد. اگر $x_1(t)$ مضرب ثابتی از $x_2(t)$ باشد، معادله (۹۷-۲) در واقع فقط شامل یک ضریب ثابت خواهد بود. طرف راست معادله (۹۷-۲) را یک ترکیب خطی از x_1 و x_2 گویند.

برای معادلاتی مانند معادلات (۲-۸۹) و (۲-۹۰) که ضرایب آنها ثابت اند، همواره جوابی به صورت $x = e^{Pt}$ وجود دارد. برای نشان دادن این مطلب فرض کنید که در معادله (۲-۹۶)، ضرایب

a_1, a_2 و a_3 ثابت باشند. با جایگزین کردن

$$x = e^{pt}, \quad \frac{dx}{dt} = p e^{pt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = p^2 e^{pt}. \quad (98-2)$$

نتیجه می شود

$$(a_2 p^2 + a_1 p + a_3) e^{pt} = 0. \quad (99-2)$$

با حذف e^{pt} ، معادله جبری درجه دومی بر حسب p به دست می آید. به طور کلی چنین معادله ای دو ریشه دارد. اگر ریشه ها از هم متمایز باشند، دو تابع مستقل e^{pt} به دست می آید که در معادله (۹۶-۲) صدق می کنند و مسئله حل شده است. اگر دو ریشه p مساوی باشند، فقط یک جواب به دست آورده ایم، اما همان طور که در بخش بعد نشان خواهیم داد تابع

$$x = t e^{pt} \quad (100-2)$$

نیز در معادله دیفرانسیل صدق می کند. معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت را نیز می توان با این روش حل کرد.

حال این روش را در مورد معادله (۸۹-۲) به کار می بریم. با جایگزین کردن (۹۸-۲) نتیجه

می شود

$$m p^2 + k = 0, \quad (101-2)$$

که جوابش عبارت است از

$$p = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (102-2)$$

در این صورت جواب عام چنین است،

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (103-2)$$

برای تفسیر این نتیجه، به خاطر آورید که

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (104-2)$$

اگر اعداد مختلط x را به عنوان جوابهای معادله دیفرانسیل قبول داشته باشیم، در این صورت برای اینکه معادله (۱۰۳-۲) جواب عام معادله دیفرانسیل باشد، باید ضرایب C_1 و C_2 نیز مختلط باشند. جواب مسئله فیزیکی باید حقیقی باشد، بنابراین C_1 و C_2 را باید طوری اختیار کرد که x حقیقی شود. حاصل جمع دو عدد مختلط هنگامی عددی حقیقی است که یکی، مزدوج دیگری باشد. اگر

$$C = a + ib, \quad (105-2)$$

و

$$C^* = a - ib, \quad (106-2)$$

بنابراین

$$C + C^* = 2a,$$

$$C - C^* = 2ib. \quad (107-2)$$

اما $e^{i\omega_0 t}$ مزدوج $e^{-i\omega_0 t}$ است، چنانکه اگر $C_1 = C$ و $C_2 = C^*$ اختیار کنیم، x حقیقی خواهد بود:

$$x = C e^{i\omega_0 t} + C^* e^{-i\omega_0 t}. \quad (108-2)$$

می‌توان x را با استفاده از معادلات (۲-۱۰۴)، (۲-۱۰۵)، و (۲-۱۰۶) به دست آورد، ولی اگر از نمایش قطبی عدد مختلط استفاده کنیم عملیات جبری ساده‌تر خواهند شد:

$$C = a + ib = r e^{i\theta}, \quad (109-2)$$

$$C^* = a - ib = r e^{-i\theta}, \quad (110-2)$$

که در آن

$$r = (a^2 + b^2)^{1/2}, \quad \tan \theta = \frac{b}{a}, \quad (111-2)$$

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta. \quad (112-2)$$

خواننده باید تحقیق کند که این معادلات به وسیله عملیات جبری از معادله (۲-۱۰۴) نتیجه می‌شوند. اگر C نماینده نقطه‌ای در صفحه مختلط باشد، در این صورت a و b مختصات دکارتی و r و θ مختصات قطبی آن‌اند. اگر از نمایش قطبی C استفاده کنیم (با اختیار $r = \frac{1}{4}$)، معادله (۲-۱۰۸) چنین می‌شود:

$$x = \frac{1}{4} A e^{i(\omega_0 t + \theta)} + \frac{1}{4} A e^{-i(\omega_0 t + \theta)}$$

$$= A \cos(\omega_0 t + \theta), \quad (113-2)$$

این جواب حقیقی و عام معادله (۲-۸۹) است و فقط به اندازه یک انتقال $\pi/2$ در ضریب فاز θ ، با جواب (۲-۹۴) اختلاف دارد.

اگر $B_1 = A \cos \theta$ و $B_2 = -A \sin \theta$ اختیار کنیم، می‌توانیم جواب را به شکل دیگری نیز بنویسیم:

$$x = B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t. \quad (114-2)$$

ضرایب A و θ یا ضرایب B_1 و B_2 را باید بر حسب مقادیر اولیه x_0 و v_0 در $t = 0$ ، با قرار دادن

$$x_0 = A \cos \theta = B_1, \quad (115-2)$$

$$v_0 = -\omega_0 A \sin \theta = \omega_0 B_2. \quad (116-2)$$

به دست آورد. جوابها به سادگی به دست خواهند آمد:

$$A = \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \right)^{1/2}, \quad (117-2)$$

$$\tan \theta = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}, \quad (118-2)$$

یا

$$B_1 = x_0, \quad (119-2)$$

$$B_2 = \frac{v_0}{\omega_0}. \quad (120-2)$$

راه دیگری برای حل معادله (۲-۱۰۳) این است که چون معادله (۲-۸۹) فقط دو ضریب حقیقی دارد، یک تابع مختلط فقط هنگامی می تواند در آن صدق کند که قسمت‌های حقیقی و موهومی آن هر دو، به طور جداگانه در آن صدق کنند. (اثبات این مطلب با جایگزین کردن $x = u + iw$ و کمی عملیات جبری میسر است.) بنابراین اگر جوابی عبارت باشد از (فرض می کنیم $r = A$)

$$x = C e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \theta)}$$

$$= A \cos(\omega t + \theta) + iA \sin(\omega t + \theta), \quad (2-121)$$

در این صورت قسمت‌های حقیقی و موهومی این جواب نیز باید هر دو به طور جداگانه جواب معادله باشند، و ما جواب (۲-۱۱۳) و یا جواب (۲-۹۴) را خواهیم داشت. جواب‌های معادلات خطی را می توان به همین طریق به دست آورد و هر نوع عملیات جبری دلخواه در شکل مختلط (تا زمانی که دو عدد مختلط را در هم ضرب نکنیم) روی آنها انجام داد. البته باید به خاطر سپرد که در هر مرحله از عملیات، فقط قسمت حقیقی یا فقط قسمت موهومی مورد نظر است. این روش در حل مسائلی که شامل نوسانهای هارمونیک اند، بسیار مفید است و آن را در بخش ۲-۱۰ مورد استفاده قرار خواهیم داد. اغلب نمایش تابع سینوسی به صورت تابع مختلط نمایی بسیار مناسب است:

$$\cos \theta = e^{i\theta} \text{ قسمت حقیقی} = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{2}, \quad (2-122)$$

$$\sin \theta = e^{i\theta} \text{ قسمت مجازی} = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i}. \quad (2-123)$$

از نظر عملیات جبری، به کار بردن توابع نمایی ساده تر از توابع سینوسی و کوسینوسی اند. خواننده پی خواهد برد به اینکه روابط (۲-۱۲۲)، (۲-۱۲۳)، و (۲-۱۰۴) در به دست آوردن فرمولهای مثلثاتی مفیدند. سریهای نمایی سینوسی و کسینوسی را می توان با بسط $e^{i\theta}$ به صورت سری نمایی و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی آن به دست آورد. قاعده مثلثاتی $\sin(A+B)$ و $\cos(A+B)$ را می توان به سادگی از قاعده جبری برای جمع نماها به دست آورد. به همین ترتیب مثالهای دیگری نیز می توان ذکر کرد.

۲-۹ نوسانگر هارمونیک میرا

معادله حرکت ذره‌ای که تحت تأثیر یک نیروی خطی بازگرداننده و یک نیروی اصطکاک متناسب با سرعت آن، قرار گرفته است [معادله (۲-۹۰)] عبارت است از

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (2-124)$$

که در آن نقاط روی x نماینده مشتق نسبت به زمان است. با استفاده از روش بخش ۲-۸، با جایگذاری (۲-۹۸) در معادله فوق خواهیم داشت:

$$mp^2 + bp + k = 0. \quad (2-125)$$

جواب معادله فوق عبارت است از

$$p = -\frac{b}{2m} \pm \left[\left(\frac{b}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right]^{1/2}. \quad (2-126)$$

سه حالت زیر را از هم تمیز می‌دهیم: (الف) $k/m > (b/2m)^2$ ، (ب) $k/m < (b/2m)^2$ ، و (پ) $k/m = (b/2m)^2$.

در حالت (الف) تساویهای زیر را به کار می‌بریم:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (127-2)$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}, \quad (128-2)$$

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}, \quad (129-2)$$

که در آن γ ضریب میرایی و $\omega_0/2\pi$ فرکانس طبیعی نوسانگر غیر میرا است. اکنون دو جواب برای p وجود دارد:

$$p = -\gamma \pm i\omega_1. \quad (130-2)$$

که در آن صورت جواب عام معادله دیفرانسیل به صورت زیر خواهد بود:

$$x = C_1 e^{-\gamma t + i\omega_1 t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega_1 t}. \quad (131-2)$$

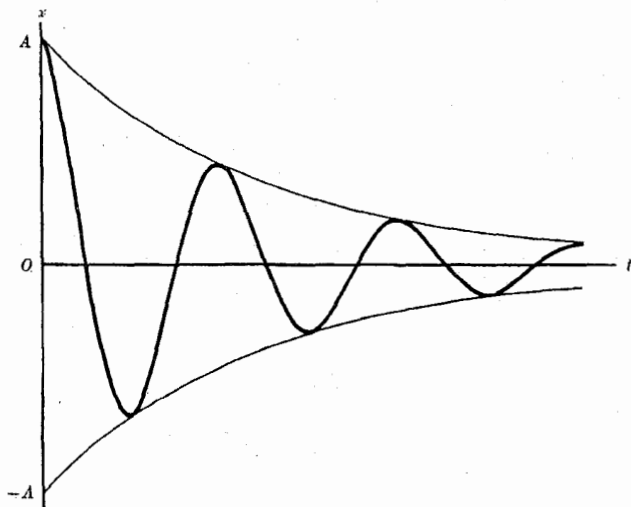
اگر

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} A e^{i\theta}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} A e^{-i\theta}, \quad (132-2)$$

نتیجه می‌شود

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta). \quad (133-2)$$

و این معادله نوسانی است با فرکانس $\omega_1/2\pi$ و دامنه $A e^{-\gamma t}$ که به صورت نمایی با زمان کاهش می‌یابد (شکل ۲-۴). ضرایب ثابت A و θ به شرایط اولیه بستگی دارند. فرکانس این نوسان از



شکل ۲-۴ حرکت نوسانگر هارمونیک میرا. منحنی ضخیم: نمایش $x = A e^{-\gamma t} \cos \omega t$ با $\gamma = \omega/8$ و منحنی نازک: نمایش $x = \pm A e^{-\gamma t}$ است.

فرکانس نوسان غیرمیرا کمتر است. جواب (۲-۱۳۳) را به این صورت نیز می توان نوشت:

$$x = e^{-\gamma t} (B_1 \cos \omega_1 t + B_2 \sin \omega_1 t). \quad (۲-۱۳۴)$$

همچنین معادله (۲-۱۲۴) را می توان بر حسب ضرایب ثابت ω_0 و γ به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (۲-۱۳۵)$$

این شکل معادله اغلب در بحث نوسانهای مکانیکی به کار برده می شود.

انرژی کل نوسانگر عبارت است از:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2. \quad (۲-۱۳۶)$$

این انرژی کل دیگر ثابت نیست، اصطکاک $b\dot{x}$ - نقش F' را در معادله (۲-۶۳) ایفا می کند. در حالت مهمی که میرایی کوچک باشد، $\gamma \ll \omega_0$ ، می توان $\omega_1 \approx \omega_0$ گرفت و از γ در برابر ω_0 صرف نظر کرد. در این صورت برای انرژی مربوط به حل (۲-۱۳۳) مقدار تقریبی زیر را داریم:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t}. \quad (۲-۱۳۷)$$

بنابراین انرژی به میزان دو برابر میزان میرایی دامنه نسبت به زمان به صورت نمایی کاهش می یابد. میزان کسری کاهش یا مشتق لگاریتمی E عبارت است از

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{d \ln E}{dt} = -2\gamma. \quad (۲-۱۳۸)$$

اکنون حالت (ب)، ($\omega_0 < \gamma$)، را در نظر می گیریم. در این حالت، دو جواب p عبارت اند از:

$$p = -\gamma_1 = -\gamma - (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}, \quad (۲-۱۳۹)$$

$$p = -\gamma_2 = -\gamma + (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}.$$

جواب عام عبارت است از:

$$x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}. \quad (۲-۱۴۰)$$

این دو جمله هر دو به صورت نمایی و یکی سریعتر از دیگری با زمان کاهش می یابند. ضرایب ثابت C_1 و C_2 را می توان چنان اختیار کرد که با شرایط اولیه مناسب باشند. خواننده باید آنها را برای دو حالت مهم زیر: $\omega_0 = 0$ ، $\gamma_0 \neq 0$ و $\omega_0 \neq 0$ ، $\gamma_0 = 0$ تعیین کند و منحنی $x(t)$ را برای هر دو حالت رسم کند.

در حالت (پ)، ($\omega_0 = \gamma$)، فقط یک جواب دارد:

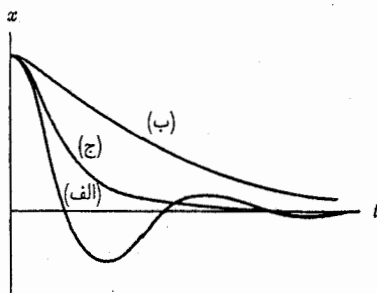
$$p = -\gamma. \quad (۲-۱۴۱)$$

در این صورت جواب x عبارت است از:

$$x = e^{-\gamma t}. \quad (۲-۱۴۲)$$

اینک نشان می دهیم که در این حالت

$$x = t e^{-\gamma t}. \quad (۲-۱۴۳)$$



شکل ۵-۲ بازگشت نوسانگر هارمونیک به حال تعادل. (الف) کندمیرا، (ب) تندمیرا، و (پ) میرایی بحرانی.

جواب دیگر معادله است. برای اثبات، \dot{x} و \ddot{x} را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned}\dot{x} &= e^{-\gamma t} - \gamma t e^{-\gamma t}, \\ \ddot{x} &= -\gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 t e^{-\gamma t}.\end{aligned}\quad (۱۴۴-۲)$$

برای این جواب، طرف چپ معادله (۱۳۵-۲) عبارت است از

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (\omega_0^2 - \gamma^2) t e^{-\gamma t}.\quad (۱۴۵-۲)$$

طرف راست معادله فوق به ازای $\omega_0 = \gamma$ صفر است. بنابراین در حالتی که $\omega_0 = \gamma$ است جواب عام عبارت است از

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t}.\quad (۱۴۶-۲)$$

اگر $\omega_0 > \gamma$ را ثابت نگه داریم و دیگری تغییر کند، مشاهده می‌کنیم که از معادله (۱۳۹-۲)

$$\gamma_1 > \gamma_c > \gamma_2,\quad (۱۴۷-۲)$$

که در آن γ_c مقدار مربوطه است وقتی $\gamma = \omega_0$ می‌باشد. بنابراین جواب (۱۴۶-۲) به‌طور نمایی با توانی متوسط بین توانهای دو جمله‌نمایی معادله (۱۴۰-۲)، نزول می‌کند. در نتیجه، برای مقدار ثابت γ یا ω_0 یا مگر در حالتی که C_2 در معادله (۱۴۰-۲) برابر صفر است، جواب (۱۴۶-۲) پس از مدتی به اندازه کافی طولانی، سریعتر از جواب (۱۴۰-۲) صفر می‌شود. حالات (الف)، (ب)، و (پ) در مسائلی دارای اهمیت‌اند که شامل مکانیسمهایی باشند که تحت تأثیر یک نیروی اصطکاک میرا به حالت تعادل نزدیک گردند. مانند اندازه‌گیرهای عقربه‌ای، یا فترهای بازگرداننده هیدرولیکی یا هوایی در، و غیره. در بیشتر حالات، علاقمندیم که مکانیسم به تندی و به‌طور هموار به حالت تعادل خود برسد. این عمل برای یک ضریب میرایی معلوم γ و یا برای یک ω_0 معلوم در کوتاه‌ترین زمان و بی‌فراجهست هنگامی ممکن است که $\omega_0 = \gamma$ ، [حالت (پ)]^۱ این حالت را میرایی بحرانی^۲ گویند. اگر $\omega_0 < \gamma$ باشد، می‌گویند دستگاه تندمیرا^۳ است، رفتار آرام است و کندتر از حالت میرایی بحرانی به $x = 0$ برمی‌گردد. اگر $\omega_0 > \gamma$ باشد، می‌گویند دستگاه، کندمیرا^۴ است. در این

۱. به‌هر حال به مسئله ۴۱ پایان فصل توجه کنید.

حالت مختصه x از مقدار $x = 0$ فرا می‌جهد، و نوسان می‌کند. توجه کنید که در حالت میرایی بحرانی، $\omega_1 = 0$ است و بنابراین زمان تناوب نوسان بی‌نهایت می‌شود. در شکل ۲-۵ رفتار دستگاهی مکانیکی نشان داده شده است که از حالت تعادل خود تغییر مکان یافته و رها شده است ($v_0 = 0$ و $x_0 \neq 0$). خواننده باید منحنیهای مشابهی برای حالتی که دستگاه در لحظه $t = 0$ تحت تأثیر ضربه شدیدی قرار گرفته است رسم کند. (مانند $x_0 = 0$ و $v_0 \neq 0$).

۲-۱۰ نوسانگر هارمونیک واداشته

حرکت یک نوسانگر هارمونیک که تحت تأثیر نیروی خارجی قرار گرفته باشد از معادله (۲-۹۱) پیروی می‌کند. برای سهولت حل این معادله به ذکر قضیه زیر می‌پردازیم.

قضیه ۳. اگر $x_i(t)$ جواب یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن خطی (مثلاً معادله (۲-۹۱))، $x_h(t)$ جواب معادله دیفرانسیل همگن خطی نظیر آن باشد (مثلاً معادله (۲-۹۰))، در این صورت $x(t) = x_i(t) + x_h(t)$ نیز یک جواب معادله غیرهمگن خواهد بود.

این قضیه خواه ضرایب معادله ثابت و یا تابعی از t باشد، صادق است. اثبات آن از طریق جاگذاری و به‌عهده خواننده گذاشته می‌شود. بنا به قضیه ۳، اگر x_h جواب عمومی معادله همگن (۲-۹۰) را بدانیم [در بخش ۲-۹ آن را بررسی کردیم]، در این صورت فقط کافی است x_i ، یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن (۲-۹۱) را به‌دست آوریم. زیرا می‌توان x_i را به x_h اضافه کرد و یک جواب برای معادله (۲-۹۱) به‌دست آورد که شامل دو ضریب دلخواه است و بنابراین جواب عام معادله است.

مهمترین حالت، نیرویی است که به‌طور سینوسی نوسان می‌کند. اگر نیروی اعمال شده با سرعت زاویه‌ای ω و دامنه F نوسان کند، معادله حرکت عبارت است از

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F \cos(\omega t + \theta_0), \quad (2-148)$$

که در آن θ_0 ضریبی ثابت است که فاز نیروی وارد را مشخص می‌کند. البته معادله (۲-۱۴۸) جوابهای بسیار دارد و ما فقط به یکی از آنها احتیاج داریم. از نظر فیزیکی، انتظار می‌رود که یکی از جوابها، یک نوسان پاینده مختصه x با همان فرکانس نیروی وارد باشد:

$$x = A_s \cos(\omega t + \theta_s). \quad (2-149)$$

از دامنه A_s و فاز θ_s نوسانهای x را باید از طریق جایگزین کردن معادله (۲-۱۴۹) در معادله (۲-۱۴۸) تعیین کرد. این روش مستقیمی است و به جواب صحیح منجر می‌شود. اما اگر نیرو را به‌صورت قسمت حقیقی تابع مختلطی^۱ بنویسیم، عملیات جبری ساده‌تر می‌شود:

$$F(t) = \text{Re}(F_0 e^{i\omega t}), \quad (2-150)$$

$$F_0 = F_0 e^{i\theta_0}. \quad (2-151)$$

۱. توجه کنید که از حروف رومی از نوع (F, x) برای کمتهای مختلط استفاده شده است تا از کمتهای حقیقی (F, x) متمایز باشند.

بنابراین اگر بتوان جواب $x(t)$ معادله

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = (F_0 e^{i\omega t}), \quad (152-2)$$

را به دست آورد، با جدا کردن قسمتهای حقیقی و موهومی آن، می توان نشان داد^۱ که قسمت حقیقی $x(t)$ در معادله (۱۴۸-۲) صدق می کند. فرض کنید یک جواب به صورت زیر باشد

$$x = x_0 e^{i\omega t},$$

چنانکه

$$\dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t}, \quad \ddot{x} = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t}. \quad (153-2)$$

روابط فوق را در معادله (۱۵۲-۲) جایگزین می کنیم و x_0 را به دست می آوریم:

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}. \quad (154-2)$$

بنابراین جواب معادله (۱۵۲-۲) چنین خواهد بود.

$$x = x_0 e^{i\omega t} = \frac{(F_0/m) e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}. \quad (155-2)$$

ساده ترین صورت نوشتن معادله (۱۵۵-۲) این است که مخرج را به صورت قطبی نوشت [معادله (۱۰۹-۲)]

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega = [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2} \exp\left(i \tan^{-1} \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (156-2)$$

برای آسانی زاویه زیر را تعریف می کنیم

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \tan^{-1} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}, \quad (157-2)$$

$$\sin \beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}, \quad (158-2)$$

$$\cos \beta = \frac{2\gamma\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}. \quad (159-2)$$

این تعریف خالصاً شخصی است و چنان ترتیب داده شده است که به ازای $\omega = \omega_0$ ، $\beta = 0$ و وقتی $\beta \rightarrow \pm\pi/2$ ، $\omega \rightarrow \pm\infty$. (شکل ۲-۶ را ملاحظه کنید.) این تعریف سبب می شود که روش بررسی ما به موازات روش بررسی معمول معادله (۹۲-۲) در مهندسی برق باشد. اگر معادلات (۱۵۶-۲) و (۱۵۷-۲) و اتحاد

$$i = e^{i\pi/2}, \quad (160-2)$$

۱. ادعای «ما می توانیم نشان دهیم که ...» در سراسر این کتاب به این معنی است که خواننده ای که بحث را تا این نقطه دنبال کرده است باید قادر باشد که خودش اثباتی تهیه کند. (در این حالت، قرار دهید $x = x + iy$ و نتیجه بلافاصله حاصل می شود.) اثباتهای طولانی و زیرکانه یا در متن کتاب داده می شود و یا مرجعی برای دیدن آن ارائه می شود، و یا به خواننده تذکر داده می شود که اثبات آن آسان نیست.

را به کار بریم، می توانیم معادله (۲-۱۵۵) را به صورت زیر بنویسیم:

$$x = \frac{F_0}{im [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} e^{i(\omega t + \theta_0 + \beta)}. \quad (2-161)$$

سرعت مختلط عبارت است از

$$\dot{x} = i\omega x = \frac{\omega F_0}{m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} e^{i(\omega t + \theta_0 + \beta)}. \quad (2-162)$$

مکان و سرعت حقیقی عبارت اند از

$$x = \text{Re}(x) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \sin(\omega t + \theta_0 + \beta), \quad (2-163)$$

و

$$\dot{x} = \text{Re}(\dot{x}) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \cos(\omega t + \theta_0 + \beta). \quad (2-164)$$

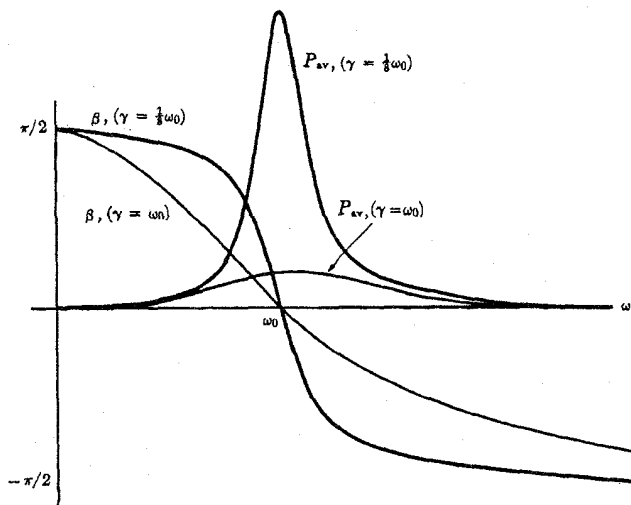
این یک جواب خاص معادله (۲-۱۴۸) است که شامل هیچ گونه ضریب ثابت دلخواهی نیست. طبق قضیه ۳ و معادله (۲-۱۳۳)، جواب عام (برای نوسانگر کند میرا) چنین است:

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) + \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \sin(\omega t + \theta_0 + \beta). \quad (2-165)$$

این جواب دارای دو ضریب ثابت دلخواه A و θ است که مقادیرشان به وسیله مقادیر اولیه x و \dot{x} در $t = 0$ تعیین می شوند. جمله اول به صورت نمایی کاهش می یابد و آن را گذرا^۱ می نامند. دومین جمله را حالت پاینده^۲ گویند و با دامنه ثابتی نوسان می کند. قسمت گذرا به شرایط اولیه بستگی دارد. حالت پاینده که پس از استهلاک گذرا باقی می ماند، به شرایط اولیه بستگی ندارد. (در غیاب میرایی، $\gamma = 0$ ، «گذرا» از بین نمی رود. ما هنوز هم می توانیم آن را به عنوان قسمتی از جوابی تعریف کنیم که دارای فرکانس طبیعی $\omega_1 = \omega$ است، لقب «گذرا» در این حالت خیلی توصیفی نیست.)

در حالت پاینده، میزان انجام کار توسط نیروی وارد بر روی نوسانگر نسبت به زمان عبارت است از

$$\begin{aligned} \dot{x} F(t) &= \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \cos(\omega t + \theta_0) \cos(\omega t + \theta_0 + \beta) \\ &= \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega \cos \beta \cos^2(\omega t + \theta_0)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \\ &\quad - \frac{F_0^2}{2m} \frac{\omega \sin \beta \sin 2(\omega t + \theta_0)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2-166)$$



شکل ۶-۲ منحنیهای توان و فاز نوسانهای هارمونیک واداشته.

آخرین جمله طرف راست به طور متوسط صفر است، حال آنکه مقدار متوسط $\cos^2(\omega t + \theta_0)$ طی یک تناوب کامل $\frac{1}{2}$ است. بنابراین توان متوسط داده شده توسط نیروی اعمال شده چنین است:

$$P_{av} = \langle \dot{x}F(t) \rangle_{av} = \frac{F_0^2 \cos \beta}{2m} \frac{\omega}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}}, \quad (167-2)$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} F_0 \dot{x}_m \cos \beta, \quad (168-2)$$

که در آن بزرگترین مقدار \dot{x} است. رابطه‌ای نظیر این نیز در مورد قدرت داده شده به یک مدار الکتریکی صادق است. عامل $\cos \beta$ را ضریب توان^۱ گویند. در مورد الکتریکی، β زاویه فاز بین جریان و نیروی الکتروموتوری اعمال شده است. با استفاده از معادله (۱۶۲-۲) برای $\cos \beta$ می‌توان معادله (۱۶۷-۲) را به صورت زیر نوشت

$$P_{av} = \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}. \quad (169-2)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که در حالت پاینده، میزان متوسط توانهای داده شده به نوسانگر و توانهای تلف شده از راه اصطکاک یکسان است، چنانکه البته باید باشد. توان P_{av} در $\omega = \omega_0$ حداکثر است. در شکل ۶-۲، توان P_{av} (در آحاد دلخواه) و فاز β مربوط به حالت پاینده نوسان واداشته، بر حسب تغییرات ω برای دو مقدار γ رسم شده است. منحنیهای ضخیم برای میرایی کم و منحنیهای نازک برای میرایی بزرگترند. فرمول (۱۶۹-۲) را می‌توان در حالت $\gamma \ll \omega$

کمی ساده کرد. در این حالت P_{av} فقط در نزدیکی فرکانس همسازی ω بزرگ است و ما فرمولی به دست خواهیم آورد که در نزدیکی $\omega = \omega_0$ معتبر باشد. اگر

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad (170-2)$$

و فرض کنیم که $\Delta\omega \ll \omega$ ، خواهیم داشت

$$(\omega^2 - \omega_0^2) = (\omega + \omega_0)\Delta\omega \doteq 2\omega_0 \Delta\omega, \quad (171-2)$$

$$\omega^2 \doteq \omega_0^2. \quad (172-2)$$

بنابراین

$$P_{av} \doteq \frac{F_0^2}{4m} \frac{\gamma}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}. \quad (173-2)$$

این فرمول ساده P_{av} با تقریب مناسبی در نزدیکی همسازی است. فرمول نظیر آن برای β چنین است

$$\cos\beta \doteq \frac{\gamma}{[(\Delta\omega)^2 + \gamma^2]^{1/2}}, \quad \sin\beta \doteq \frac{-\Delta\omega}{[(\Delta\omega)^2 + \gamma^2]^{1/2}}. \quad (174-2)$$

وقتی $\omega \ll \omega_0$ و $\beta \doteq \pi/2$ ، معادله (۱۶۴-۲) چنین می شود:

$$x \doteq \frac{F_0}{\omega_0^2 m} \cos(\omega t + \theta_0) = \frac{F(t)}{k}. \quad (175-2)$$

این نتیجه از نظر فیزیکی به سادگی تفسیر می شود، وقتی نیرو به کندی تغییر می کند، ذره طوری حرکت می کند که نیروی وارد درست به وسیله نیروی بازگرداننده خنثی می شود. وقتی $\omega \gg \omega_0$ و

$\beta \doteq -\pi/2$ ، معادله (۱۶۴-۲) چنین می شود

$$x \doteq -\frac{F_0}{\omega^2 m} \cos(\omega t + \theta_0) = -\frac{F(t)}{\omega^2 m}. \quad (176-2)$$

حرکت اکنون فقط به جرم ذره و فرکانس نیروی وارد بستگی دارد و از اصطکاک و نیروی بازگرداننده مستقل است. در واقع، این نتیجه، درست همان نتیجه ای است که در بخش ۲-۳، [به معادلات (۱۵-۲) و (۱۹-۲) مراجعه کنید] برای ذره ای که تحت تأثیر نیرویی نوسان کننده قرار گرفته باشد به دست آوردیم.

می توانیم نتیجه (۱۶۵-۲) را در مورد الکترونی که به وسیله نیروی بازگرداننده الاستیکی (کشوری) به یک نقطه تعادل $x = 0$ وابسته، و تحت تأثیر میدان الکتریکی نوسان کننده ای قرار گرفته است، به کار ببریم:

$$E_x = E_0 \cos \omega t, \quad (177-2)$$

$$F = -e E_0 \cos \omega t. \quad (178-2)$$

حرکت به وسیله معادله زیر داده می شود

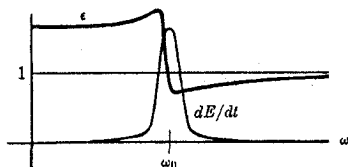
$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \theta) - \frac{e E_0}{m} \frac{\sin(\omega t + \beta)}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}}. \quad (179-2)$$

اینجا، جمله مهم، جمله دوم است، که از شرایط اولیه مستقل است و با همان فرکانس میدان الکتریکی نوسان می‌کند. از بسط جمله دوم نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{e E_0}{m} \frac{\sin \beta \cos \omega t}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \\
 &\quad - \frac{e E_0}{m} \frac{\cos \beta \sin \omega t}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \\
 &= -\frac{e E_0 \cos \omega t}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} \\
 &\quad - \frac{e E_0 \sin \omega t}{m} \frac{2\gamma \omega}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} \quad (2-180)
 \end{aligned}$$

جمله اول نمایشگر نوسانی از x است که در فرکانسهای کم با نیروی اعمال شده همفاز است، اما در فرکانسهای بالا به اندازه 180° با آن اختلاف فاز دارد. جمله دوم نمایشگر نوسانی از x است که با نیروی اعمال شده به اندازه 90° اختلاف فاز دارد. زیرا سرعت \dot{x} برای این جمله با نیروی وارد همفاز است. بنابراین جمله دوم حاکی از جذب انرژی از نیروی اعمال شده است. جمله دوم شامل عامل γ است و بنابراین اگر $\omega \ll \gamma$ باشد، (مگر در نزدیکی همسازی) کوچک است. اگر محیط دی الکتریکی در نظر بگیرید که از الکترونیهای تشکیل شده باشد که توسط نیروی الاستیک (کشور) به نقاط تعادل وابسته باشند، در این صورت جمله اول معادله (2-180) نمایشگر یک پلاریزگی الکتریکی است که با میدان الکتریکی نوسانکننده وارد متناسب است، حال آنکه جمله دوم نمایشگر جذب انرژی از میدان الکتریکی است. در نزدیکی فرکانس همسازی، محیط دی الکتریکی انرژی جذب خواهد کرد و نسبت به تشعشع الکترومغناطیسی، کدر خواهد بود. بالاتر از فرکانس همسازی، جابه‌جایی الکترونها با نیروی وارد و نیز پلاریزگی الکتریکی حاصل با میدان الکتریکی اعمال شده، اختلاف فاز خواهند داشت. ضریب ثابت دی الکتریک و ضریب شکست از یک کمتر خواهند بود. برای فرکانسهای خیلی زیاد، اولین جمله معادله (2-180) به آخرین جمله معادله (2-180) نزدیک می‌شود و رفتار الکترونها چنان است که گویی آزادند. پایین‌تر از فرکانس همسازی، پلاریزگی الکتریکی با میدان الکتریکی اعمال شده همفاز است و ضریب ثابت دی الکتریکی و ضریب شکست از یک بزرگتر خواهند بود.

اگر ضریب دی الکتریک را از جمله اول معادله (2-180) به همان روشی که برای یک الکترون آزاد به کار بردیم حساب کنیم، [به معادلات (2-20) تا (2-26) مراجعه شود]، برای N الکترون در



شکل ۲-۷ تغییرات ضریب ثابت دی الکتریک و جذب انرژی برای محیط حاوی نوسانگرهای هارمونیک.

واحد حجم خواهیم داشت:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (181-2)$$

ضریب شکست امواج الکترومغناطیسی (برای $\mu = \mu_0$) چنین است

$$n = \frac{c}{v} = \left(\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (182-2)$$

برای فرکانسهای بسیار زیاد و بسیار کم، معادله (۱۸۱-۲) چنین می شود:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \doteq 1 + \frac{Ne^2}{m \omega_0^2}, \quad \omega \ll \omega_0, \quad (183-2)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \doteq 1 - \frac{Ne^2}{m \omega^2}, \quad \omega \gg \omega_0. \quad (184-2)$$

میزان متوسط جذب انرژی بر حسب واحد حجم به وسیله معادله (۱۶۹-۲) داده می شود:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{Ne^2 E_0^2}{m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad (185-2)$$

در شکل ۲-۷ منحنیهای تغییر، ضریب دی الکتریک متجه و انرژی جذب شده بر حسب فرکانس رسم شده اند. بنابراین ضریب دی الکتریک در فرکانسهای کم مقداری ثابت و از یک بزرگتر دارد، و با نزدیک شدن به فرکانس همسازی افزایش می یابد. و در ناحیه «پاشیدگی غیرعادی»^۱ که تشعشع الکترومغناطیسی به شدت جذب می شود، به کمتر از یک کاهش، و سپس افزایش می یابد و در فرکانسهای بالا، به یک نزدیک می شود. ضریب شکست نیز منحنی مشابهی خواهد داشت و این درست رفتاری است که ماده در هر شکلی که باشد از خود نشان می دهد. به عنوان مثال، شیشه در فرکانسهای کم، ضریب دی الکتریک ثابتی دارد. در ناحیه نور مرئی، ضریب شکست آن با فرکانس افزایش می یابد، و در قسمتی از نور مافوق بنفش کدر می شود. اشعه X با ضریب شکستی اندکی کمتر از یک انتقال می یابد. نمونه واقعی تری برای محیطهای انتقال دهنده، از این فرضیه نتیجه می شود که چند فرکانس همسازی مختلف، به الکترونهايي که با ضرایب فزنی k مختلف مهار شده باشند، نسبت دهیم. بیشتر ویژگیهای منحنیهای تجربی $\epsilon - \omega$ و یا $n - \omega$ به کمک این نمونه قابل توضیح است. توافق این نمونه نه تنها کیفی است، بلکه فرمولهای (۱۸۱-۲) تا (۱۸۵-۲) به طور کمی نیز با نتایج آزمایشی موافق اند، البته به شرط آنکه ضرایب N ، ω_0 ، و γ برای هر ماده به طور مناسبی انتخاب شوند. موفقیت این نظریه یکی از دلایل قبول «مدل هندوانه ای» اتم تا سال ۱۹۱۳ بود که در آن تصور می رفت الکترونها مانند هسته های هندوانه قرار گرفته اند و مانند نوسانگرهای هارمونیک، نوسان می کنند. آزمایشهای رادفورد^۲ در سال ۱۹۱۳ فیزیکدانها را مجبور

کرد که مدل «منظومه‌ای» اتم را قبول کنند، ولی این مدل قادر نبود که خصوصیات نوری و الکترومغناطیسی ماده را ولو به طور کیفی توصیف کند تا آنکه مکانیسم کوانتم ظاهر گردید. نتیجه مسئله از دیدگاه مکانیک کوانتم این است که تصویر نوسانگر ساده برای برهم‌کنش ماده و تشعشع، وقتی ضرایب به طور مناسبی انتخاب شوند اصولاً به نتایج صحیحی منجر می‌شود.^۱

اکنون نیروی وارد $F(t)$ را در نظر می‌گیریم که فقط در یک زمان کوتاه δt بزرگ و در تمام زمانهای دیگر صفر و یا قابل اغماض است. چنین نیرویی را که به ضربتی ناگهانی مربوط می‌شود ضربه می‌نامند. فرض می‌کنیم که نوسانگر از اول در مکان $x = 0$ ساکن باشد، و فرض می‌کنیم زمان آنقدر کوتاه است که فاصله طی شده توسط جرم، ضمن اعمال نیرو، به صورت قابل اغماضی کوچک باشد. طبق معادله (۲-۴)، اندازه حرکت درست پس از اعمال نیرو، با ضربه داده شده به جرم توسط نیرو مساوی است.

$$m v_0 = p_0 = \int F dt, \quad (2-186)$$

که در آن v_0 سرعت درست پس از اعمال ضربه است، و انتگرال در فاصله زمان δt یعنی طی تأثیر نیرو گرفته می‌شود. نیروی وارد پس از ضربه صفر است، و اگر میرایی کمتر از میرایی بحرانی باشد، ذره باید طبق معادله (۲-۱۳۳) حرکت کند. فرض می‌کنیم δt آنقدر کوچک باشد که نوسانگر در این زمان حرکت قابل ملاحظه‌ای نداشته باشد، بنابراین برای اینکه در $t = t_0$ (لحظه‌ای است که ضربه وارد می‌شود)، $x = 0$ ، $\omega_1 t_0 = -(\pi/2) - \theta$ ، θ اختیار می‌کنیم:

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin [\omega_1(t - t_0)]. \quad (2-187)$$

سرعت در $t = t_0$ چنین است

$$v_0 = \omega_1 A e^{-\gamma t_0}. \quad (2-188)$$

بنابراین

$$A = \frac{v_0}{\omega_1} e^{\gamma t_0}. \quad (2-189)$$

در نتیجه اگر ضربه p_0 در لحظه $t = t_0$ به نوسانگر ساکنی وارد شود، جواب معادله چنین خواهد بود:

$$x = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ \frac{p_0}{m \omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin [\omega_1(t-t_0)], & t > t_0. \end{cases} \quad (2-190)$$

در اینجا از زمان کوتاه δt (که در طول آن نیرو وارد می‌شود) صرف نظر کرده‌ایم.

مشاهده می‌شود که نتیجه نیرویی ضربه‌گونه، فقط به مقدار کل ضربه وارد شده p_0 بستگی دارد

و از شکل خاص تابع $F(t)$ مستقل است، البته فقط به شرط آنکه $F(t)$ ، مگر در زمان بسیار کوتاه δt ، قابل اغماض باشد. در زیر چند صورت ممکن $F(t)$ که این خاصیت را دارند نوشته شده است:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ p_0 / \delta t, & t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t, \\ 0, & t > t_0 + \delta t, \end{cases} \quad (191-2)$$

$$F(t) = \frac{p_0 \cdot \delta t}{\pi} \frac{1}{(t - t_0)^2 + (\delta t)^2}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (192-2)$$

$$F(t) = \frac{p_0}{\delta t \sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(t - t_0)^2}{(\delta t)^2} \right], \quad -\infty < t < \infty. \quad (193-2)$$

خواننده می تواند تحقیق کند که هر یک از توابع فوق جز در فاصله ای از مرتبه δt در اطراف t_0 قابل اغماض اند و ضریب کل وارد شده توسط هر یک از آنها برابر p_0 است. اگر $F(t)$ در معادله (۲-۹۱) به یکی از صورتهای بالا داده شده باشد، جواب دقیق آن وقتی $\delta t \rightarrow 0$ باید به معادله (۲-۱۹۰) تبدیل شود (به مسئله ۵۵ مراجعه کنید).

۲-۱۱ اصل ترکیب - نوسانگر هارمونیک با نیروی وارد دلخواه

یک خاصیت مهم نوسانگر هارمونیک این است که اگر تحت تأثیر نیروی وارد $F(t)$ که می توان آن را به صورت مجموع دو نیرو یا بیشتر $F_1(t)$ ، $F_2(t)$ ، ... تلقی کرد قرار گیرد، حرکت آن $x(t)$ برابر مجموع حرکات $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ ، ... خواهد بود که هر یک همان حرکت نوسانگر بودند در صورتی که تحت تأثیر هر یک از نیروهای $F_n(t)$ به تنهایی قرار می گرفت. این اصل در مورد ارتعاشات کوچک مکانیکی و ارتعاشات الکتریکی و امواج صوتی و امواج الکترومغناطیسی و تمام پدیده های فیزیکی که از معادلات دیفرانسیل خطی تبعیت می کنند، صادق است. این اصل در قضیه زیر بیان می شود.

قضیه ۴. فرض کنید مجموعه (متناهی و یا نامتناهی) توابع $x_n(t)$ که در آن $n = 1, 2, 3, \dots$ جوابهای معادلات زیر باشند

$$m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n = F_n(t), \quad (194-2)$$

و فرض کنید که

$$F(t) = \sum_n F_n(t). \quad (195-2)$$

در این صورت تابع

$$x(t) = \sum_n x_n(t) \quad (196-2)$$

در معادله زیر صدق می کند

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t). \quad (197-2)$$

۱. وقتی مجموعه توابع نامتناهی باشد، پاره ای محدودیتهای ریاضی وجود دارند که لازم نیست در اینجا مورد نظر قرار گیرند.

برای اثبات این قضیه، معادله (۲-۱۹۶) را در طرف چپ معادله (۲-۱۹۷) جایگزین می‌کنیم.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = m \sum_n \ddot{x}_n + b \sum_n \dot{x}_n + k \sum_n x_n$$

$$= \sum_n (m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n) = \sum_n F_n(t) = F(t).$$

هرگاه $F(t)$ را بتوان مجموع نیروهای $F_n(t)$ دانست و بتوان جوابهای معادلات مربوط (۲-۱۹۴) را برای آنها به دست آورد، در این صورت بنا به قضیه فوق، می‌توان یک جواب برای معادله (۲-۱۹۷) پیدا کرد. به ویژه هرگاه $F(t)$ را بتوان به صورت مجموعه‌ای از عبارات نوسانی سینوسی نوشت:

$$F(t) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t + \theta_n), \quad (2-198)$$

طبق قضیه ۴ و معادله (۲-۱۶۳)، یک جواب خاص معادله (۲-۱۹۷) عبارت خواهد بود از

$$x = \sum_n \frac{C_n}{m} \frac{1}{[(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2]^{1/2}} \sin(\omega_n t + \theta_n + \beta_n), \quad (2-199)$$

$$\beta_n = \tan^{-1} \frac{\omega_0^2 - \omega_n^2}{2\gamma \omega_n}.$$

در این صورت جواب عام عبارت است از

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) + \sum_n \frac{C_n}{m} \frac{\sin(\omega_n t + \theta_n + \beta_n)}{[(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2]^{1/2}}, \quad (2-200)$$

که در آن بنا به معمول A و θ را باید چنان اختیار کرد که جواب (۲-۲۰۰) با شرایط اولیه سازگار باشد.

با قرار دادن

$$A_n = C_n \cos \theta_n, \quad B_n = -C_n \sin \theta_n. \quad (2-201)$$

معادلات (۲-۱۹۸) و (۲-۱۹۹) را می‌توانیم به صورت دیگری بنویسیم:

$$F(t) = \sum_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (2-202)$$

و

$$x = \sum_n \frac{A_n \sin(\omega_n t + \beta_n) - B_n \cos(\omega_n t + \beta_n)}{m [(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2]^{1/2}}. \quad (2-203)$$

یک حالت مهم از این نوع، هنگامی است که $F(t)$ متناوب باشد، یعنی

$$F(t + T) = F(t), \quad (2-204)$$

که در آن T زمان تناوب نیرو است. می توان نشان داد که هرگاه تابع $F(t)$ پیوسته باشد و در معادله (۲-۲۰۴) صدق کند (و در واقع حتی هرگاه فقط تکه تکه پیوسته باشد) همواره می توان آن را به صورت حاصل جمع توابع سینوسی نوشت:

$$F(t) = \frac{1}{T} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\gamma \pi n t}{T} + B_n \sin \frac{\gamma \pi n t}{T} \right), \quad (2-205)$$

که در آن

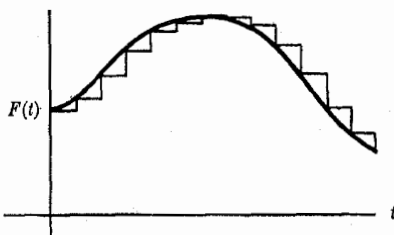
$$A_n = \frac{\gamma}{T} \int_0^T F(t) \cos \frac{\gamma \pi n t}{T} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2-206)$$

$$B_n = \frac{\gamma}{T} \int_0^T F(t) \sin \frac{\gamma \pi n t}{T} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

این نتیجه، لافل در اصل، ما را به حل مسئله نوسانگر واداشته برای هر نیروی متغیر متناوب توانا می کند. مجموع موجود در معادله (۲-۲۰۵) را سری فوریه می گویند. ^۱ محاسبه واقعی جواب با استفاده از این روش، به ویژه سازگار کردن A و θ در معادله (۲-۲۰۰) با شرایط اولیه، در بیشتر موارد به نسبت پرحمت است. با این همه، علم به اینکه چنین جوابی وجود دارد، اغلب فی نفسه مفید است. اگر هر یک از فرکانسهای $\gamma \pi n / T$ بر فرکانس طبیعی نوسانگر ω منطبق شود، عبارات مربوط در سریهای معادلات (۲-۱۹۹) و یا (۲-۲۰۳) در مقایسه با سایر عبارات بسیار بزرگتر خواهند بود. بنابراین نیرویی که با نصف فرکانس ω به طور غیر سینوسی نوسان می کند، ممکن است باعث شود که نوسانگر در فرکانس طبیعی ω تقریباً به طور سینوسی به نوسان در آید.

قضیه انتگرال فوریه صورت تعمیم یافته ای از قضیه سری فوریه [معادلات (۲-۲۰۵) و (۲-۲۰۶)] است که بر نیروهای غیرمتناوب قابل اطلاق است. این قضیه به ما اجازه می دهد که هر تابع پیوسته (و یا تکه تکه پیوسته) $F(t)$ با در نظر گرفتن پاره ای محدودیتها را به صورت ترکیب نیروهایی که به طور هارمونیک نوسان می کنند، نمایش دهیم. با کمک سری و انتگرالهای فوریه می توان معادله (۲-۱۹۷) را تقریباً برای هر نیروی فیزیکی معقول $F(t)$ حل کرد. این مطلب را در اینجا بیشتر تعقیب نخواهیم کرد، کافی است یادآور شویم که هر چند روشهای سری و انتگرالهای فوریه در حل مسائل ارتعاش دارای ارزش عملی بسیارند، بزرگترین اهمیت آنها در فیزیک شاید در این است که در اصل چنین جوابی وجود دارد. نتایج بسیار مهمی را می توان بی محاسبه سری و یا انتگرالها به دست آورد.

۱. برای اثبات مطالب فوق و بحث کامل تری درباره سری فوریه به کتاب زیر مراجعه کنید:



شکل ۸-۲ نمایش نیرویی به صورت مجموعه‌ای از ضربه‌ها. منحنی پرتنگ نمایش $F(t)$ و منحنی کمرنگ نمایش $\sum_n F_n(t)$ است.

روش حل دیگری که به نام گرین^۱ معروف است بر اساس جواب (۲-۱۹۰) برای نیرویی از نوع ضربه‌ای استوار است. هر نیروی $F(t)$ را می‌توان مجموع گروهی ضربه دانست که هر یک در مدت زمان کوتاه δt اعمال می‌شوند، و ضربه $F(t)\delta t$ را وارد می‌کند:

$$F(t) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(t), \quad (2-207)$$

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } t < t_n, \\ F(t_n), & \text{اگر } t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ 0, & \text{اگر } t > t_{n+1}. \end{cases} \quad (2-208)$$

که در آن $t_n = n\delta t$. هنگامی که $\delta t \rightarrow 0$ ، مجموع تمام نیروهای ضربه‌ای $F_n(t)$ به سمت $F(t)$ میل خواهد کرد. (شکل ۸-۲ را ببینید.) بنا به قضیه ۴ و معادله (۲-۱۹۰)، یک جواب معادله (۲-۱۹۷)، برای نیروی داده شده به وسیله معادله (۲-۲۰۷)، عبارت است از

$$x(t) \doteq \sum_{n=-\infty}^n \frac{F(t_n)\delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_n)} \sin[\omega_1(t-t_n)], \quad (2-209)$$

که در آن $t_{n_0} \leq t < t_{n_0+1}$ است. اگر $\delta t \rightarrow 0$ میل کند و $t_n = t'$ باشد، معادله (۲-۲۰۹) چنین می‌شود

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{F(t')}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_1(t-t')] dt'. \quad (2-210)$$

تابع

$$G(t, t') = \begin{cases} 0, & \text{اگر } t' > t, \\ \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{m\omega_1} \sin[\omega_1(t-t')], & \text{اگر } t' \leq t, \end{cases} \quad (2-211)$$

را تابع گرین معادله (۲-۱۹۷) گویند. $x(t)$ برحسب تابع گرین به صورت زیر است

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') F(t') dt'. \quad (2-212)$$

اگر نیروی $F(t)$ برای $t < t_0$ صفر باشد، جواب (۲-۲۱۰) برای $t > t_0$ ، به $x(t) = 0$ منجر خواهد شد. بنابراین جواب فوق، از پیش طوری تطبیق یافته است تا شرط اولیه (که نوسانگر قبل از اعمال نیرو ساکن باشد) برقرار شود. برای هر شرط اولیه دیگر، یک جواب گذرا را که توسط معادله (۲-۱۳۳) با مقادیر مناسب A و θ داده می شود باید اضافه کنیم. جواب (۲-۲۱۰) در مطالعه رفتار گذرای یک دستگاه مکانیکی و یا یک مدار الکتریکی که تحت تأثیر نیروهای مختلفی قرار گرفته باشند، بسیار مفید است.

مسائل

۱. الف) یک موتور جت خاصی در حداکثر میزان مصرف سوختش پیشران (نیرو) ثابتی به اندازه ۳۰۰۰ پوند-وزن تولید می کند. به فرض آنکه به هنگام بلند شدن در حداکثر پیشران عمل کند، قدرتی را (برحسب قدرت اسب) که موتور به هواپیما می دهد، وقتی سرعت هواپیما ۲۰ میل در ساعت، ۱۰۰ میل در ساعت، و ۳۰۰ میل در ساعت است، حساب کنید. (قدرت اسب = ۷۴۶ وات).
 ب) یک موتور پیستونی در حداکثر میزان مصرف سوختش قدرت ثابت ۵۰۰ قدرت اسب تولید می کند. نیرویی که این موتور به هواپیما وارد می کند را به هنگام بلند شدن وقتی سرعت هواپیما ۲۰ میل در ساعت، ۱۰۰ میل در ساعت، و ۳۰۰ میل در ساعت است، حساب کنید.

۲. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی ثابت F است. در لحظه $t = 0$ سرعتش صفر است. با استفاده از قضیه اندازه حرکت، سرعت آن را در هر زمان بعدی t پیدا کنید. انرژی ذره را در هر زمان بعدی از معادلات (۲-۷) و (۲-۸) حساب کرده و توافق نتایج را بررسی کنید.

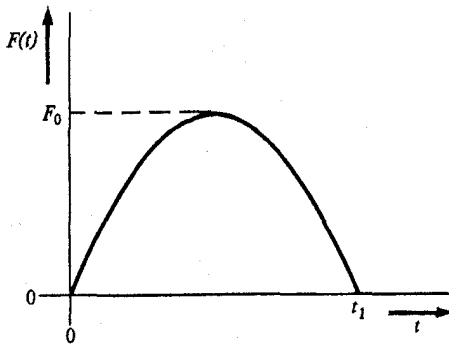
۳. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیرویی است که به وسیله معادله (۲-۱۹۲) داده می شود. (در معادله (۲-۱۹۲)، δt فاصله زمانی کوچک ثابتی است). ضربه کلی تولید شده توسط این نیرو را در زمان $-\infty < t < \infty$ حساب کنید. اگر سرعت اولیه‌اش (در $t \rightarrow -\infty$) v_0 باشد، سرعت انتهایی‌اش (وقتی $t \rightarrow \infty$) چقدر است؟ قضیه اندازه حرکت را به کار برید.

۴. یک پروتون سریع به بار الکتریکی e با سرعت ثابت v_0 در امتداد مسیری مستقیم از کنار الکترونی به جرم m و بار الکتریکی $-e$ که در ابتدا ساکن است می گذرد. الکترون به فاصله a از مسیر حرکت پروتون قرار گرفته است. الف) فرض کنید که پروتون به قدری سریع حرکت می کند که الکترون تا زمانی که پروتون به قدر کافی دور شده است، فرصت حرکت قابل ملاحظه‌ای از مکان اولیه خود ندارد. نشان دهید که مؤلفه نیرو در جهت عمود بر مسیر حرکت پروتون عبارت است از

$$F = \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + v_0^2 t^2)^{3/2}}, \quad (\text{mks})$$

که در آن $t = 0$ لحظه‌ای است که پروتون و الکترون نزدیکترین فاصله را دارند. ب) ضربه‌ای را که توسط این نیرو وارد می شود، محاسبه کنید. پ) مؤلفه نیرو را در جهتی موازی با سرعت پروتون بنویسید، و نشان دهید که ضربه خالص در آن جهت صفر است. ت) با استفاده از این نتایج، اندازه حرکت نهایی (تقریبی) و انرژی جنبشی نهایی الکترون را محاسبه کنید. ث) نشان دهید برای آنکه فرض اولیه در قسمت الف) برقرار باشد، شرط زیر لازم است:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \ll \frac{1}{\gamma} m v_0^2.$$



شکل ۲-۹ نیرو در مسئله ۶.

۵. ذره‌ای به جرم m در حالت ساکن در $t = 0$ تحت تأثیر یک نیروی $F(t) = F_0 \sin^2 \omega t$ است. (الف) اشکال انتظاری خود را برای $x(t)$ و $v(t)$ ، برای چند زمان تناوب نوسان نیرو طرح کنید. (ب) $x(t)$ و $v(t)$ را پیدا کنید و با طرح خود مقایسه نمایید.

۶. ذره‌ای به جرم m با سرعت اولیه v_0 از لحظه $t = 0$ تحت تأثیر نیروی $F(t)$ است که در شکل ۲-۹ طرح شده است. (الف) طرحی تهیه کنید که بیانگر $F(t)$ و شکل‌های انتظاری شما از $v(t)$ و $x(t)$ باشد. (ب) یک تابع ثابت $F(t)$ بسازید که این شکل را داشته باشد و سپس $v(t)$ و $x(t)$ را پیدا کنید.

۷. ذره‌ای که در ابتدا سرعت v_0 داشت، تحت تأثیر نیروی داده شده به وسیله معادله (۲-۱۹۱) قرار می‌گیرد. (الف) $x(t)$ و $v(t)$ را بیابید. (ب) نشان دهید که وقتی $\delta t \rightarrow 0$ ، حرکت ذره به حرکتی یکنواخت که سرعت آن در لحظه $t = t_0$ به طور ناگهانی به میزان p_0/m تغییر کرده است میل کند. (δt یک فاصله زمانی مشخص است.)

۸. یک میکروفون دارای دیافراگمی به جرم m و مساحت A است. این میکروفون طوری کار گذاشته شده است که می‌تواند آزادانه در جهتی عمود بر دیافراگم حرکت کند. یک موج صوتی به دیافراگم چنان برخورد می‌کند که فشار روی سطح جلوی آن عبارت است از

$$p = p_0 + p' \sin \omega t.$$

فرض کنید که فشار بر سطح پشتی‌اش به اندازه فشار جوی p_0 ثابت می‌ماند. با صرف نظر کردن از تمام نیروهای دیگر، بجز نیروی حاصله از اختلاف فشار سراسر دیافراگم، حرکتش را پیدا کنید. در یک میکروفون واقعی نیروی برگشتی روی دیافراگم وجود دارد که آن را از حرکت خیلی دور باز می‌دارد. نظر به اینکه از این نیرو در اینجا صرف نظر می‌شود، هیچ چیزی از حرکت دور دیافراگم با سرعتی ثابت، جلوگیری نمی‌کند. برای نداشتن چنین مشکلی سرعت اولیه را چنان انتخاب کنید که حرکت خالصاً نوسانی باشد. اگر قرار بر آن باشد که ولتاژی که از میکروفون خارج می‌شود متناسب با فشار صوتی p' و مستقل از ω باشد، چگونه باید به دامنه و فرکانس حرکت دیافراگم بستگی داشته باشد؟

۹. در مسابقه طناب‌کشی، دو گروه ۵ نفری دو سر طنابی را در دست گرفته‌اند. وزن هر یک از آنها ۱۶۰ پوند است و در ابتدا می‌توانند طناب را با نیروی ۲۰۰ پوند - وزن بکشند. در شروع مسابقه،

نیروی کشیدن دو گروه مساوی است ولی وقتی افراد خسته می‌شوند، نیروی کشیدن آنها طبق فرمول زیر کاهش می‌یابد

$$F = (200 \text{ lb-wt}) e^{-t/\tau},$$

که در آن τ میانگین زمان خستگی برای یک گروه ۱۰ ثانیه و برای گروه دیگر ۲۰ ثانیه است. معادله حرکت را بیابید، ($g = 32 \text{ ft-sec}^{-2}$). سرعت نهایی هر گروه چقدر است؟ کدام یک از این فرضها موجب نتیجه غیرمعقولی شده است؟

۱۰. ذره‌ای که در ابتدا ساکن است، در لحظه شروع $t = 0$ تحت تأثیر نیروی زیر قرار می‌گیرد

$$F = F_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta).$$

(الف) معادله حرکت آن را بیابید. (ب) سرعت نهایی چگونه به θ و ω بستگی دارد؟ [راهنمایی. اگر $\cos(\omega t + \theta)$ را به صورت تابع نمایی مختلط بنویسید، عملیات جبری ساده‌تر می‌شوند.]

۱۱. حرکت قایقی با سرعت اولیه v_0 تحت تأثیر نیروی اصطکاک

$$F = -be^{av}.$$

کند می‌شود. (الف) معادله حرکت آن را بیابید. (ب) زمان و مسافت لازم برای توقف را پیدا کنید.

۱۲. قایقی توسط نیروی اصطکاک $F(v)$ کند می‌شود. سرعتش بر حسب فرمول

$$v = C(t - t_1)^2,$$

که در آن C یک ثابت و t_1 زمانی است که متوقف می‌شود، کاهش می‌یابد. نیروی $F(v)$ را پیدا کنید.

۱۳. موتور جتی با نیروی پیشران حداکثر ثابت F_0 می‌تواند به هواپیمایی قدرتی بدهد که موجب ایجاد اصطکاک کششی متناسب با مربع سرعت بشود. اگر هواپیما در لحظه $t = 0$ با سرعت ناچیزی شروع کند و با حداکثر نیروی پیشران شتاب یابد، سرعت $v(t)$ آن را بیابید.

۱۴. فرض کنید که موتورهای یک هواپیمای ملخی به جرم m در حداکثر سوخت (دود خارج کردن)، نیروی ثابت P را تولید می‌کند. نیروی $F(v)$ را پیدا کنید. با نادیده گرفتن اصطکاک، روش بخش ۲-۴ را به کار برده سرعت و مکان هواپیما را وقتی روی باند شتاب می‌گیرد، از لحظه ساکن $t = 0$ پیدا کنید. نتیجه خود را در مورد سرعت با به کار گرفتن قضیه انرژی بررسی کنید. به چه صورتی فرضهای این مسئله به طور فیزیکی غیرواقعی هستند؟ به چه صورتی، تحت فرضهای واقعی‌تری، جواب تغییر خواهد کرد؟

۱۵. موتور یک ماشین کورسی به جرم m در حداکثر سوخت (دود خارج کردن)، نیروی ثابت P را تولید می‌کند. با فرض اینکه اصطکاک متناسب با سرعت است، فرمولی برای $v(t)$ ، وقتی ماشین از خط شروع و حداکثر سوخت (دود خارج کردن) شتاب می‌گیرد، پیدا کنید. آیا جواب شما وقتی $t \rightarrow \infty$ ، به طور درست عمل می‌کند؟

۱۶. (الف) جسمی به جرم m بر روی صفحه افقی ناصافی می‌لغزد. ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s و ضریب اصطکاک لغزشی μ است. تابعی تحلیلی مانند $F(v)$ را پیدا کنید که در سرعتهای

قابل ملاحظه دارای مقدار ثابت مناسب باشد و در سرعت‌های بسیار کم به نیروی اصطکاک استاتیکی ساده بشود. (ب) معادله حرکت جسم را تحت تأثیر این نیرو اگر سرعت اولیه آن v_0 باشد، پیدا کنید.

۱۷. ذره‌ای به جرم m که در $x = 0$ با سرعت v_0 شروع به حرکت می‌کند تحت تأثیر نیرویی که به وسیله معادله $(2-3)$ با $n \neq 1$ داده می‌شود، قرار می‌گیرد. $x(t)$ و $v(t)$ ذره را پیدا کنید. زمان و مسافت لازم برای توقف را بیابید و صحت تذکرهای بند آخر بخش ۲-۴ را تحقیق کنید.

۱۸. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی

$$F = -kx + kx^3/a^2$$

است که در آن k و a ثابت‌اند.

(الف) $V(x)$ را پیدا کنید و در مورد انواع حرکت‌هایی که می‌توانند رخ دهند، بحث کنید.

(ب) نشان دهید که اگر $E = \frac{1}{2} k a^2$ باشد، انتگرال معادله $(2-4)$ را می‌توان با روش‌های ابتدایی محاسبه کرد. $x(t)$ را در این حالت، با انتخاب x_0 و t_0 به هر طریق راحتی، پیدا کنید. نشان دهید که نتیجه شما با بحث کیفیتی قسمت (الف) برای این انرژی خاص، توافق دارد.

۱۹. ذره‌ای به جرم m با نیرویی متناسب با عکس مکعب فاصله‌اش از مبدأ دفع می‌شود. اگر در ابتدا ذره در فاصله x_0 از مبدأ ساکن باشد، معادله حرکت را بنویسید و آن را حل کنید.

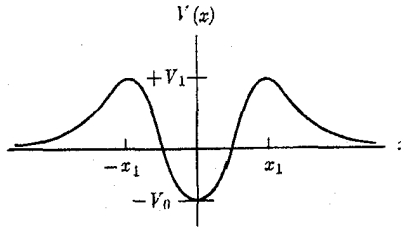
۲۰. جرم m توسط فنری به طول آزاد l و ضریب ثابت k به مبدأ وصل شده است. نیروی بازگرداننده، به تقریب بسیار متناسب است با مقداری که فشرده و یا فشرده می‌شود، البته به شرط آنکه فنر خیلی زیاد کشیده و یا فشرده نشده باشد. با این حال وقتی فنر بیش از حد فشرده شده باشد، نیرو به سرعت افزایش می‌یابد به طوری که فشردن فنر به کمتر از نصف طول آزادش غیرممکن است. وقتی فنر بیش از دو برابر طول آزادش کشیده شود، شروع به ضعیف شدن می‌کند و اگر خیلی زیاد کشیده شود، نیروی بازگرداننده آن صفر می‌شود. (الف) نیرویی مانند $F(x)$ را چنان پیدا کنید که نماینده این رفتار باشد. (البته وقتی یک فنر واقعی را بیش از اندازه بکشیم، تغییر شکل پیدا می‌کند به طوری که F تابعی از تاریخچه گذشته فنر خواهد بود، ولی شما در اینجا باید فرض کنید که F فقط به x بستگی دارد). (ب) $V(x)$ را بیابید و انواع حرکت ممکن را تشریح کنید.

۲۱. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیرویی است که انرژی پتانسیل آن عبارت است از

$$V = ax^2 - bx^3.$$

(الف) نیرو را پیدا کنید. (ب) ذره از مبدأ $x = 0$ با سرعت v_0 شروع می‌کند. نشان دهید که اگر $v_0 < |v_c|$ ، که در آن v_c یک سرعت حساس معینی است، ذره در ناحیه‌ای نزدیک مبدأ زندانی باقی خواهد ماند. v_c را پیدا کنید.

۲۲. یک ذره α در یک هسته به وسیله پتانسیلی نگه داشته می‌شود که در شکل ۲-۱۰ رسم شده است. (الف) انواع حرکت ممکن را توصیف کنید. (ب) تابعی به صورت $V(x)$ چنان پیدا کنید که دارای این شکل کلی باشد و در نقاط $x = 0$ و $x = \pm x_1$ به ترتیب دارای مقادیر V_1 و $-V_1$ باشد، و نیروی مربوط به این پتانسیل را پیدا کنید.



شکل ۲-۱۰

۲۳. ذره‌ای تحت تأثیر نیروی زیر قرار می‌گیرد

$$F = -kx + \frac{a}{x^3}.$$

(الف) پتانسیل $V(x)$ را پیدا و با استفاده از آن ماهیت جوابها را توصیف کنید، و جواب $x(t)$ را بیابید. (ب) اگر $E^2 \gg ka$ باشد، آیا می‌توانید تفسیر ساده‌ای برای حرکت ارائه کنید؟

۲۴. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی زیر قرار می‌گیرد

$$F = B \left(\frac{a^2}{x^2} - \frac{2\lambda a^5}{x^5} + \frac{2\nu a^8}{x^8} \right).$$

ذره فقط در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. (الف) تابع انرژی پتانسیل را یافته آن را رسم کنید، (B و a مثبت‌اند). (ب) انواع حرکت ممکن را توصیف کنید. تمام نقاط تعادل را مشخص کنید و فرکانس نوسانهای کوچک حول هر یک از نقاط تعادل را که پایدارند معین کنید. (پ) ذره‌ای در نقطه $x = 2a/2$ با سرعت $v = -v_0$ (مثبت) شروع به حرکت می‌کند. کوچکترین مقدار v_0 چقدر باشد تا ذره سرانجام بتواند به فاصله‌ای بسیار دور فرار کند؟ حرکت را در آن حالت توصیف کنید. حداکثر سرعت ذره چیست؟ وقتی ذره از نقطه شروع خیلی دور باشد، سرعت آن چقدر خواهد بود؟

۲۵. انرژی پتانسیل برای نیروی بین دو اتم در یک مولکول دو اتمی تقریباً به صورت زیر است:

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}},$$

که در آن x فاصله بین دو اتم و a و b ثابت‌هایی مثبت‌اند. (الف) تابع نیرو را پیدا کنید. (ب) با فرض آنکه یکی از اتمها خیلی سنگین باشد و ساکن باقی بماند و اتم دیگر سبک باشد و در امتداد خطی مستقیم حرکت کند، حرکات ممکن را توصیف کنید. (پ) اگر جرم اتم سبکتر m باشد، فاصله تعادل و زمان تناوب نوسانهای کوچک حول نقطه تعادل را به دست آورید.

۲۶. مطلوب است جواب حرکت جسمی که تحت تأثیر نیروی دافع خطی $F = kx$ قرار گرفته باشد. نشان دهید که این همان نوع حرکتی است که باید در حوالی نقطه تعادل ناپایدار انتظار داشت.

۲۷. ذره‌ای به جرم m در چاه پتانسیل زیر حرکت می‌کند

$$V(x) = \frac{-V_0 a^2 (a^2 + x^2)}{\lambda a^4 + x^4}.$$

(الف) $V(x)$ و $F(x)$ را رسم کنید. (ب) دربارهٔ حرکات ممکن بحث کنید. تمام نقاط تعادل را معین کنید و فرکانس نوسانهای کوچک را حول هر یک از نقاط تعادل که پایدارند به دست آورید. (پ) ذره‌ای با سرعت v از فاصلهٔ دوری به سوی چاه پتانسیل در حرکت است. وقتی از نقطهٔ $x = a$ می‌گذرد، با ذرهٔ دیگری برخورد می‌کند و در نتیجه به اندازهٔ α از انرژی پتانسیل خود را از دست می‌دهد. α باید چقدر باشد تا ذره پس از برخورد در چاه باقی بماند؟ α باید تا چه اندازه باشد تا ذره در یک طرف چاه باقی بماند؟ اگر $\alpha = 1$ باشد، نقاط برگشت حرکت جدید را بیابید.

۲۸. معادلهٔ (۲-۶۵) را به وسیلهٔ هر یک از روشهای بحث شده در بخشهای ۲-۳، ۲-۴، و ۲-۵ حل کنید.

۲۹. جوابهای (۲-۷۴) و (۲-۷۵) را برای جسمی افتان که تحت تأثیر نیروی اصطکاکی متناسب با مربع سرعت قرار گرفته است، بیابید.

۳۰. جسمی به جرم m از حالت سکون در محیطی که بدن نیروی اصطکاک کششی $|v|be^{\alpha|v|}$ را وارد می‌کند رها می‌شود. (الف) سرعت $v(t)$ جسم را بیابید. (ب) سرعت نهایی آن چیست؟ (پ) جواب خود را بر حسب t به صورت سری نمایی بسط دهید و جملات بالاتر از t^2 را حذف کنید. (ت) چرا جواب، ولو برای زمانهای کوتاه t با معادلهٔ (۱-۲۸) وفق نمی‌دهد؟

۳۱. گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ v به طور قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر نیروی اصطکاک کششی را متناسب با مربع سرعت فرض کنیم، معادلهٔ حرکت گلوله را بیابید. (g را ثابت بگیرید).

۳۲. معادلاتی مشابه معادلات (۲-۸۵) و (۲-۸۶) برای حرکت جسمی که سرعت آن بزرگتر از سرعت فرار باشد به دست آورید. [راهنمایی: $\sinh \beta = (Ex/mMG)^{1/2}$]

۳۳. مطلوب است معادلهٔ حرکت جسمی که با سرعتی مساوی با سرعت فرار به طور قائم از زمین به سمت بالا پرتاب شده باشد. از مقاومت هوا صرف نظر کنید.

۳۴. از تساوی $e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$ شروع کنید و فرمولهای $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ را بر حسب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ به دست آورید.

۳۵. از راه نوشتن $\cos \theta$ به صورت معادلهٔ (۲-۱۲۲) فرمول زیر را به دست آورید:

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta.$$

۳۶. جوابهای عمومی معادلات زیر را پیدا کنید:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} - kx = 0, \quad (\text{الف})$$

$$m\ddot{x} - b\dot{x} + kx = 0. \quad (\text{ب})$$

به فرض آنکه اینها معادلات حرکت ذره باشند، دربارهٔ تعبیر فیزیکی آنها و جوابهای آنها بحث کنید.

۳۷. نشان دهید که اگر $\omega^2 - \gamma^2$ خیلی کوچک باشد برای فاصلهٔ زمانی کوتاهی، جواب کند میرایی (۲-۱۳۳) و جواب میرایی بحرانی (۲-۱۴۶) تقریباً مساوی اند. رابطهٔ بین ضرایب C_1, C_2, C_3, A ، و θ چیست؟ این نتیجه نشان می‌دهد که چگونه ممکن است در حالت بحرانی جواب اضافی (۲-۱۴۳) را کشف کرد.

۳۸. یک واگن باری به وزن 10^4 kg که آزادانه روی خط حرکت می‌کند، با سرعت ۲ متر در ثانیه

به انتهای خطش می‌رسد. در انتهای خط یک متوقف‌کننده‌ای وجود دارد که از فنری با $k = 1/6 \times 10^4 \text{ kg/sec}^2$ تشکیل شده که به طور محکم به جایی بسته شده است. واگن فنر را متراکم می‌کند. اگر اصطکاک متناسب با سرعت باشد، ثابت میرایی b_c برای میرایی بحرانی را پیدا کنید. حرکت $x(t)$ را طراحی کنید و حداکثر فاصله‌ای را که فنر متراکم می‌شود (برای $b = b_c$) پیدا کنید. نشان دهید که اگر $b \geq b_c$ ، واگن در نهایت متوقف می‌شود، ولی اگر $b \leq b_c$ ، واگن دوباره متحرک می‌شود و روی خط به عقب بر می‌گردد. (دقت کنید که واگن به فنر بسته نشده است. تا زمانی که به فنر فشار می‌آورد، حرکتش طبق معادله نوسانگر هارمونیک است، با این تفاوت که به جای کشیدن فنر، روی خط به عقب حرکت می‌کند.)

۳۹. جرم m که تحت تأثیر نیروی بازگرداننده $-kx$ و نیروی میرایی $-b\dot{x}$ قرار گرفته است به اندازه x_0 از حالت تعادل خود جابه‌جا می‌شود و سپس با سرعت اولیه‌ای برابر صفر رها می‌گردد. معادله حرکت کند میرا و میرای بحرانی و تند میرا را پیدا کنید.

۴۰. مسئله ۳۹ را برای حالتی حل کنید که جرم از حالت تعادل خود با سرعت اولیه v_0 شروع به حرکت می‌کند. منحنی تقریبی معادله حرکت را برای سه حالت رسم کنید.

۴۱. مسئله ۳۹ را برای حالتی حل کنید که جرم دارای جابه‌جایی اولیه x_0 و سرعت اولیه v_0 است که به طرف پشت به سمت نقطه تعادل توجیه شده است. نشان دهید که اگر $|v_0| > |v_c|$ باشد، جرم تعادل را در حالتهای میرایی بحرانی و تند میرا فراجست خواهد کرد و در نتیجه ملاحظات آخر بخش ۲-۹ کاربرد ندارند. حرکت را در این حالتها طراحی کنید.

۴۲. علاقمندیم یک ترازوی حمام با یک سکوی انحراف یک اینچی زیر مردی ۲۰۰ پوندی، طرح‌ریزی کنیم. اگر حرکت قرار است میرایی بحرانی باشد، ثابت فنری لازم k و ثابت میرایی b را پیدا کنید. نشان دهید که برای یک آدم سبک‌تر حرکت تندمیرا خواهد بود. اگر مردی ۲۰۰ پوندی قدم روی ترازو بگذارد، نیروی بالایی حداکثر تولید شده توسط سکوی ترازو در مقابل پاهای او به هنگامی که سکو به حالت ساکن بر می‌گردد، چقدر است؟

۴۳. جرمی ۱۰۰۰ کیلوگرمی از ارتفاعی ۱۰ متری بر روی سکویی با جرم ناچیز رها می‌شود. فنر و ضربه‌گیری طرح کنید، که سکو بر روی آن نصب شود و در حداقل فاصله زمانی پس از برخورد و بی‌فراجست، به محل تعادل جدیدی $0/2$ متر زیر محل تعادل اولیه متوقف شود. (الف) k ضریب فنر و b ضریب میرایی ضربه‌گیر را پیدا کنید. به طور حتم جوابهای پیشنهادی $x(t)$ خود را امتحان کنید تا خاطر جمع شوید که شرایط اولیه درست را برقرار می‌کند و فراجست نمی‌کند. (ب) زمان لازم را برای آنکه سکو به فاصله یک میلی‌متری تعادل نهایی خود برسد، تا دو رقم معنی‌دار تقریب حساب کنید.

۴۴. نیروی $F \cdot e^{-at}$ به یک نوسانگر هارمونیک به جرم m ، ثابت فنری k ، و ثابت میرایی b وارد می‌شود. با شروع این حدس که جوابی باید وجود داشته باشد که همانند نیروی وارده به زمان وابسته باشد، یک جواب خصوصی معادله حرکت را پیدا کنید.

۴۵. (الف) با حدس جواب حالت پاینده معادله غیرهمگن (۲-۹۱) و با اضافه کردن جواب معادله همگن به آن، حرکت یک نوسانگر هارمونیک میرا را پیدا کنید که تحت تأثیر نیروی ثابت F قرار گرفته باشد. (ب) همین مسئله را با تغییر متغیر $x' = x - a$ و انتخاب ثابت a به طوری که معادله

برحسب x به معادله همگن (۲-۹۰) تبدیل شود، حل کنید. و از آنجا نشان دهید که اثر به کار بردن نیروی ثابت فقط جابه‌جا کردن مکان تعادل است بی‌آنکه در ماهیت نوسانها اثری بگذارد.

۴۶. نوسانگر هارمونیک کند میرایی تحت تأثیر نیروی زیر قرار می‌گیرد

$$F = F_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta).$$

با در نظر گرفتن F به عنوان قسمت حقیقی یک تابع نمایی مختلط و تجسس جوابی که دارای همان بستگی نمایی به x باشد، یک جواب خاص به دست آورید.

۴۷. یک نوسانگر هارمونیک نامیرا ($b = 0$) که در ابتدا ساکن است، از زمان $t = 0$ تحت تأثیر نیروی وارده $F_0 \sin \omega t$ است. حرکت $x(t)$ را پیدا کنید.

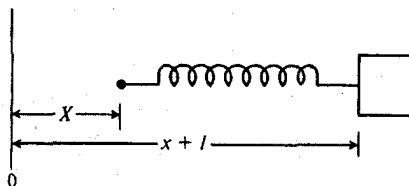
۴۸. یک نوسانگر هارمونیک نامیرا ($b = 0$) تحت تأثیر نیروی وارده $F_0 \cos \omega t$ است. نشان دهید که اگر $\omega = \omega_0$ باشد، جواب حالت پایدار وجود ندارد. با شروع کردن با جوابی برای $\omega = \omega_0 + \varepsilon$ و سپس حد گرفتن وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ ، یک جواب مخصوص پیدا کنید. [راهنمایی]. اگر با جواب حالت پایدار شروع کنید و $\varepsilon \rightarrow 0$ میل کند، جواب بیش از اندازه بزرگ می‌شود. سعی کنید با جوابی شروع کنید که مناسب شرط اولیه $x_0 = 0$ است، و در نتیجه در لحظه $t = 0$ نتواند بیش از اندازه بزرگ شود.]

۴۹. یک نوسانگر هارمونیک میرایی بحرانی با جرم m و ثابت فنری k تحت تأثیر یک نیروی وارده $F_0 \cos \omega t$ است. اگر در $t = 0$ ، $x = x_0$ و $v = v_0$ باشند، $x(t)$ چیست؟

۵۰. نیروی $F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$ در لحظه $t = 0$ بر نوسانگر هارمونیک میرایی وارد می‌شود. (الف) x و v چه مقادیر اولیه‌ای باید داشته باشند تا گذرا وجود نداشته باشد؟ (ب) اگر $x_0 = v_0 = 0$ باشد، دامنه A و فاز θ گذرا را بر حسب F_0 و θ_0 به دست آورید.

۵۱. جرمی m به فنری وصل است که دارای ثابت نیرویی k و طول آزاد l است که در شکل ۲-۱۱ نشان داده شده است. انتهای چپ فنر ثابت نیست بلکه طوری ساخته شده است که با دامنه a و فرکانس ω آنچنان نوسان می‌کند که $X = a \sin \omega t$ از مرجع ثابت 0 اندازه‌گیری می‌شود. معادله حرکت را بنویسید و نشان دهید که معادل معادله (۲-۱۴۸) با نیروی وارده $ka \sin \omega t$ است اگر اصطکاک به وسیله معادله (۲-۳۱) داده شده باشد. نشان دهید که اگر اصطکاک از یک ارتعاش سنج که به دو انتهای فنر وصل شده است بیاید و در نتیجه نیروی اصطکاک $b(\dot{x} - \dot{X})$ است، معادله حرکت دارای نیروی وارده اضافی $\omega b a \cos \omega t$ است.

۵۲. اتومبیلی به وزن یک تن (که با مسافرین و بدون در نظر گرفتن وزن چرخها و هر چیز دیگری که



شکل ۲-۱۱

زیر فرهاست، ۲۰۰۰ پوند است) برای هر ۲۰۰ پوند وزن مسافرها یک اینچ نزدیکتر به جاده نشست می‌کند. این اتومبیل روی یک جاده موج‌دار با موجهای سینوسی که دارای فاصله‌ای برابر یک پا بین برجستگیها و دامنه‌ای برابر ۲ (در ارتفاع برجستگیها و عمق سوراخها از سطح متوسط جاده) هستند، با سرعت ۲۰ میل در ساعت رانده می‌شود. با فرض آنکه حرکت عمودی اتومبیل حرکت یک نوسانگر هارمونیک ساده بی‌میرایی است (بدون دستگاه ارتعاش‌گیر) دامنه نوسان اتومبیل را پیدا کنید (از وزن چرخها و فنها صرف نظر کنید). اگر دستگاه ارتعاش‌گیر اضافه شود که میرایی ایجاد کند، سواری بهتر یا بدتر می‌شود؟ (نتیجه مسئله ۵۱ را به کار ببرید).

۵۳. نوسانگر هارمونیک نامیرایی به جرم m و فرکانس طبیعی ω در ابتدا ساکن است و در لحظه $t = 0$ ضربتی به آن وارد می‌شود چنانکه از $x = 0$ با سرعت اولیه v شروع به حرکت و تا $t = 3\pi/2\omega$ به آزادی نوسان می‌کند. از این لحظه به بعد، نیروی $F = B \cos(\omega t + \theta)$ اعمال می‌شود. معادله حرکت را بیابید.

۵۴. جرم m تحت تأثیر نیروی بازگرداننده $-kx$ و نیروی میرایی $\pm \mu mg$ ناشی از اصطکاک لغزشی خشک قرار گرفته است. معادله حرکت جسم را پیدا کنید. نشان دهید که نوسانها، یک زمان اند^۱ (زمان تناوب مستقل از دامنه) و دامنه نوسان در هر نصف دور به اندازه $2\mu g/\omega$ کاهش می‌یابد تا آنکه متوقف شود. [راهنمایی. نتیجه مسئله ۴۵ را به کار ببرید. هرگاه نیرو مانند این حالت در زمانهای مختلف حرکت صور جبری مختلفی داشته باشد و علامت نیروی میرایی ناچار چنان باید اختیار شود که همیشه نیرو با سرعت مختلف‌الجهت باشد، لازم است که معادله حرکت را برای هر فاصله زمانی که طی آن عبارت خاصی برای نیرو باید به کار رود، به طور جداگانه پیدا کرد و شرایط اولیه را برای هر فاصله زمانی و مکان و سرعت نهایی فاصله زمانی قبلی، اختیار کرد].

۵۵. نوسانگر هارمونیک نامیرایی ($\gamma = 0$) ساکنی تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد که به وسیله معادله (۲-۱۹۱) داده شده است. (الف) $x(t)$ را پیدا کنید. (ب) اگر p ثابت باشد، برای چه مقدار δt دامنه نهایی نوسان بزرگترین مقدار را خواهد داشت؟ (پ) نشان دهید که اگر $\delta t \rightarrow 0$ میل کند، جواب شما به جواب داده شده توسط معادله (۲-۱۹۰) میل می‌کند.

۵۶. جواب مشابه معادله (۲-۱۹۰) را برای یک نوسانگر هارمونیک میرایی بحرانی پیدا کنید که در لحظه $t = t_0$ تحت تأثیر ضربه p قرار گرفته باشد.

۵۷. (الف) با استفاده از قانون ترکیب، حرکت نوسانگر کند میرایی $[\gamma = (1/3)\omega]$ ساکنی را پیدا کنید که در $t = 0$ تحت تأثیر نیروی زیر قرار گرفته باشد

$$F = A \sin \omega t + B \sin 3\omega t,$$

که در آن ω فرکانس طبیعی نوسانگر است. (ب) نسبت B به A چه مقدار باید باشد تا نوسان واداشته با فرکانسهای 3ω و ω دارای دامنه‌های برابر باشد.

۵۸. نیروی $F \cdot (1 - e^{-at})$ بر نوسانگر هارمونیک وارد می‌شود که در لحظه $t = 0$ ساکن است.

جرم نوسانگر m و ضریب ثابت فنر $k = \gamma ma^2$ و $b = ma$ است. معادله حرکت را بیابید و $x(t)$ را رسم کنید.

*۵۹. مسئله ۵۸ را برای حالت $k = ma^2$ و $b = \gamma ma$ حل کنید.

۶۰. با استفاده از روش سری فوری، جواب حالت پاینده یک نوسانگر هارمونیک میرا را پیدا کنید که تحت تأثیر نیروی زیر قرار گرفته است.

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } nT < t \leq (n + \frac{1}{4})T, \\ F_0, & \text{اگر } (n + \frac{1}{4})T < t \leq (n+1)T, \end{cases}$$

که در آن n هر عدد صحیح و $T = 6\pi/\omega$ و ω فرکانس همسازی نوسانگر است. نشان دهید که اگر $\omega \ll \gamma$ باشد، حرکت تقریباً سینوسی است و زمان تناویش $T/3$ است.

۶۱. یک نوسانگر هارمونیک نامیرا تحت تأثیر نیروی است به شکل موج سینوسی اصلاح شده

$$F(t) = F_0 |\sin \omega_0 t|,$$

که در آن ω فرکانس طبیعی نوسانگر است. با استفاده از روش سری فوری، جواب حالت پایدار نوسانگر را پیدا کنید.

۶۲. مسئله ۵۸ را با استفاده از جواب گرین (۲-۲۱۰) پیدا کنید.

۶۳. نوسانگر کند میرای ساکنی در لحظه $t = 0$ تحت تأثیر نیروی قرار می‌گیرد که توسط معادله (۲-۱۹۱) داده شده است. با استفاده از روش گرین (۲-۲۱۰)، حرکت آن را بیابید.

۶۴. با استفاده از نتیجه مسئله ۵۶، از طریق روش گرین، حرکت نوسانگر ساکنی را با میرایی بحرانی پیدا کنید که تحت تأثیر $F(t)$ قرار گرفته باشد.

حرکت دو یا سه بعدی

۱-۳ جبر برداری

بحث حرکت دو یا سه بعدی با وارد کردن مفهوم بردار بسیار ساده می شود. یک بردار از نظر هندسی به صورت کمیتی فیزیکی تعریف می شود که به وسیله اندازه و جهتی در فضا مشخص می گردد. مانند سرعت، نیرو، و مکان نسبت به یک مبدأ ثابت. یک بردار را با یک پیکان نمایش می دهند که طول و جهت آن نمایشگر اندازه و جهت بردار است. ما برای نشان دادن بردارها از حروف سیاه ایتالیک و یا از حروف یونانی سیاه استفاده کرده ایم، مانند A و α . اندازه آنها را به وسیله همان حروف لاتینی، بدون علامت فلش نشان می دهیم (به شکل ۱-۳ توجه کنید). اندازه بردار را می توان به وسیله قرار دادن دو خط در کنار علامت بردار نیز نشان داد:

$$A = |A|. \quad (1-3)$$

دو بردار هنگامی با هم مساوی اند که هم اندازه و هم جهت باشند. مفهوم بردار به خودی خود، هیچ گونه اشاره ای به مکان خاصی نمی کند.^۱

کمیتی را که به وسیله اعداد معمولی (مثبت یا منفی) نمایش داده می شود شماره‌واره نامند تا از بردار متمایز باشند. حاصل ضرب بردار A در شماره‌واره مثبت c عبارت است از بردار cA که با بردار A هم جهت، و اندازه اش cA باشد. اگر c منفی باشد cA را برداری تعریف می کنیم که اندازه اش $|c|A$ و جهتش مخالف با A باشد. (به شکل ۲-۳ مراجعه کنید) از این تعریف نتیجه می شود که

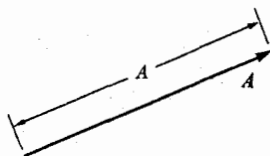
$$|cA| = |c| |A|. \quad (2-3)$$

طبق این تعریف، به راحتی می توان نشان داد که حاصل ضرب یک بردار در یک عدد دارای خاصیت شرکت پذیری است، یعنی

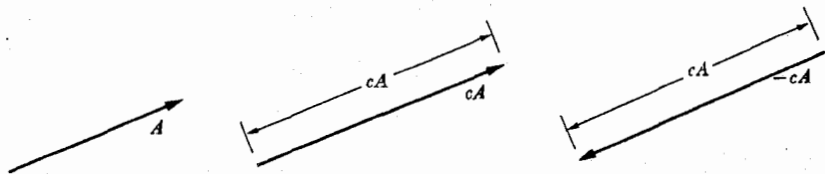
$$(cd)A = c(dA). \quad (3-3)$$

در بعضی از موارد راحت تر است که شماره‌واره را در طرف راست بردار نوشت، و ما Ac را بنا به

۱. گاه بردار «آزاد»، که هیچ گونه مکان خاصی در فضا ندارد، و بردار «لغزنده»، که می تواند هر محلی را در امتداد خطی اختیار کند و بردار «ثابت» را که در نقطه معینی از فضا باید ثابت باشد، از هم متمایز می دانند. اینجا ترجیح می دهیم که بردار را فقط به وسیله اندازه و جهت آن مشخص کنیم. بنابراین دو بردار هنگامی با هم برابرند که هم اندازه و هم جهت باشند، بی آنکه توجهی به مکان آنها در فضا داشته باشیم. در حالت یک کمیت برداری مانند نیرو، ممکن است لازم باشد که نه تنها بردار که بیانگر اندازه و جهت است بلکه مکانی که نیرو وارد می شود را مشخص کرد.



شکل ۱-۳ نمودار بردار A و اندازه‌اش A .



شکل ۲-۳ تعریف ضرب یک بردار، در یک شمارهواره ($c > 0$).

تعریف همان بردار cA می‌دانیم:

$$Ac = cA. \quad (۴-۳)$$

حاصل جمع دو بردار A و B بنا به تعریف عبارت است از بردار $(A + B)$ که ابتدای آن، ابتدای بردار A و انتهای آن، انتهای بردار B باشد، به شرط آن که مانند شکل ۳-۳ انتهای A در ابتدای B قرار گرفته باشد. این تعریف با قانون متداول متوازی الاضلاع معادل و استفاده از آن راحت تر است. این تعریف را به سهولت می‌توان چنانکه در شکل ۴-۳ می‌بینید، در مورد حاصل جمع چند بردار نیز گسترش داد.

طبق تعریف بیان شده در شکل ۳-۳ به راحتی می‌توان ثابت کرد که حاصل جمع بردارها دارای خاصیت‌های جابه‌جایی و شرکت‌پذیری است:

$$A + B = B + A, \quad (۵-۳)$$

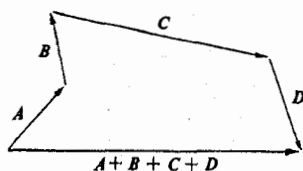
$$(A + B) + C = A + (B + C). \quad (۶-۳)$$

بنا به معادله (۶-۳)، در موقع جمع کردن بردارها می‌توان پرانتزها را حذف کرد، زیرا ترتیب جمع کردن بردارها در حاصل جمع آنها اثری ندارد. طبق تعاریف داده شده در شکل‌های ۲-۳ و ۳-۳ می‌توان قوانین توزیع‌پذیری زیر را ثابت کرد:

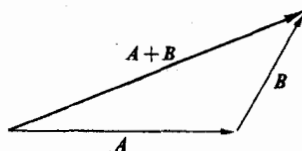
$$c(A + B) = cA + cB, \quad (۷-۳)$$

$$(c + d)A = cA + dA. \quad (۸-۳)$$

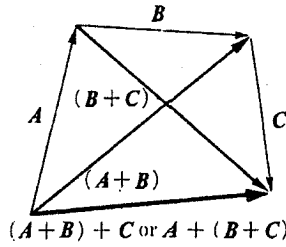
این گزاره‌ها را می‌توان به کمک رسم شکل‌هایی که نماینده جملات طرف راست و چپ هر معادله



شکل ۴-۳ دو چند بردار.



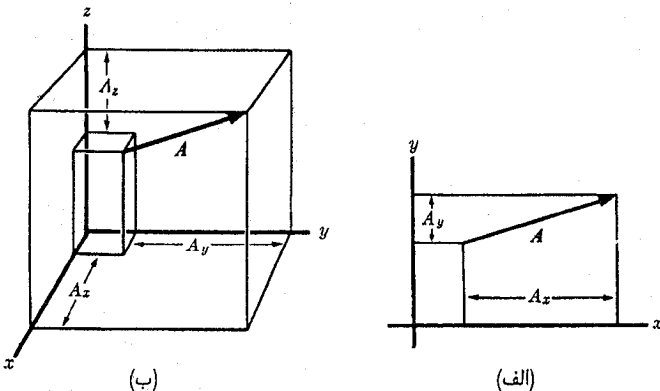
شکل ۳-۳ تعریف جمع دو بردار.



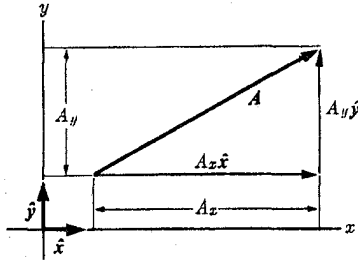
شکل ۳-۵ اثبات معادله (۳-۶).

باشند، طبق تعاریف داده شده ثابت کرد. به عنوان مثال، از شکل ۳-۵ به وضوح نتیجه می شود که حاصل جمع بردار C با بردار $(A+B)$ همان حاصل جمع بردار $(B+C)$ با بردار A است. طبق معادلات (۳-۳) تا (۳-۸)، حاصل جمع و حاصل ضربی که برای بردارها تعریف کردیم، اکثر خواص جبری حاصل جمع و حاصل ضرب اعداد معمولی را دارند. به این دلیل هم آنها را حاصل جمع و حاصل ضرب می نامیم. بنابراین احتیاجی نیست که این نتایج را در حافظة خود نگه داریم. فقط لازم است به خاطر داشته باشیم که می توانیم با این حاصل جمعها و حاصل ضربها درست مانند حاصل جمعها و حاصل ضربهای اعداد در جبر معمولی عمل کنیم، البته با این استثنا که ضرب تعریف شده به وسیله شکل ۳-۲ را فقط با یک بردار و یک شمارواره می توان انجام داد و نتیجه عمل یک بردار است.

یک بردار را می توان بر حسب مؤلفه ها و یا تصاویر آن بر روی دستگاهی از محورهای مختصات به صورت جبری نمایش داد. از ابتدا و انتهای بردار عمودهایی بر محور فرود می آوریم (مانند شکل ۳-۶). و طول آن قسمت از محور را که مابین عمودها قرار گرفته است، مؤلفه بردار در امتداد آن محور تعریف می کنیم. مؤلفه بردار، بر حسب آن که تصویر انتهای آن نسبت به تصویر ابتدا، روی محور، در جهت مثبت یا منفی قرار گرفته باشد، مثبت یا منفی خواهد بود.



شکل ۳-۶ (الف) مؤلفه های یک بردار در یک صفحه. (ب) مؤلفه های یک بردار در فضا.



شکل ۷-۳ اثبات فرمول $A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$ به کمک شکل.

مؤلفه‌های بردار A در امتداد محورهای x ، y ، و z به ترتیب به صورت A_x ، A_y ، و A_z نوشته می‌شود. بعضی اوقات بردار A را به وسیله علامت (A_x, A_y, A_z) نمایش می‌دهند:

$$A = (A_x, A_y, A_z). \quad (9-3)$$

اگر بردارهای \hat{x} ، \hat{y} ، \hat{z} به طول واحد را به ترتیب در امتداد محورهای x ، y ، و z تعریف کنیم می‌توانیم هر بردار را بر حسب مجموع حاصل ضرب مؤلفه‌های آن در \hat{x} ، \hat{y} ، \hat{z} بنویسیم:

$$A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}. \quad (10-3)$$

صحت این فرمولها را می‌توان با رسم شکلی آشکار ساخت، که در آن حاصل جمع سه بردار سمت راست که با امتداد محورها موازی‌اند برابر A می‌شود. شکل ۷-۳ این ترکیب را در حالت دوبعدی نشان می‌دهد.

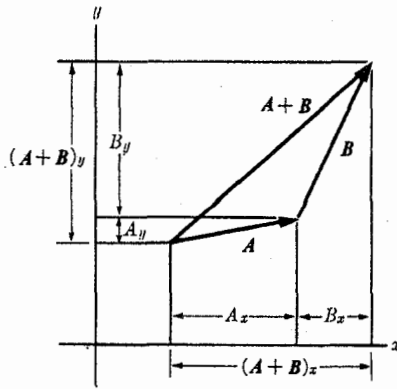
اکنون دو روش معادل را برای تعریف بردار در اختیار داریم: یکی روش هندسی، که بنابر آن بردار کمیتی است در فضا که اندازه و جهت دارد و دیگری روش جبری، که بنابر آن بردار مجموعه‌ای است از سه عدد (A_x, A_y, A_z) که آنها را مؤلفه‌های بردار می‌نامیم.^۲ اعمال جمع بردارها و ضرب یک عدد در یک بردار را که در شکل‌های ۲-۳ و ۳-۳ به‌طور هندسی بر حسب طول و جهت بردارها تعریف شدند می‌توان به‌طور جبری نیز به‌صورت اعمالی روی مؤلفه‌های بردارها تعریف کرد. بنابراین cA ، برداری است که مؤلفه‌های آن همان مؤلفه‌های بردار A است که هر یک در c ضرب شده‌اند:

$$cA = (cA_x, cA_y, cA_z), \quad (11-3)$$

و $A + B$ برداری است که مؤلفه‌های آن به وسیله جمع کردن مؤلفه‌های بردارهای A و B به‌دست می‌آیند:

$$A + B = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z). \quad (12-3)$$

۱. برای نشان دادن بردار واحد طول از علامت کلاه بر روی حرف خمیده (ایتالیک) سیاه استفاده می‌کنیم.
 ۲. دو روش تعریف بردار به‌صورتی که در اینجا داده شده‌اند کاملاً معادل نیستند، زیرا تعریف جبری مستلزم آن است که دستگاه مختصاتی برقرار شود در حالی که تعریف هندسی به هیچ‌گونه مجموعه محور خاصی مربوط نیست. این نقص را با مستقل ساختن تعریف جبری از هر گونه مجموعه محورهای خاص می‌توان جبران کرد. این کار را می‌توان با مطالعهٔ چگونگی تغییر مؤلفه‌ها در اثر تغییر محورها و تعریف جبری بردار به‌صورت مجموعه‌ای از سه کمیت که با تغییر محورها به طریقی تغییر می‌یابند، انجام داد. البته در این فصل، ما چنین کاری نخواهیم کرد.



شکل ۳-۸ اثبات معادل بودن تعاریف جبری و هندسی حاصل جمع برداری.

معادل بودن تعاریف جبری (۳-۱۱) و (۳-۱۲) با تعاریف هندسی مربوط را می‌توان به وسیلهٔ رسم تصاویر مناسب نشان داد. شکل ۳-۸ به منزلهٔ اثباتی برای (۳-۱۲) در حالت دوبعدی است. در شکل ۳-۸، معادلهٔ بردارها همه چنان رسم شده‌اند که مؤلفه‌های آنها مثبت باشند. برای اثبات کامل باید شکلی رسم کنید که در آن یک یا هر دو مؤلفهٔ هر یک از بردارها منفی باشد. طول بردار را می‌توان به‌طور جبری به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$|A| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}, \quad (3-13)$$

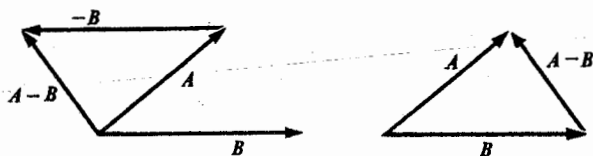
که در آن ریشهٔ مثبت قابل قبول است.

اکنون می‌توان به کمک تعاریف (۳-۱۱)، (۳-۱۲)، و (۳-۱۳) معادلات (۳-۲)، (۳-۳)، (۳-۵)، (۳-۶)، (۳-۷)، و (۳-۸) را به‌طور جبری ثابت کرد. به‌عنوان مثال برای اثبات معادلهٔ (۳-۷) نشان می‌دهیم که مؤلفه‌های بردارهای طرف چپ و راست یک‌به‌یک با هم توافق دارند. مثلاً برای مؤلفهٔ x ، اثبات چنین است:

$$\begin{aligned} [c(A+B)]_x &= c(A+B)_x && \text{طبق معادلهٔ (۳-۱۱)} \\ &= c(A_x + B_x) && \text{طبق معادلهٔ (۳-۱۲)} \\ &= cA_x + cB_x \\ &= (cA)_x + (cB)_x && \text{طبق معادلهٔ (۳-۱۱)} \\ &= (cA + cB)_x. && \text{طبق معادلهٔ (۳-۱۲)} \end{aligned}$$

از آنجا که در تعاریف (۳-۱۱)، (۳-۱۲)، و (۳-۱۳) با کلیهٔ مؤلفه‌ها یکسان رفتار شده است، همین استدلال برای مؤلفه‌های y و z نیز معتبر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای طرف چپ و راست معادلهٔ (۳-۷) مساوی‌اند.

چون تعاریف هندسی و جبری عملیات برداری با هم معادل‌اند، احتیاجی نیست که برای کاربردهای هندسی، هر فرمول جبر برداری را به طریق هندسی و جبری هر دو ثابت کنیم. هر یک از اثباتهای هندسی یا جبری که ساده‌تر باشد، کافی است. با وجود این موارد مهمی در فیزیک وجود دارد که



شکل ۳-۹ دو راه برای تفریق بردارها.

ناچاریم کمیت‌هایی را در نظر بگیریم که از نظر جبری مانند مؤلفه‌های یک بردارند ولی از نظر هندسی نمی‌توان آنها را به صورت کمیت‌هایی مقدار و جهت‌دار در فضای معمولی تعبیر کرد. به منظور اعمال قواعد جبر برداری بر چنین کاربردهایی مهم این است که بدانیم کلیه این قواعد را می‌توان به طور جبری محض از طریق تعاریف جبری عملیات برداری ثابت کرد. مزیت روش هندسی در این است که ما را قادر می‌سازد تا معانی علائم و فرمول‌های برداری مختلف را مجسم کنیم. روش جبری، بعضی از اثبات‌ها را ساده می‌کند و مزیت دیگر آن این است که کاربردهای وسیع مفهوم ریاضی بردار، از جمله موارد بسیاری را که معانی هندسی معمولی آنها دیگر نمی‌توانند حفظ شوند امکان‌پذیر می‌سازد. می‌توان تفریق بردارها را به وسیله ضرب آنها در شماره‌واره ۱- و سپس جمع بردار حاصل با بردار دیگر تعریف کرد.

$$A - B = A + (-B) = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z) \quad (14-3)$$

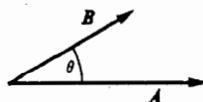
تفاضل $A - B$ را می‌توان طبق هر یک از دو طرح شکل ۳-۹ به طور هندسی به دست آورد. می‌توان نشان داد که تفریق بردارها دارای کلیه خواص جبری است که باید به اعتبار شباهت با تفریق اعداد انتظار داشت.

حاصل ضرب شماره‌واره‌ای^۱ دو برابر A و B (که با $A \cdot B$ نشان داده می‌شود) عبارت است از حاصل ضرب اندازه‌های آنها در کسینوس زاویه بین آنها (شکل ۳-۱۰):

$$A \cdot B = AB \cos \theta \quad (15-3)$$

حاصل ضرب شماره‌واره‌ای دو بردار یک عدد است. حاصل ضرب شماره‌واره‌ای را حاصل ضرب نقطه‌ای^۲ یا داخلی^۳ نیز می‌گویند و می‌توان آن را به صورت حاصل ضرب اندازه هر یک از بردارها در تصویر بردار دیگر بر روی آن، تعریف کرد. مثلاً یکی از فواید این تعریف در بیان کار انجام شده به وسیله نیروی F است در طول فاصله s (که ممکن است موازی آن نباشد).

$$W = F s \cos \theta = F \cdot s$$



شکل ۳-۱۰ زاویه بین دو بردار.

حق داریم $A \cdot B$ را حاصل ضرب بنامیم، زیرا دارای خواص جبری زیر است که به کمک تعریف هندسی (۱۵-۳)^۱ به راحتی ثابت می‌شوند:

$$(cA) \cdot B = A \cdot (cB) = c(A \cdot B), \quad (۱۶-۳)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (۱۷-۳)$$

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad (۱۸-۳)$$

$$A \cdot A = A^2. \quad (۱۹-۳)$$

این معادلات نشان می‌دهند که از نظر جبری حاصل ضرب داخلی همانند حاصل ضرب اعداد معمولی است، به شرط آنکه همیشه به خاطر داشته باشیم که دو عامل ضرب شونده باید بردار باشند و نتیجه ضرب یک شمارواره است. همچنین از تعریف (۱۵-۳) می‌توان نتایج زیر را به دست آورد که در آن \hat{x} ، \hat{y} ، و \hat{z} سه بردار واحد در امتداد سه محور مختصات اند:

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1,$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0. \quad (۲۰-۳)$$

$$A \cdot B = AB, \quad (-AB), \quad \text{وقتی } A \text{ به موازات } B \text{ باشد,} \quad (۲۱-۳)$$

$$A \cdot B = 0, \quad \text{وقتی } A \text{ عمود بر } B \text{ باشد.} \quad (۲۲-۳)$$

توجه کنید که طبق معادله (۲۲-۳)، اگر دو بردار A و B بر هم عمود باشند، اگر چه اندازه هیچ کدام صفر نیست، حاصل ضرب داخلی آنها صفر است.

حاصل ضرب داخلی را می‌توان از نظر جبری بر حسب مؤلفه‌ها به صورت زیر نیز تعریف کرد:

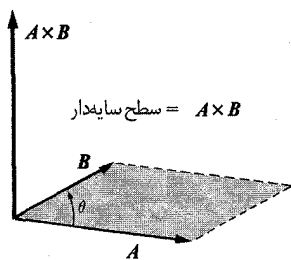
$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (۲۳-۳)$$

برای اثبات معادل بودن معادله (۲۳-۳) و تعریف هندسی (۱۵-۳)، دو بردار A و B را به صورت معادله (۱۰-۳) می‌نویسیم و از معادلات (۱۶-۳)، (۱۷-۳)، (۱۸-۳)، و (۲۰-۳) که از معادله (۱۵-۳) نتیجه می‌شوند استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \cdot (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z) \\ &= (\hat{x} \cdot \hat{x})A_x B_x + (\hat{x} \cdot \hat{y})A_x B_y + (\hat{x} \cdot \hat{z})A_x B_z + (\hat{y} \cdot \hat{x})A_y B_x \\ &\quad + (\hat{y} \cdot \hat{y})A_y B_y + (\hat{y} \cdot \hat{z})A_y B_z + (\hat{z} \cdot \hat{x})A_z B_x + (\hat{z} \cdot \hat{y})A_z B_y + (\hat{z} \cdot \hat{z})A_z B_z \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \end{aligned}$$

و بدین ترتیب معادله (۲۳-۳) ثابت می‌شود. تمام خواص (۱۶-۳) تا (۲۰-۳) را می‌توان به آسانی از تعریف جبری (۲۳-۳) یا تعریف هندسی (۱۵-۳) ثابت کرد. معادلات (۲۱-۳) و (۲۲-۳) را می‌توان به ترتیب به عنوان تعریف جبری بردارهای موازی و عمود در نظر گرفت.

۱. توجه کنید که ما معادله (۱۵-۳) را تعریفی هندسی می‌نامیم اگر چه به صورت معادله بیان شده است، به این خاطر که رجوع می‌کند به اندازه‌ها و جهات A و B و نه به مؤلفه‌هایشان در امتداد هر مجموعه خاصی از محورها. همچنین یک اثبات هندسی ممکن است از محاسبات جبری استفاده کند تا زمانی که به مؤلفه‌ها در امتداد محورهای مختصات رجوع نکند.



شکل ۱۱-۳ تعریف حاصل ضرب برداری.

حاصل ضرب دیگری که باید تعریف کرد، حاصل ضرب برداری^۱ و یا حاصل ضرب خارجی^۲ دو بردار است. حاصل ضرب خارجی دو بردار A و B که با $(A \times B)$ نشان داده می‌شود، برداری است که بر صفحه A و B عمود است و اندازه‌اش برابر مساحت متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع مجاورش دو برابر A و B باشند. جهت $(A \times B)$ بنا به تعریف جهت پیشروی پیچ راست‌گردی است که از A و B می‌چرخد. (شکل ۱۱-۳ را ببینید.) اندازه $(A \times B)$ بر حسب زاویه θ بین دو بردار چنین است

$$|A \times B| = AB \sin \theta. \quad (۲۴-۳)$$

توجه کنید که حاصل ضرب شمارواره‌ای دو بردار، یک شمارواره یا عدد است در حالی که حاصل ضرب برداری دو بردار، بردار جدیدی است. حاصل ضرب برداری دارای خواص جبری زیر است که به کمک تعریف بیان شده توسط شکل ۱۱-۳ ثابت می‌شوند:

$$A \times B = -B \times A, \quad (۲۵-۳)$$

$$(cA) \times B = A \times (cB) = c(A \times B), \quad (۲۶-۳)$$

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C), \quad (۲۷-۳)$$

$$(A \times A) = 0, \quad (۲۸-۳)$$

$$A \times B = 0, \quad \text{وقتی } A \text{ و } B \text{ موازی باشند.} \quad (۲۹-۳)$$

$$|A \times B| = AB, \quad \text{وقتی } A \text{ و } B \text{ متعامد باشند.} \quad (۳۰-۳)$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0,$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}. \quad (۳۱-۳)$$

بنابراین حاصل ضرب خارجی را می‌توانیم از نظر جبری مانند حاصل ضرب معمولی بدانیم با این تفاوت که ترتیب ضرب کردن را نباید تغییر بدهیم و نیز به شرط آنکه به خاطر بسپاریم که دو عامل ضرب شونده باید بردار باشند و نتیجه نیز یک بردار است. اگر در حاصل ضرب خارجی، ترتیب قرار گرفتن عوامل ضرب شونده را تغییر دهیم علامت حاصل ضرب تغییر می‌کند. این اولین اختلاف

1. Vector Product

2. Outer Product

۳. در اینجا 0 نماینده برداری است که طولش صفر است و جهت خاصی در فضا ندارد و گاهی آن را بردار صفر (null vector) نیز می‌نامند. بردار صفر دارای خواص زیر است:

$$A + 0 = A, A \cdot 0 = 0, A \times 0 = 0 \quad \text{و} \quad A - A = 0, 0 = (0, 0, 0).$$

غیرمنتظر بین قواعد جبر برداری و جبر معمولی است. بنابراین خواننده بهتر است معادله (۳-۲۵) را در حافظه خود نگه دارد و معادلات (۳-۲۹) و (۳-۳۰) و معادلات مشابه (۳-۲۱) و (۳-۲۲) نیز بهتر است به ذهن سپرده شوند. (لازم به تذکر نیست که خواننده کلیه تعاریف هندسی و جبری را باید حفظ داشته باشد). در یک حاصل ضرب خارجی مکرر مانند $(A \times B) \times (C \times D)$ ، پرانتزها را نمی توان حذف کرد یا جای آنها را تغییر داد، زیرا نتیجه انجام عمل ضرب به ترتیبی دیگر در حالت کلی یکی نیست. [برای مثال معادلات (۳-۳۵) و (۳-۳۶) را ببینید.] توجه کنید که طبق معادله (۳-۲۹) حاصل ضرب خارجی دو بردار ممکن است صفر باشد بی آنکه هیچ یک از آنها بردار صفر بوده باشند. اگر در معادلات (۳-۲۵) تا (۳-۳۱) برای نمایش A و B از تساوی (۳-۱۰) استفاده کنیم، می توانیم ثابت کنیم که تعریف هندسی (شکل ۳-۱۱) با تعریف جبری زیر برای حاصل ضرب خارجی بردارها، معادل است:

$$(A \times B) = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x). \quad (3-32)$$

همچنین حاصل ضرب $A \times B$ را می توان به صورت یک دترمینان نوشت:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (3-33)$$

طبق قوانین معمولی دترمینان، بسط طرف راست معادله فوق، به همان معادله (۳-۳۲) منجر می شود. باز می بینیم که خواص (۳-۲۵) تا (۳-۳۱) از تعریف جبری (۳-۳۲) نیز نتیجه می گردند. اتحادهای مفید زیر قابل اثبات اند:

$$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C, \quad (3-34)$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B), \quad (3-35)$$

$$(A \times B) \times C = B(A \cdot C) - A(B \cdot C), \quad (3-36)$$

$$\hat{x} \cdot (\hat{y} \times \hat{z}) = 1. \quad (3-37)$$

سه اتحاد اول بهتر است به خاطر سپرده شوند. از معادله (۳-۳۴) نتیجه می شود که در حاصل ضرب سه گانه شمارواره ای می توان جای نقطه و ضربدر را عوض کرد. و همچنین می توان نشان داد که کمیت $A \cdot (B \times C)$ حجم متوازی السطوحی است که یالهای آن A ، B ، و C و علامت آن بسته به آن که توجیه نسبی A ، B ، و C با \hat{x} ، \hat{y} ، و \hat{z} یکسان یا متفاوت است مثبت و یا منفی است. به عبارت دیگر این علامت به این بستگی دارد که اگر پیچ راست گردی از A به طرف B بچرخد، در امتداد C در جهت مثبت یا منفی پیشروی کند. فرمولهای حاصل ضرب برداری سه گانه (۳-۳۵) و (۳-۳۶) را به شرطی می توان به آسانی به خاطر آورد که توجه کنیم که جمله مثبت طرف راست در هر حالت، عبارت است از حاصل ضرب بردار وسطی (B) در حاصل ضرب شمارواره ای دو بردار دیگر یعنی $(A \cdot C)$ ، در حالی که جمله منفی عبارت است از حاصل ضرب بردار دیگر داخل پرانتز در حاصل ضرب شمارواره ای دو بردار دیگر.

به‌عنوان مثال برای کاربرد حاصل ضرب برداری، نیروی وارد از میدان مغناطیسی با اندوکسیون B ، بر بار الکتریکی متحرک q را می‌توان (با آحاد الکترواستاتیکی) به‌صورت زیر بیان کرد:

$$F = \frac{q}{c} v \times B,$$

که در آن c سرعت نور و v سرعت ذره باردار است. اندازه و جهت نیروی وارد بر ذره به‌دقت از این معادله به‌دست می‌آید. خواننده به یاد می‌آورد که قوانین دست راست و چپ در الکتریسته و مغناطیس فراوان است. کمیت‌های برداری که جهتشان به‌وسیله قوانین دست راست و یا چپ معین می‌شوند، عموماً می‌توانند به‌وسیله حاصل ضرب خارجی بردارها بیان شوند.

۲-۳ کاربرد بردارها در مجموعه‌ای از نیروهای وارد بر یک ذره

طبق اصولی که در بخش ۱-۳ مقرر شد، اگر مجموعه‌ای از نیروهای F_1, F_2, \dots, F_n بر ذره‌ای وارد شوند، نیروی کل F که مشخص‌کننده شتاب ذره است، به‌وسیله جمع برداری نیروهای F_1, F_2, \dots, F_n به‌دست می‌آید:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n. \quad (3-38)$$

نیروهای F_1, F_2, \dots, F_n اغلب به نیروهای مؤلفه‌ای معروف‌اند و نیروی F را منتجه آنها می‌نامند. در اینجا معنی کلمه مؤلفه وسیع‌تر از معنی آن در بخش پیش است. در آنجا مؤلفه‌های یک بردار را تصاویر آن بر روی مجموعه‌ای از محورها تعریف کردیم. هرگاه مؤلفه به معنی یکی از بردارهایی به‌کار رود که مجموع آنها نیروی منتجه F است، از کلمه مؤلفه (برداری) استفاده خواهیم کرد. به‌طور کلی (مگر این که به‌طریق دیگری تصریح شده باشد) کلمه مؤلفه یک بردار F در جهتی مشخص، به معنی تصویر قائم آن بردار روی خطی در آن جهت خواهد بود. به عبارت دیگر مؤلفه F در جهت بردار یکه \hat{n} عبارت است از:

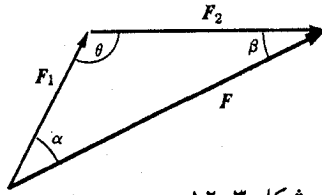
$$F_n = \hat{n} \cdot F. \quad (3-39)$$

مؤلفه بردار F ، به این مفهوم بردار نیست بلکه عدد است. مؤلفه‌های F در امتداد محورهای x ، y ، و z مؤلفه‌هایی به معنی معادله (۳-۳۹) در جهت \hat{x} ، \hat{y} ، و \hat{z} ‌اند.

اگر نیروهای F_1, F_2, \dots, F_n داده شده باشند، حاصل جمع آنها را می‌توان به‌صورت ترسیمی طبق تعریف شکل ۳-۳ یا ۳-۴، از طریق رسم شکلی با رعایت مقیاس معین کرد. حاصل جمع را می‌توان همچنین به‌طور تحلیلی از طریق رسم طرح تقریبی (دیگرام) جمع و استفاده از مثلثات برای محاسبه اندازه و جهت بردار F ، به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، اگر بخواهیم دو بردار را با هم جمع کنیم، حاصل جمع را می‌توانیم با استفاده از قوانین سینوس و کسینوس به‌دست آوریم. در شکل ۳-۱۲، دو بردار F_1 و F_2 ، و زاویه بین آنها داده شده است، و اندازه و جهت بردار منتجه F به‌وسیله فرمولهای زیر حساب می‌شود

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 F_2 \cos \theta, \quad (3-40)$$

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \alpha} = \frac{F}{\sin \theta}. \quad (3-41)$$



شکل ۱۲-۳ مجموع دو نیرو.

توجه کنید که اولین معادله فوق را می توان به وسیله مربع کردن معادله زیر به مفهوم حاصل ضرب داخلی به دست آورد.

$$F = F_1 + F_2 \quad (۴۲-۳)$$

اگر حاصل ضرب داخلی هر یک از اعضای این معادله را با خودش بگیریم، خواهیم داشت

$$F \cdot F = F^2 = F_1 \cdot F_1 + 2F_1 \cdot F_2 + F_2 \cdot F_2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \theta.$$

(توجه کنید که θ در شکل ۱۲-۳، مکمل زاویه بین F_1 و F_2 است که به وسیله شکل ۳-۱۰ تعریف شده است). این روش را می توان برای به دست آوردن مستقیم اندازه بردار حاصل جمع چند بردار بر حسب اندازه ها و زوایای بین آنها به کار برد. فقط کافی است معادله (۳۸-۳) را مربع، و طرف راست آن را طبق قوانین جبر برداری به دو قسمت مجموع مربعها و حاصل ضرب داخلی نیروهای مؤلفه ای تقسیم کنیم. زاویه بین F و هر نیروی مؤلفه ای را می توان با حاصل ضرب داخلی یا خارجی آن بردار مؤلفه ای در معادله (۳۸-۳) به دست آورد. به عنوان مثال، در مورد حاصل جمع دو بردار، بردار F_1 را در معادله (۴۲-۳) ضرب خارجی می کنیم:

$$F_1 \times F = F_1 \times F_1 + F_1 \times F_2.$$

اندازه طرفین را با استفاده از معادلات (۲۸-۳) و (۲۴-۳) به دست می آوریم.

$$F_1 F \sin \alpha = F_1 F_2 \sin \theta, \quad \text{یا} \quad \frac{F}{\sin \theta} = \frac{F_2}{\sin \alpha}.$$

وقتی یک جمع شامل چندین بردار است، معمولاً ساده تر آن است که حاصل ضرب داخلی بردار مؤلفه ای را با هر یک از طرفین معادله (۳۸-۳) به دست آوریم.

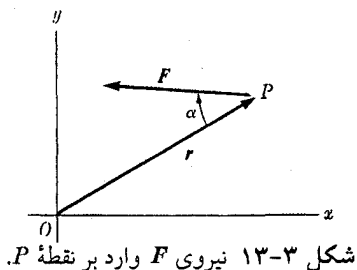
در معادله (۳۸-۳)، حاصل جمع برداری را می توان جداگانه با جمع مؤلفه های F_1, F_2, \dots, F_n در هر یک از مجموعه محورهای مناسب به دست آورد:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx},$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}, \quad (۴۳-۳)$$

$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz},$$

وقتی لازم باشد که مجموع تعداد زیادی بردار را به دست آوریم، این شاید سریعترین روش باشد. خواننده باید از ابتکار خود در ترکیب و تغییر شکل این روشها استفاده کند تا آنها را برای مسئله مورد نظر مناسب سازد. مسلم است که اگر بخواهیم مجموعه ای از بردارها را جمع کنیم که شامل گروهی از بردارهای موازی باشد، ساده تر آن است که اول این بردارهای موازی را جمع کنیم، و سپس روشهای بند قبل را به کار بندیم.



همان‌طور که نیروهای مختلف وارد بر یک ذره را باید به‌طور برداری جمع کرد تا نیروی کل به‌دست آید به‌عکس نیروی کل یا هر نیروی وارد بر یک ذره را می‌توان به هر طریق که مناسب باشد به مجموعه‌ای از نیروهای مؤلفه‌ای (برداری) تجزیه کرد و آنها را یکی یکی بر ذره مؤثر دانست. بنابراین در مسئله مورد بحث در بخش ۱-۷ (شکل ۱-۴)، نیروی واکنش سطح بر آجر F ، به مؤلفه قائم N و مؤلفه اصطکاک f تجزیه شده است. اثر F بر روی حرکت آجر همان اثر نیروهای N و f است که با هم بر آن وارد می‌شوند. اگر مایل باشیم نیرویی مانند F را در دو یا سه جهت عمود بر یکدیگر به نیروهای مؤلفه‌ای (برداری) تجزیه کنیم، می‌توانیم مطابق شکل ۳-۶ تصویرهای قائم F را در این جهات به‌دست آوریم. اندازه مؤلفه‌های برداری F در امتداد مجموعه‌ای از جهات متعامد، همان مؤلفه‌های معمولی F در این جهات، به مفهوم معادله (۳-۳۹) است.

اگر نیرویی مانند F در صفحه xy بر ذره‌ای در نقطه P ، وارد شود، گشتاور -نیرو^۱ یا گشتاور نیروی F حول مبدأ O (شکل ۳-۱۳) را به‌صورت حاصل ضرب فاصله \overline{OP} در مؤلفه F عمود بر r تعریف می‌کنیم:

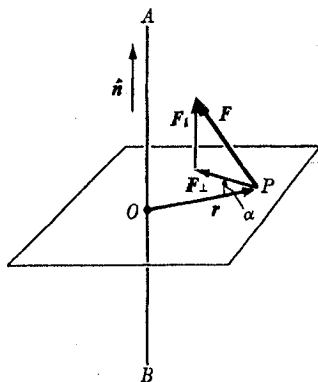
$$N_O = rF \sin \alpha. \quad (3-44)$$

N_O گشتاور نیروی F حول نقطه O را هنگامی مثبت تعریف می‌کنیم که نیروی F در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت حول نقطه O عمل کند، مانند شکل ۳-۱۳ و زمانی منفی، که در جهت حرکت آنها مؤثر باشد. به همین ترتیب می‌توان گشتاور هر کمیت برداری واقع در نقطه P را حول نقطه O تعریف کرد. مفهوم گشتاور در بررسی مکانیک ذرات و اجسام صلب، بسیار مفید خواهد بود. خواص جبری و هندسی گشتاور -نیروها در فصل ۵ به تفصیل بررسی خواهد شد. توجه کنید که گشتاور -نیرو را می‌توان بر حسب حاصل ضرب برداری تعریف کرد:

$$N_O = \pm |r \times F|, \quad (3-45)$$

که در آن علامت $+$ یا $-$ را بر حسب آن که بردار $r \times F$ در جهت مثبت یا منفی محور z باشد، اختیار می‌کنیم.

اکنون با تعریف گشتاور -نیرو یا گشتاور نیروی F وارد بر نقطه P ، حول محور \overline{AB} (شکل ۳-۱۴)، تعریف فوق برای گشتاور -نیرو را به حالت سه‌بعدی تعمیم می‌دهیم. فرض کنید \hat{n}



شکل ۳-۱۴ گشتاور یک نیرو حول یک محور در فضا.

برداری یکه در جهت \overline{AB} باشد و F به دو مؤلفه موازی و عمود بر \overline{AB} تجزیه شود:

$$F = F_{\parallel} + F_{\perp}, \quad (۴۶-۳)$$

که در آن

$$F_{\parallel} = \hat{n} (\hat{n} \cdot F),$$

$$F_{\perp} = F - F_{\parallel}. \quad (۴۷-۳)$$

از نقطه P صفحه‌ای بر \overline{AB} عمود می‌کنیم که آن را در نقطه O قطع می‌کند. اینک گشتاور نیروی F حول محور \overline{AB} را به صورت گشتاور F_{\perp} حول O چنانکه در معادله (۳-۴۴) یا (۳-۴۵)، تعریف می‌کنیم:

$$N_{AB} = \pm r F_{\perp} \sin \alpha = \pm |r \times F_{\perp}|, \quad (۴۸-۳)$$

که در آن علامت مثبت یا منفی بر حسب آن که $r \times F_{\perp}$ با \hat{n} هم جهت و یا مختلف‌الجهت باشد، اختیار می‌شود. طبق این تعریف، نیرویی مانند F موازی با \overline{AB} هیچ‌گونه گشتاور یا گشتاور-نیرویی حول \overline{AB} ندارد. چون $r \times F$ بر n عمود است،

$$\begin{aligned} n \cdot (r \times F) &= \hat{n} \cdot [r \times (F_{\parallel} + F_{\perp})] \\ &= \hat{n} \cdot (r \times F_{\parallel}) + n \cdot (r \times F_{\perp}) \\ &= \hat{n} \cdot (r \times F_{\perp}) \\ &= \pm |r \times F_{\perp}|. \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان N_{AB} را به روش بهتری به طریق زیر تعریف کرد:

$$N_{AB} = \hat{n} \cdot (r \times F). \quad (۴۹-۳)$$

این تعریف، خودبه‌خود، علامت مناسب را در بر دارد و به تجزیه F به مؤلفه‌های F_{\parallel} و F_{\perp} احتیاجی ندارد. به علاوه، اکنون می‌توان r را از هر نقطه‌ای واقع بر محور \overline{AB} به نقطه P رسم کرد، زیرا

هر مؤلفه r که با \overline{AB} موازی باشد، مانند مؤلفه F موازی با \overline{AB} ، در حاصل ضرب خارجی، مؤلفه‌ای عمود بر \hat{n} پدید می‌آورد که در حاصل ضرب داخلی از بین می‌رود.

بنا به معادله (۳-۴۹) بردار گشتاور نیروی F وارد بر نقطه P ، حول نقطه O ، چنین می‌شود:

$$N_O = r \times F, \quad (50-3)$$

که در آن r بردار از O تا P است. طبق معادله (۳-۴۹)، بردار گشتاور - نیروی N_O ، دارای این خاصیت است که مؤلفه آن در هر جهت، گشتاور - نیروی (F به مفهوم قبلی) حول محور ماربر O در آن جهت است. از این به بعد، مراد از گشتاور - نیرو، معمولاً همان گشتاور نیروی برداری است که در معادله (۳-۵۰) تعریف شده است. گشتاور - نیروی حول محور \overline{AB} به معنای قبلی را مؤلفه گشتاور - نیرو در امتداد \overline{AB} می‌نامیم. می‌توانیم گشتاور برداری هر بردار واقع بر نقطه P ، حول نقطه O را به وسیله معادله‌ای مشابه معادله (۳-۵۰) تعریف کنیم.

۳-۳ مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بردارها

برداری مانند A ممکن است تابعی از کمیت شمارواری مانند t باشد، بدین معنی که به هر مقدار t ، بردار معینی مانند $A(t)$ مربوط شود، و یا به صورت جبری بدین معنی که مؤلفه‌های بردار A ممکن است توابعی از t باشند:

$$A = A(t) = [A_x(t), A_y(t), A_z(t)]. \quad (51-3)$$

متداول‌ترین مثال تابع برداری، برداری است که تابع زمان باشد. مثلاً سرعت یک ذره متحرک $v(t)$ ، تابعی از زمان است. اما توابع برداری دیگری نیز وجود دارند، مثلاً در معادله (۳-۷۶) بردار \hat{r} تابعی از زاویه θ است. می‌توانیم مشتق بردار A نسبت به t را به قیاس با تعریف معمولی مشتق یک تابع شمارواری تعریف کنیم، (به شکل ۳-۱۵ توجه کنید):

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}. \quad (52-3)$$

(در معادله فوق تقسیم بر Δt به معنی ضرب در $1/\Delta t$ است). همچنین می‌توان به‌طور جبری مشتق یک بردار را بر حسب مشتق مؤلفه‌های آن تعریف کرد:

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt} \right) = \hat{x} \frac{dA_x}{dt} + \hat{y} \frac{dA_y}{dt} + \hat{z} \frac{dA_z}{dt}. \quad (53-3)$$

به‌عنوان مثال، اگر $v(t)$ بردار سرعت یک ذره باشد، بردار شتاب آن a چنین است:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

در بخشهای ۳-۴ و ۳-۵، مثالهایی از محاسبه مشتقهای برداری بر اساس تعریف (۳-۵۲) یا (۳-۵۳) داده خواهد شد.

مشتق‌گیری برداری دارای خواص زیر است که به وسیله محاسبه مستقیم از تعریف جبری (۳-۵۳)

ثابت می‌شوند، و یا ممکن است آنها را از تعریف (۳-۵۲) (به همان طریق که خواص مشابه آنها برای مشتق‌گیری از یک تابع شمارواره‌ای ثابت می‌شوند) ثابت کرد:

$$\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}, \quad (۳-۵۴)$$

$$\frac{d}{dt}(fA) = \frac{df}{dt}A + f\frac{dA}{dt}, \quad (۳-۵۵)$$

$$\frac{d}{dt}(A \cdot B) = \frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt}, \quad (۳-۵۶)$$

$$\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}. \quad (۳-۵۷)$$

این نتایج نشان می‌دهند که مشتق حاصل جمع و یا حاصل ضرب بردارها از همان قواعد جبری مشتق حاصل جمع و حاصل ضرب معمولی تبعیت می‌کنند، البته به شرط آن که ترتیب عوامل در حاصل ضرب خارجی تغییر نکند، (معادله (۳-۵۷)). مثلاً برای اثبات معادله (۳-۵۵)، از تعریف (۳-۵۳)، با استفاده از تعاریف و خواص عملیات برداری بخش قبل، به وسیله یک محاسبه مستقیم، به آسانی نشان می‌دهیم که مؤلفه‌های متناظر در دو طرف معادله با هم مساوی‌اند. برای مؤلفه x اثبات به صورت زیر است:

$$\left[\frac{d}{dt}(fA) \right]_x = \frac{d}{dt}(fA)_x \quad (\text{طبق معادله (۳-۵۳)})$$

$$= \frac{d}{dt}(fA_x) \quad (\text{طبق معادله (۳-۱۱)})$$

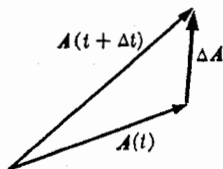
$$= \frac{df}{dt}A_x + f\frac{dA_x}{dt} \quad (\text{و بنابر قوانین معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال})$$

$$= \frac{df}{dt}A_x + f\left(\frac{dA}{dt}\right)_x \quad (\text{طبق معادله (۳-۵۳)})$$

$$= \left(\frac{df}{dt}A\right)_x + \left(f\frac{dA}{dt}\right)_x \quad (\text{طبق معادله (۳-۱۱)})$$

$$= \left(\frac{df}{dt}A + f\frac{dA}{dt}\right)_x \quad (\text{طبق معادله (۳-۱۲)})$$

به‌عنوان مثال دوم، برای اثبات معادله (۳-۵۶) از تعریف (۳-۵۲)، همانند روش اثبات قضیه متناظر برای حاصل ضرب توابع شمارواره‌ای معمولی، عمل می‌کنیم. از علامت Δ برای نمو هر تابع در فاصله زمانی t و $t + \Delta t$ استفاده می‌کنیم. نمو بردار A ، ΔA ، در شکل ۳-۱۵ تعریف شده است.



شکل ۳-۱۵ نمو بردار $\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t)$.

با استفاده از این تعریف Δ و قواعد جبر برداری بخش قبل، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(A \cdot B)}{\Delta t} &= \frac{(A + \Delta A) \cdot (B + \Delta B) - A \cdot B}{\Delta t} \\ &= \frac{(\Delta A) \cdot B + A \cdot (\Delta B) + (\Delta A) \cdot (\Delta B)}{\Delta t} \\ &= \frac{(\Delta A) \cdot B}{\Delta t} + \frac{A \cdot (\Delta B)}{\Delta t} + \frac{(\Delta A) \cdot (\Delta B)}{\Delta t} \\ &= \frac{\Delta A}{\Delta t} \cdot B + A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} + \frac{(\Delta A) \cdot (\Delta B)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (58-3)$$

وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ ، طرف چپ معادله (۵۸-۳) به سمت چپ معادله (۵۶-۳)، و دو جمله اول طرف راست معادله (۵۸-۳) به سمت دو جمله اول طرف راست معادله (۵۶-۳) میل خواهد کرد، در حالی که جمله آخر طرف راست معادله (۵۸-۳) به سمت صفر می‌رود. توجیه دقیق این عملیات حدی درست همانند توجیهی است که برای عملیات متناظر در حساب مشتق و انتگرال معمولی لازم است.

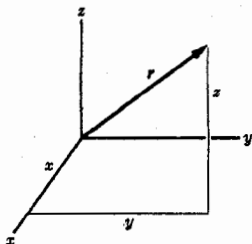
در بررسی حرکت در فضای سه بعدی، اغلب به کمیت‌های برداری و شمارواره‌ای بر می‌خوریم که در هر نقطه از فضا مقدار معینی دارند. این کمیتها توابعی از مختصات فضایی اند که معمولاً با x ، y ، و z مشخص می‌شوند. این کمیتها را می‌توان توابعی از بردار مکان r از مبدأ مختصات تا نقطه (x, y, z) نیز تصور کرد، (شکل ۳-۱۶). بنابراین، توابع نقطه‌ای شمارواره

$$u(r) = u(x, y, z),$$

و توابع برداری

$$A(r) = A(x, y, z) = [A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)].$$

را از یکدیگر متمایز می‌کنیم. $V(x, y, z)$ انرژی پتانسیل ذره متحرک در فضای سه بعدی، مثالی



شکل ۳-۱۶ بردار مکان نقطه (x, y, z) .

است از یک تابع نقطه‌ای شمارواره‌ای. چنانکه $E(x, y, z)$ ، شدت میدان الکتریکی، مثالی است از یک تابع نقطه‌ای برداری توابع نقطه‌ای شمارواره‌ای و برداری اغلب توابعی از t و نیز نقطه (x, y, z) در فضا هستند.

اگر یک منحنی فضایی C و یک تابع برداری A که در نقاط روی این منحنی معین است، داده شده باشند، می‌توان انتگرال خطی^۱ بردار A در امتداد C را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\int_C A \cdot dr.$$

برای تعیین انتگرال خطی، منحنی C را به قطعه‌های کوچک تقسیم شده تصور کنید. و هر قطعه را به وسیله بردار dr نمایش دهید چنانکه dr در جهت آن قطعه و طول آن برابر طول آن قطعه باشد. در این صورت منحنی C از بردارهای متوالی dr تشکیل شده است که ابتدای یکی به انتهای دیگری وصل است. اکنون برای هر قطعه، حاصل ضرب $A \cdot dr$ را تشکیل می‌دهیم که در آن A مقدار تابع برداری در آن قطعه از منحنی است. وقتی تعداد قطعات منحنی بی‌نهایت افزایش یابد و طول $|dr|$ هر قطعه به سمت صفر میل کند، انتگرال خطی فوق به صورت حد مجموع حاصل ضربهای $A \cdot dr$ تعریف می‌شود. به عنوان مثال، کار انجام شده توسط نیروی F (که ممکن است از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر کند) بر روی ذره‌ای که در امتداد یک منحنی C حرکت می‌کند عبارت است از

$$W = \int_C F \cdot dr,$$

که صورت تعمیم یافته فرمول

$$W = F \cdot s,$$

یعنی کار نیروی ثابت F روی ذره متحرک در امتداد قطعه مسیر مستقیم الخط s است بر حالتی که نیرویی متغیر در امتداد منحنی دلخواه C حرکت کند. علت به کار بردن علامت dr برای نمایش قطعه‌ای از منحنی این است که اگر r بردار مکان از مبدأ تا نقطه‌ای بر روی منحنی باشد، در این صورت dr نمو r از یک انتها تا انتهای دیگر قطعه مربوط خواهد بود، (به شکل ۳-۱۵ مراجعه کنید). اگر r را به صورت زیر بنویسیم.

$$r = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z, \quad (۳-۵۹)$$

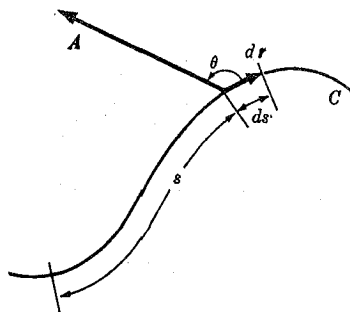
در این صورت

$$dr = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz, \quad (۳-۶۰)$$

که در آن dx ، dy ، و dz به ترتیب تفاضل مختصات دو انتهای قطعه‌اند. اگر s فاصله اندازه‌گیری شده در امتداد منحنی از نقطه ثابتی باشد، می‌توان انتگرال خطی را به صورت انتگرال معمولی بر روی مختصه s بیان کرد:

$$\int_C A \cdot dr = \int A \cos \theta ds, \quad (۳-۶۱)$$

که در آن θ زاویه بین A و مماس بر منحنی در هر نقطه است. (به شکل ۳-۱۷ مراجعه کنید). اگر A و $\cos \theta$ به صورت توابعی از s در دست باشند، از این فرمول می‌توان برای محاسبه انتگرال استفاده



شکل ۳-۱۷ عناصر انتگرال خطی.

کرد. همچنین می توان انتگرال را با استفاده از معادله (۳-۶۰) به صورت زیر نوشت

$$\int_C A \cdot dr = \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (۳-۶۲)$$

یکی از مناسب ترین روشهای نمایش یک منحنی در فضا این است که سه مختصه (x, y, z) و یا به عبارت دیگر مکان بردار r به صورت تابعی از پارامتر s (که در هر نقطه منحنی مقدار معینی دارد) داده شده باشد. همان طور که در شکل ۳-۱۷ و در معادله (۳-۶۱) ملاحظه می کنید، پارامتر s غالباً، اگر چه نه الزاماً، فاصله اندازه گیری شده در امتداد منحنی از نقطه ثابتی است. پارامتر s همچنین ممکن است زمانی باشد که ذره متحرک به هر نقطه معینی از منحنی می رسد. اگر $A(r)$ و $r(s)$ معلوم باشند، انتگرال خطی را می توان از فرمول زیر حساب کرد:

$$\begin{aligned} \int_C A \cdot dr &= \int \left(A \cdot \frac{dr}{ds} \right) ds \\ &= \int \left(A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds} \right) ds \end{aligned} \quad (۳-۶۳)$$

طرف راست این معادله یک انتگرال معمولی است با متغیر s .

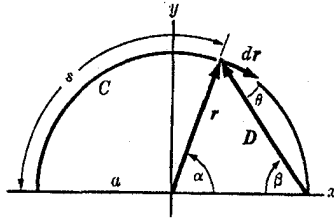
به عنوان مثال انتگرال خطی زیر را حساب می کنیم. ذره ای در صفحه xy بر نیم دایره ای به شعاع a حول مبدأ تحت تأثیر نیرویی حرکت می کند که با فاصله ذره از نقطه $(a, 0)$ متناسب است و ذره را به سمت آن جذب می کند. کار انجام شده بر ذره توسط این نیرو را به کمک انتگرال خطی حساب می کنیم. با استفاده از علائم شکل ۳-۱۸ روابط زیر را می نویسیم

$$\beta = \frac{1}{4}(\pi - \alpha), \quad \theta = \frac{\pi}{4} - \beta = \frac{1}{4}\alpha,$$

$$D^2 = \gamma a^2 (1 - \cos \alpha), \quad D = \gamma a \sin \frac{\alpha}{4},$$

$$F = -kD, \quad F = kD = \gamma ka \sin \frac{\alpha}{4},$$

$$s = a(\pi - \alpha).$$



شکل ۳-۱۸

با به کار بردن معادله (۳-۶۱) و روابط فوق می توان کار انجام شده را حساب کرد:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{s=0}^{\pi a} F \cos \theta ds \\ &= - \int_{\alpha=\pi}^0 \gamma ka^\gamma \sin \frac{\alpha}{\gamma} \cos \frac{\alpha}{\gamma} d\alpha \\ &= \gamma ka^\gamma. \end{aligned}$$

برای اینکه همین انتگرال را با استفاده از معادله (۳-۶۳) حساب کنیم، \mathbf{r} و \mathbf{F} را به صورت توابعی از پارامتر α در امتداد منحنی بیان می کنیم:

$$x = a \cos \alpha, \quad y = a \sin \alpha,$$

$$F_x = kD \cos \beta = \gamma ka \sin^\gamma \frac{\alpha}{\gamma} = ka(1 - \cos \alpha),$$

$$F_y = -kD \sin \beta = -\gamma ka \sin \frac{\alpha}{\gamma} \cos \frac{\alpha}{\gamma} = -ka \sin \alpha.$$

اکنون طبق معادله (۳-۶۳)، کار انجام شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\alpha=\pi}^0 \left(F_x \frac{dx}{d\alpha} + F_y \frac{dy}{d\alpha} \right) d\alpha \\ &= \int_{\pi}^0 [-ka^\gamma (1 - \cos \alpha) \sin \alpha - ka^\gamma \sin \alpha \cos \alpha] d\alpha \\ &= ka^\gamma \int_{\pi}^0 \sin \alpha d\alpha \\ &= \gamma ka^\gamma. \end{aligned}$$

۳-۴ سینماتیک در صفحه

سینماتیک علمی است که حرکات ممکن دستگاههای مکانیکی را بی توجه به قوانین دینامیکی که معین می کنند چه حرکتی به راستی رخ می دهند تشریح می کند. در بررسی سینماتیک ذره در صفحه روشهایی را در نظر خواهیم گرفت، که مکان ذره و مسیر حرکت و مؤلفه های مختلف سرعت و شتاب آن را تشریح کنند.

ساده ترین روش برای تعیین مکان یک ذره در یک صفحه این است که دو محور متعامد در نظر بگیریم و هر نقطه را به وسیله مختصات x, y آن نسبت به محورها مشخص کنیم (شکل ۳-۱۹). همچنین می توان بردار مکان $r = (x, y)$ را از مبدأ تا محل ذره مشخص کرد. اگر مکان ذره را به وسیله بردار r مشخص کنیم، در این صورت فقط احتیاج داریم که مبدأ O را نیز که بردار از آن رسم شده است معین کنیم. اگر مختصات x و y را مشخص کنیم، باید محورهای مختصاتی را نیز که x و y بر روی آنها اندازه گیری می شوند به صراحت معلوم کنیم.

پس از برقرار کردن یک دستگاه مختصات، باید مسیر ذره در صفحه را مشخص کنیم. یک منحنی در صفحه xy را می توان به وسیله تعیین y به صورت تابعی از x در امتداد منحنی و یا به عکس معین کرد:

$$y = y(x), \quad (3-64)$$

یا

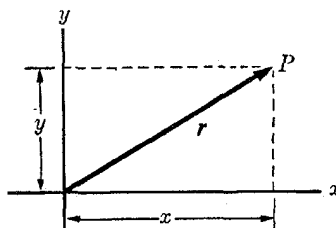
$$x = x(y). \quad (3-65)$$

لکن معادلات (۳-۶۴) و (۳-۶۵) به این شکل در بسیاری از حالات مناسب نیستند، مثلاً وقتی که منحنی بر روی خودش بر می گردد. همچنین می توان منحنی را به وسیله رابطه ای بین x و y مشخص کرد

$$f(x, y) = 0, \quad (3-66)$$

به طوری که منحنی، متشکل از نقاطی باشد که مختصات آنها در رابطه فوق صدق می کنند. مثل معادله یک دایره:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$



شکل ۳-۱۹ بردار مکان و مختصات دکارتی نقطه P در صفحه.

یکی از مناسب‌ترین روشهای نمایش یک منحنی این است که آن را بر حسب پارامتری مانند s بیان کنیم:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (۶۷-۳)$$

یا

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

پسارامتر s در هر نقطه از منحنی دارای مقدار یگانه‌ای است. وقتی s تغییر می‌کند، نقطه $[x(s), y(s)]$ نیز منحنی را به وجود می‌آورد. به عنوان مثال، پارامتر s می‌تواند فاصله اندازه گرفته شده در امتداد منحنی از نقطه ثابتی باشد. معادلات یک دایره را می‌توان بر حسب پارامتر θ به صورت زیر بیان کرد:

$$x = a \cos \theta,$$

$$y = a \sin \theta,$$

که در آن θ زاویه بین محور x و شعاع a مربوط به نقطه (x, y) واقع بر روی دایره است. مختصات x و y ، بر حسب فاصله s که بر روی دایره اندازه گرفته شده باشد چنین است:

$$x = a \cos \frac{s}{a},$$

$$y = a \sin \frac{s}{a}.$$

پارامتر، در مسائل مکانیکی، معمولاً زمان است، و در این حالت معادلات (۶۷-۳) نه تنها مسیر ذره، بلکه میزان حرکت ذره بر روی مسیر را بر حسب زمان نیز مشخص می‌کند. اگر ذره‌ای با سرعت ثابت v در مسیر دایره‌ای شکلی حرکت کند، مکان آن در هر لحظه t به وسیله معادلات زیر داده می‌شود.

$$x = a \cos \frac{vt}{a},$$

$$y = a \sin \frac{vt}{a}.$$

اگر ذره‌ای در امتداد مسیری که به وسیله معادله (۶۷-۳) داده شده است حرکت کند در این صورت می‌توان حرکت آن را به وسیله $s(t)$ ، و یا مستقیماً با تصریح روابط زیر مشخص کرد،

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (۶۸-۳)$$

یا

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (۶۹-۳)$$

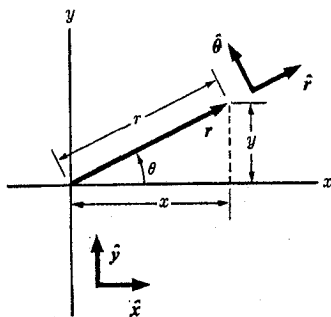
سرعت و شتاب و مؤلفه‌های آنها عبارت‌اند از

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \hat{x} \frac{dx}{dt} + \hat{y} \frac{dy}{dt}, \quad (۷۰-۳)$$

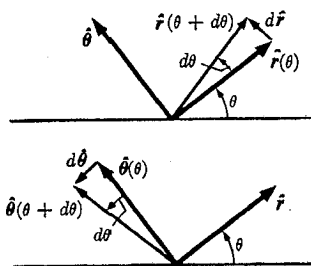
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt},$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \hat{x} \frac{d^2x}{dt^2} + \hat{y} \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (۷۱-۳)$$



شکل ۳-۲۰ مختصات قطبی در سطح.



شکل ۳-۲۱ نمو بردارهای $\hat{\theta}$ و \hat{r} .

مختصات قطبی، نشان داده شده در شکل ۳-۲۰، در بسیاری از مسائل مناسب است. مختصات θ و r به وسیله معادلات زیر به مختصات x و y مربوط می شوند.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (۷۲-۳)$$

و

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (۷۳-۳)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \cos^{-1} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

بردارهای \hat{r} و $\hat{\theta}$ را همان طور که در شکل ۳-۲۰ نمایش داده شده است به ترتیب در جهت افزایش r و θ تعریف می کنیم. بردارهای \hat{r} و $\hat{\theta}$ توابعی از زاویه θ اند و به وسیله معادلات زیر به \hat{x} و \hat{y} مربوط می شوند.

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta, \quad (۷۴-۳)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta.$$

از تجسس شکل ۳-۲۰، معادلات (۷۴-۳) نتیجه می شود. از مشتق گیری معادله فوق، فرمولهای مهم زیر به دست می آیند.

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}. \quad (۷۵-۳)$$

با بررسی شکل ۳-۲۱، فرمولهای (۷۵-۳) را نیز می توان به دست آورد، (و برای این کار باید

به خاطر داشت که $|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = 1$. بردار مکان r بر حسب مختصات قطبی چنین است

$$r = r\hat{r}(\theta). \quad (۷۶-۳)$$

می توان حرکت ذره در مختصات قطبی را به وسیله مشخص کردن $r(t)$ و $\theta(t)$ ، توصیف، و از آنجا بردار مکان $r(t)$ را تعیین کرد. بردار سرعت عبارت است از

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (۷۷-۳)$$

بنابراین مؤلفه های سرعت در جهت \hat{r} و $\hat{\theta}$ عبارت اند از:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}. \quad (۷۸-۳)$$

بردار شتاب چنین است

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}. \end{aligned} \quad (۷۹-۳)$$

مؤلفه های شتاب عبارت اند از:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}. \quad (۸۰-۳)$$

جمله $r\dot{\theta}^2 = v_\theta^2/r$ که از حرکت در جهت θ به وجود می آید، شتاب رو به مرکز نامیده می شود. اگر $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ باشد، مسیر، یک دایره است و $a_r = -v_\theta^2/r$. در فیزیک مقدماتی با این نتیجه آشنایی داشتیم. جمله $2\dot{r}\dot{\theta}$ را گاهی شتاب کوریولی می نامند.

۳-۵ سینماتیک در فضای سه بعدی

مطالبی را که در بخش قبل با استفاده از مختصات دکارتی برای سینماتیک در فضای دوبعدی گفته شد می توان بی درنگ در مورد فضای سه بعدی تعمیم داد. یک نقطه در فضا به وسیله مختصات (x, y, z) نسبت به محورها دکارتی انتخابی و یا به وسیله بردار مکان $r = (x, y, z)$ نسبت به یک مبدأ انتخابی مشخص می شود. یک مسیر در فضا را می توان به صورت دو معادله با سه متغیر (x, y, z) نمایش داد:

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0. \quad (۸۱-۳)$$

هر معادله مشخص یک سطح است. مسیر عبارت است از فصل مشترک این دو سطح. یک مسیر را می توان به وسیله معادلات پارامتری نیز نشان داد:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (۸۲-۳)$$

سرعت و شتاب به وسیله معادله‌های زیر داده می‌شوند:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \hat{x}v_x + \hat{y}v_y + \hat{z}v_z, \quad (۸۳-۳)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (۸۴-۳)$$

و

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \hat{x}a_x + \hat{y}a_y + \hat{z}a_z, \quad (۸۵-۳)$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (۸۶-۳)$$

برای مسائل خاص دستگاه‌های مختصات بسیاری غیر از مختصات دکارتی مناسب‌اند. شاید متداول‌ترین آنها، دستگاه مختصات قطبی کروی و دستگاه مختصات قطبی استوانه‌ای باشد. مختصات قطبی استوانه‌ای (ρ, φ, z) به وسیله شکل ۳-۲۲ و یا معادلات زیر تعریف می‌شود:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (۸۷-۳)$$

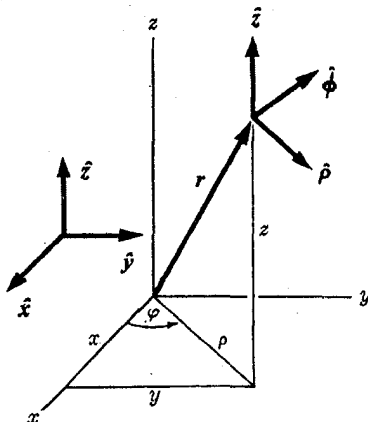
و به عکس

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \cos^{-1} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad (۸۸-۳)$$

$$z = z.$$

دستگاه بردارهای یک‌ه $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ ، و \hat{z} که به ترتیب در جهت افزایش ρ ، φ ، و z اند در شکل ۳-۲۲ نشان



شکل ۳-۲۲ مختصات قطبی استوانه‌ای.

داده شده‌اند. \hat{z} ثابت است ولی $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ چنانکه در مختصات قطبی در صفحه، تابعی از φ اند:

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{\phi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi, \quad (۸۹-۳)$$

و به همین روش

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\varphi} = \hat{\phi}, \quad \frac{d\hat{\phi}}{d\varphi} = -\hat{\rho}. \quad (۹۰-۳)$$

بردار مکان r در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$r = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}. \quad (۹۱-۳)$$

به وسیله مشتق‌گیری از معادله (۹۱-۳) و به کار بردن (۹۰-۳)، سرعت و شتاب را به طریق زیر به دست می‌آوریم.

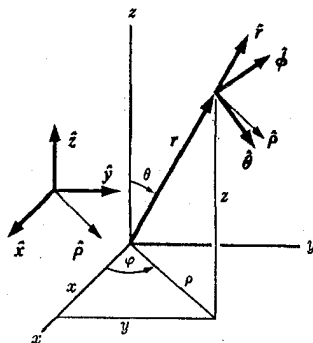
$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}, \quad (۹۲-۳)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z}. \quad (۹۳-۳)$$

چون بردارهای $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ ، و \hat{z} بردارهای یکه متعامند، هر بردار A را می‌توان بر حسب مؤلفه‌هایش در امتداد $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ ، و \hat{z} بیان کرد:

$$A = A_{\rho} \hat{\rho} + A_{\phi} \hat{\phi} + A_z \hat{z}. \quad (۹۴-۳)$$

باید توجه داشت که چون $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ تابعی از φ اند، مجموعه مؤلفه‌های $(A_{\rho}, A_{\phi}, A_z)$ به طور کلی به نقطه معینی از فضا که در بردار A باید در آن نقطه قرار داده شود، یا لاقبل به مقدار معینی از مختصه φ مربوط می‌شوند. بنابراین مؤلفه‌های یک بردار در مختصات استوانه‌ای، و در حقیقت در تمام دستگاههای مختصات منحنی الخط، نه تنها به خود بردار بلکه همچنین به مکان آن در فضا بستگی دارند. اگر A تابعی از پارامتری، مثلاً t باشد، می‌توان مشتق آن را به وسیله مشتق‌گیری از معادله (۹۴-۳) حساب کرد، ولی باید توجه داشت که اگر مکان بردار نیز با t تغییر کند، تغییرات



شکل ۳-۲۳ مختصات قطبی کروی.

$\hat{\phi}$ و $\hat{\rho}$ نیز منظور شوند، مثلاً اگر A نیرویی باشد که بر ذره متحرکی وارد می شود:

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{dA_\rho}{dt} - A_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{dA_\varphi}{dt} + A_\rho \frac{d\varphi}{dt} \right) \hat{\phi} + \frac{dA_z}{dt} \hat{z}. \quad (۹۵-۳)$$

فرمولهای (۳-۹۲) و (۳-۹۳) حالات خاصی از معادله (۳-۹۵) اند. می توانستیم فرمولی نیز برای da/dt برای حالت مختصات قطبی دوبعدی که در بخش قبلی در نظر گرفته شد، به دست آوریم، و در واقع درست همانند معادله (۳-۹۵) می شد بجز اینکه جمله آخر در آن وجود نمی داشت. مختصات قطبی کروی (r, θ, φ) چنانکه در شکل ۳-۲۳، و یا به وسیله معادلات زیر تعریف می شوند:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (۹۶-۳)$$

با استفاده از معادله (۳-۸۷) و با توجه به اینکه $\rho = r \sin \theta$ ، روابط فوق برای x و y نتیجه می شود. رابطه برای z از شکل فوق آشکار است. به عکس،

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}, \quad (۹۷-۳)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

بردارهای \hat{r} ، $\hat{\theta}$ ، $\hat{\phi}$ مناسب برای مختصات کروی در شکل ۳-۲۳ نشان داده شده اند که در آن بردار $\hat{\phi}$ همان بردار $\hat{\phi}$ مختصات استوانه ای است. بردار $\hat{\rho}$ نیز در به دست آوردن روابطی که شامل \hat{r} و $\hat{\theta}$ باشند، بسیار مفید است. توجه کنید که بردارهای \hat{z} ، $\hat{\rho}$ ، \hat{r} و $\hat{\theta}$ همگی در یک صفحه قائم قرار گرفته اند. از شکل ۳-۲۳ و معادله (۳-۸۹) داریم

$$\hat{r} = \hat{z} \cos \theta + \hat{\rho} \sin \theta = \hat{z} \cos \theta + \hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\hat{\theta} = -\hat{z} \sin \theta + \hat{\rho} \cos \theta = -\hat{z} \sin \theta + \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi, \quad (۹۸-۳)$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi.$$

به وسیله مشتق گیری از این فرمولها، و یا به طریق ساده تر با دقت در شکل، چنانکه در مورد شکل ۳-۲۱ دیدیم، و توجه به اینکه تغییرات θ وقتی که φ و r ثابت اند به منزله دوران در صفحه $\hat{\theta}$ ، $\hat{\rho}$ ، \hat{r} ، \hat{z} است، در حالی که تغییرات φ وقتی که θ و r ثابت اند به منزله دوران حول محور z است، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \hat{\phi} \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r}, \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} = \hat{\phi} \cos \theta, \quad (۹۹-۳)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \varphi} = -\hat{\rho} = -\hat{r} \sin \theta - \hat{\theta} \cos \theta.$$

در مختصات کروی، بردار مکان چنین است

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}(\theta, \varphi). \quad (100-3)$$

به وسیله مشتق گیری از معادله فوق و به کار بردن معادلات (۳-۹۹)، سرعت و شتاب را به دست می آوریم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r\dot{\varphi}\sin\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (101-3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) \\ &+ (r\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \quad (102-3)$$

اینجا نیز بردارهای یکه $\hat{\mathbf{r}}$ ، $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ، و $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ متعامدند و هر بردار A را می توان بر حسب مؤلفه های کروی آن به صورت زیر نمایش داد:

$$A = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\varphi\hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (103-3)$$

اینجا نیز مؤلفه ها نه تنها به A ، بلکه به مکان آن در فضا نیز بستگی دارند. اگر A تابعی از t باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \left(\frac{dA_r}{dt} - A_\theta \frac{d\theta}{dt} - A_\varphi \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} \right) \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \left(\frac{dA_\theta}{dt} + A_r \frac{d\theta}{dt} - A_\varphi \cos\theta \frac{d\varphi}{dt} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \left(\frac{dA_\varphi}{dt} + A_r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} + A_\theta \cos\theta \frac{d\varphi}{dt} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \quad (104-3)$$

۳-۶ مبانی آنالیز برداری

تابع شمارواره $u(x, y, z)$ دارای سه مشتق است، که می توان آنها را مؤلفه های یک تابع نقطه ای برداری دانست. این تابع را گرادیان u می نامند:

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \hat{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (105-3)$$

همچنین می توان $\text{grad } u$ را به طور هندسی، برداری تعریف کرد که جهتش همان باشد که u در آن سریع ترین افزایش را دارد و مقدارش برابر مشتق جهت دار u ، یعنی برابر میزان افزایش u بر حسب واحد مسافت در آن جهت باشد. معادل بودن تعریف هندسی و تعریف جبری (۳-۱۰۵) را می توان با مشتق گیری از تابع u نشان داد:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (106-3)$$

معادله (۳-۱۰۶) را می‌توان به صورت حاصل ضرب داخلی gradu در بردار dr که مؤلفه‌های آن dx, dy, dz است نوشت:

$$du = dr \cdot \text{gradu}. \quad (۳-۱۰۷)$$

du از نظر هندسی عبارت است از تغییر u هنگامی که از نقطه $r = (x, y, z)$ به نقطه نزدیک $r + dr = (x + dx, y + dy, z + dz)$ حرکت می‌کنیم. طبق معادله (۳-۱۰۵)، داریم

$$du = |dr| |\text{gradu}| \cos \theta, \quad (۳-۱۰۸)$$

که در آن θ زاویه بین dr و gradu است. بنابراین در یک فاصله کوچک و ثابت $|dr|$ از نقطه r ، تغییر u هنگامی دارای بیشترین مقدار است که dr با gradu هم‌جهت باشد و در این صورت

$$|\text{gradu}| = \frac{du}{|dr|}.$$

این رابطه، توصیف هندسی gradu را که در فوق ارائه شد تأیید می‌کند. تعریف هندسی دیگری از gradu این است که، gradu برداری است که تغییر u را به‌ازای تغییر کوچک دلخواه بردار مکان dr به صورت معادله (۳-۱۰۷) معین کند.

عضو طرف راست معادله (۳-۱۰۵) را می‌توان فقط از نظر عادی به صورت «حاصل ضرب یک بردار»:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (۳-۱۰۹)$$

در تابع شمارواره‌ای u دانست

$$\text{gradu} = \nabla u. \quad (۳-۱۱۰)$$

نماد ∇ را «دل» (del) تلفظ می‌کنند. ∇ به معنی هندسی بردار نیست، بلکه آن را باید عملی بر روی تابع ∇u دانست که نتیجه‌اش یک بردار ∇u است. مع‌هذا از نظر جبری ∇ دارای خواصی تقریباً همانند خواص یک بردار است. دلیل آن این است که علائم مشتق‌گیری $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ دارای همان خواص جبری اعداد معمولی‌اند مگر هنگامی که بر حاصل ضرب توابع عمل کنند:

$$\frac{\partial}{\partial x} (u + v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u, \quad (۳-۱۱۱)$$

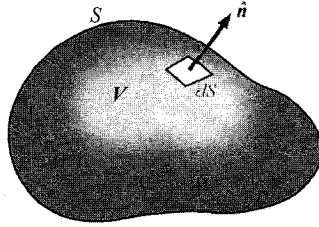
و

$$\frac{\partial}{\partial x} (au) = a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (۳-۱۱۲)$$

به شرط آنکه a ثابت باشد. ولی،

$$\frac{\partial}{\partial x} (uv) = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (۳-۱۱۳)$$

تنها در این مورد است که از نظر جبری اپراتورهای مشتق‌گیری با اعداد معمولی فرق دارند. اگر $\partial/\partial x$ عدد می‌بود، در این صورت $\partial/\partial x (uv)$ برابر با $u(\partial/\partial x)v$ یا $v(\partial/\partial x)u$ می‌شد. بنابراین می‌توان گفت که $\partial/\partial x$ از نظر جبری همانند یک عدد است، مگر هنگامی که بر یک حاصل ضرب عمل کند، که در این صورت نتیجه، حاصل جمع جملاتی خواهد بود که در آن هر عامل به‌طور جداگانه

شکل ۳-۲۴ حجم V محاط در سطح S .

مشتق‌گیری شده است، مانند معادله (۳-۱۱۳). تذکر مشابهی در مورد علامت ∇ نیز وارد است. A از نظر جبری همانند یک بردار است، با این تفاوت که وقتی بر حاصل ضرب عمل می‌کند، باید آن را یک عمل مشتق‌گیری تلقی کرد. با در نظر گرفتن این قاعده می‌توانیم تعداد زیادی از اتحادهایی را که شامل علامت ∇ اند براساس اتحادهای برداری بنویسیم. تعداد کمی از این اتحادها را در این کتاب لازم داریم، لذا صورت آنها را در اینجا نخواهیم نوشت.^۱

می‌توان حاصل ضرب داخلی ∇ و یک تابع نقطه‌ای برداری $A(x, y, z)$ را تشکیل داد. این حاصل ضرب داخلی را دیورژانس A می‌نامند:

$$\operatorname{div} A = \nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (۳-۱۱۴)$$

معنی هندسی $\operatorname{div} A$ به وسیله قضیه زیر که به قضیه دیورژانس، یا قضیه گاوس معروف است داده می‌شود:

$$\iiint_V \nabla \cdot A dV = \iint_S \hat{n} \cdot A dS, \quad (۳-۱۱۵)$$

که در آن V حجمی معلوم، و S سطح محیط بر حجم V ، و \hat{n} بردار یکه‌ای است که عمود بر سطح است و جهت آن در هر نقطه از S به سطح خارج از حجم است، (شکل ۳-۲۴). در این صورت $\hat{n} \cdot A$ مؤلفه بردار A است که بر S عمود است، و معادله (۳-۱۱۵) حاکی از آن است که «مقدار کل $\nabla \cdot A$ در داخل حجم V برابر است با «شار کل A که از سطح S به سمت خارج روان است». اگر v نمایشگر سرعت سیال متحرکی در هر نقطه از فضا باشد، در این صورت

$$\iint_S \hat{n} \cdot v dS$$

نمایشگر حجم سیالی است که در هر ثانیه از سطح S جاری است. اگر سیال غیرقابل تراکم باشد در این صورت طبق معادله (۳-۱۱۵)،

$$\iiint_V \nabla \cdot v dV$$

۱. برای بحث بیشتر درباره آنالیز برداری به کتاب زیر مراجعه کنید:

نمایشگر حجم کل سیالی است که در هر ثانیه در داخل حجم V تولید می‌شود. بنابراین $\nabla \cdot v$ باید در منابعی که سیال از آنها خارج می‌شود مثبت باشد، و در «چاهها» که سیال به آنها وارد می‌شود منفی. در اینجا از اثبات قضیهٔ گاوس (معادلهٔ (۳-۱۱۵)) صرف‌نظر می‌کنیم. این اثبات را می‌توان در هر کتاب آنالیز برداری یافت.^۱

همچنین می‌توان حاصل ضرب خارجی ∇ در یک تابع نقطه‌ای برداری $A(x, y, z)$ را تشکیل داد. این حاصل ضرب را کرل بردار A می‌نامند

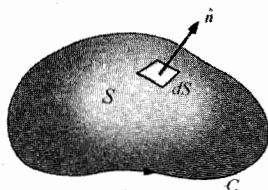
$$\text{curl } A = \nabla \times A = \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (۳-۱۱۶)$$

معنی هندسی کرل به وسیلهٔ قضیهٔ استوکس^۳ بیان می‌شود:

$$\iint_S \hat{n} \cdot (\nabla \times A) dS = \int_C A \cdot dr, \quad (۳-۱۱۷)$$

که در آن S هر سطح دلخواهی در فضا و \hat{n} بردار یکهٔ عمود بر S و C منحنی محیط بر سطح S و dr برداری است در جهت حرکت شخصی که در امتداد منحنی C طوری حرکت می‌کند که دست چپش به سمت داخل و سرش در جهت \hat{n} باشد، (شکل ۳-۲۵ را ملاحظه کنید). طبق معادلهٔ (۳-۱۱۷) کرل A در هر نقطه مقیاسی است از مقدار چرخش تابع برداری A حول آن نقطه. A میدان مغناطیسی در اطراف یک سیم حامل جریان الکتریکی، مثال خوبی از یک کرل است که در آن کرل شدت میدان مغناطیسی، با چگالی جریان متناسب است. اینجا از اثبات قضیهٔ استوکس (معادلهٔ (۳-۱۱۷)) صرف‌نظر می‌کنیم.

خواننده نباید از دشواری حفظ این مطالب در ذهن نگران باشد. درک مفاهیم جدید ریاضی از این قبیل با به کار بردن مکرر آنها به کندی حاصل می‌شود. این تعاریف برای استفاده‌های بعدی اینجا



شکل ۳-۲۵ سطح S محاط در منحنی C .

ذکر شده‌اند. از هیچکس نمی‌توان انتظار داشت که قبل از دیدن نحوه کاربرد آنها در مسائل فیزیکی، با آنها آشنایی داشته باشد.

علامت برداری ∇ را نیز می‌توان در مختصات استوانه‌ای برحسب مؤلفه‌های آن در امتداد $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ ، و \hat{z} بیان کرد. (شکل ۳-۲۲ را ملاحظه کنید). توجه کنید که اگر $u = u(\rho, \phi, z)$ باشد،

$$du = \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad (۱۱۸-۳)$$

بنا به معادلات (۳-۹۱) و (۳-۹۰)،

$$dr = \hat{\rho} d\rho + \hat{\phi} \rho d\phi + \hat{z} dz, \quad (۱۱۹-۳)$$

و این نتیجه‌ای است که اهمیت هندسی آن از شکل ۳-۲۲ آشکار می‌شود. بنابراین، اگر بنویسیم

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۱۲۰-۳)$$

به علت متعامد بودن بردارهای $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ ، و \hat{z} خواهیم داشت،

$$du = dr \cdot \nabla u, \quad (۱۲۱-۳)$$

چنانکه لازمه تعریف هندسی $\nabla u = \text{grad} u$ است. (تذکرات بعد از معادله (۳-۱۰۷) را ببینید). برای مختصات قطبی در فضای دوبعدی نیز می‌توان فرمولی برای ∇ به دست آورد که درست همانند معادله (۳-۱۲۰) است با این تفاوت که جمله شامل z ندارد. در به کار بردن ∇ برای بردارهایی که در مختصات استوانه‌ای بیان می‌شوند (معادله (۳-۹۴))، باید به خاطر آورده شود که بردارهای $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ توابعی از ϕ اند و اگر بعد از $\partial/\partial\phi$ ظاهر شوند، باید از آنها مشتق گرفت.

همچنین می‌توان بردار ∇ را در مختصات کروی (شکل ۳-۲۳) با توجه به روابط زیر به دست

آورد:

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi, \quad (۱۲۲-۳)$$

و

$$dr = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\phi} r \sin\theta d\phi. \quad (۱۲۳-۳)$$

بنابراین

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۱۲۴-۳)$$

تا آنکه معادله (۳-۱۲۱) برقرار باشد. دوباره یادآور می‌شویم که در به کار بردن معادله (۳-۱۲۴)، وابستگی \hat{r} ، $\hat{\theta}$ ، $\hat{\phi}$ به θ و ϕ را باید به خاطر داشت. به عنوان مثال، دیورژانس تابع برداری A در

مختصات کروی (معادله ۳-۱۰۳)) چنین است.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot A &= \hat{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial A}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta \right) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r \tan \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}.\end{aligned}$$

(در محاسبه فوق، از متعامد بودن بردارهای یکه \hat{r} ، $\hat{\theta}$ ، و $\hat{\phi}$ استفاده شده است.)

۳-۷ قضایای اندازه حرکت و انرژی

قانون دوم نیوتن که در فصل ۱ بیان شد، در فضاهای دو یا سه بعدی، به معادله برداری زیر منجر می شود:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F. \quad (3-125)$$

معادله فوق در مورد فضاهای دوبعدی با دو معادله مؤلفه‌ای و در مورد فضاهای سه بعدی با سه معادله مؤلفه‌ای معادل است که در مختصات دکارتی عبارت‌اند از

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z. \quad (3-126)$$

در این بخش، با استفاده از معادله (۳-۱۲۵)، قضایایی برای حرکت در فضاهای دوبعدی و سه بعدی ثابت می کنیم که نظیر برداری قضایایی‌اند که در بخش ۲-۱ برای حرکت یک بعدی ثابت شد. بردار اندازه حرکت خطی p یک ذره را باید طبق معادله (۱-۱۰) به صورت زیر تعریف کرد:

$$p = mv. \quad (3-127)$$

بنابراین معادلات (۳-۱۲۵) و (۳-۱۲۶) را می توان به صورت

$$\frac{d}{dt} (mv) = \frac{dp}{dt} = F, \quad (3-128)$$

و یا به صورت مؤلفه‌ای

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z. \quad (3-129)$$

نوشت. اگر معادله (۳-۱۲۸) را در dt ضرب کنیم و از t_1 تا t_2 انتگرال بگیریم، تغییر اندازه حرکت بین t_1 و t_2 به دست می آید:

$$p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt. \quad (3-130)$$

انتگرال طرف راست، ضربه‌ای است که توسط نیروی F وارد می‌شود و برداری است که مؤلفه‌های آن انتگرالهای متناظر مؤلفه‌های F اند. معادله (۳-۱۳۰) به صورت مؤلفه‌ای چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} p_{x_2} - p_{x_1} &= \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \\ p_{y_2} - p_{y_1} &= \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \\ p_{z_2} - p_{z_1} &= \int_{t_1}^{t_2} F_z dt. \end{aligned} \quad (۳-۱۳۱)$$

اگر بخواهیم معادله‌ای برای میزان تغییر انرژی جنبشی نسبت به زمان به دست آوریم، مانند بخش ۱-۲ عمل و معادلات (۳-۱۲۶) را به ترتیب در v_x ، v_y ، و v_z ضرب می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) = F_x v_x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_y^2 \right) = F_y v_y, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_z^2 \right) = F_z v_z. \quad (۳-۱۳۲)$$

از جمع کردن معادلات فوق نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right] = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z,$$

یا

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{dT}{dt} = F \cdot v. \quad (۳-۱۳۳)$$

معادله فوق را همچنین می‌توان از حاصل ضرب داخلی بردار v در طرفین معادله برداری (۳-۱۲۵) و با در نظر گرفتن

$$\frac{d}{dt} (v^2) = \frac{d}{dt} (v \cdot v) = \frac{dv}{dt} \cdot v + v \cdot \frac{dv}{dt} = 2v \cdot \frac{dv}{dt}.$$

به دست آورد. بنابراین طبق معادله (۳-۱۳۲) خواهیم داشت

$$F \cdot v = m v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right).$$

اگر معادله (۳-۱۳۳) را در dt ضرب کنیم و انتگرال بگیریم، صورت انتگرال‌گیری شده قضیه انرژی به دست می‌آید:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot v dt. \quad (۳-۱۳۴)$$

چون $v dt = dr$ ، اگر F به صورت تابعی از r داده شده باشد، می‌توان طرف راست معادله فوق را به صورت انتگرال خطی نوشت:

$$T_2 - T_1 = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr, \quad (۳-۱۳۵)$$

که در آن انتگرال، بر روی مسیر حرکت ذره بین نقاط r_1 و r_2 گرفته می‌شود. انتگرال طرف راست

معادلات (۳-۱۳۴) و (۳-۱۳۵) عبارت است از کار انجام شده بر ذره، به وسیله نیروی F در فاصله زمانی t_1 و t_2 . توجه کنید که چگونه جبر برداری تشابه بین حالات یک و دو و سه بعدی قضایای اندازه حرکت و انرژی را ظاهر می‌سازد.

۸-۳ قضایای اندازه حرکت زاویه‌ای برداری و صفحه‌ای

اگر ذره‌ای در صفحه‌ای حرکت کند، اندازه حرکت زاویه‌ای L_O آن حول نقطه O را به صورت گشتاور بردار اندازه حرکت آن حول نقطه O و به عبارت دیگر به صورت حاصل ضرب فاصله ذره از نقطه O ، در مؤلفه اندازه حرکت عمود بر خط واصل ذره به O ، تعریف می‌کنیم. اغلب اندیس O حذف می‌شود، مگر هنگامی که گشتاورهای حول چند نقطه مختلف در بحث وارد شود، ولی باید به خاطر داشت که اندازه حرکت زاویه‌ای، مانند گشتاور - نیرو، نسبت به مبدأ خاصی که گشتاورها حول آن حساب می‌شوند، منظور می‌گردد. اندازه حرکت زاویه‌ای L را هنگامی مثبت می‌گیریم که ذره در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت حول نقطه O حرکت کند. L را می‌توان به سادگی بر حسب مختصات قطبی و مبدأ O بیان کرد. فرض کنید که ذره دارای جرم m باشد. در این صورت، اندازه حرکت آن mv و مؤلفه عمود بر بردار شعاعی آن (که از نقطه O به مکان ذره وصل می‌شود)، mv_θ است. به شکل ۳-۲۶ توجه کنید. چنانکه اگر از معادله (۳-۷۸) استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$L = rmv_\theta = mr^2 \dot{\theta}. \quad (۳-۱۳۶)$$

اگر نیرو را بر حسب مؤلفه‌های قطبی آن بنویسیم:

$$F = \hat{r}F_r + \hat{\theta}F_\theta. \quad (۳-۱۳۷)$$

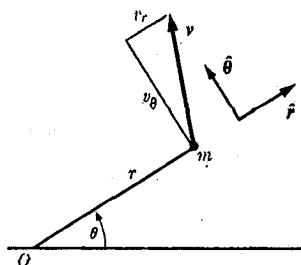
در این صورت، با استفاده از معادله (۳-۸۰)، معادله حرکت در مختصات قطبی در صفحه، یعنی معادله (۳-۱۲۵)، چنین می‌شود،

$$ma_r = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r, \quad (۳-۱۳۸)$$

$$ma_\theta = mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = F_\theta. \quad (۳-۱۳۹)$$

توجه می‌کنیم که

$$\frac{dL}{dt} = 2m\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}.$$



شکل ۳-۲۶ مؤلفه‌های سرعت در صفحه.

بنابراین، اگر معادله (۳-۱۳۹) را در r ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_{\theta} = N. \quad (۳-۱۴۰)$$

کمیت rF_{θ} عبارت است از گشتاور - نیرویی که نیروی F حول نقطه O وارد می‌کند. اگر از معادله (۳-۱۴۰) انتگرال بگیریم، صورت انتگرال‌گیری شده قضیه اندازه حرکت زاویه‌ای برای حرکت در یک صفحه را به دست می‌آوریم.

$$L_2 - L_1 = mr^2\dot{\theta}_2 - mr^2\dot{\theta}_1 = \int_{t_1}^{t_2} rF_{\theta} dt. \quad (۳-۱۴۱)$$

با تعریف اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره حول یک محور به صورت گشتاور بردار اندازه حرکتش حول این محور، می‌توان تعریف اندازه حرکت زاویه‌ای را طوری تعمیم داد که حرکت در فضای سه بعدی را شامل شود. درست به همان طریق که گشتاور نیرو حول یک محور را در بخش ۳-۲ تعمیم دادیم. این گسترش از همه ساده‌تر در مختصات استوانه‌ای با منظور کردن محور z به عنوان محوری که گشتاورها حول آن حساب می‌شوند، انجام می‌شود. در این صورت تعمیم قضایای (۳-۱۴۰) و (۳-۱۴۱) برای این حالت را می‌توان به سادگی، همانند اثبات فوق ثابت کرد. انجام این اثباتها را به عنوان تمرین گذاشته‌ایم.

آخرین تعمیم مفهوم اندازه حرکت زاویه‌ای تعریف اندازه حرکت زاویه‌ای برداری L_O حول نقطه O به صورت گشتاور برداری O بردار اندازه حرکت حول O است:

$$L_O = r \times p = m(r \times v), \quad (۳-۱۴۲)$$

که در آن r فاصله مبدأ O تا مکان ذره m است. در اینجا نیز اگر بهمین ابهام نباشد، می‌توان اندیس O را حذف کرد. مؤلفه بردار L در هر جهت، عبارت است از گشتاور بردار اندازه حرکت p حول محوری در همان جهت که از O می‌گذرد.

اگر حاصل ضرب خارجی r را با دو طرف معادله برداری حرکت [معادله (۳-۱۲۵)] تشکیل

دهیم، خواهیم داشت:

$$r \times \left(m \frac{dv}{dt} \right) = r \times F. \quad (۳-۱۴۳)$$

طبق قوانین جبر برداری و حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری،

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt} [r \times (mv)] \\ &= r \times \frac{d}{dt} (mv) + \frac{dr}{dt} \times (mv) \\ &= r \times \frac{d}{dt} (mv) + v \times (mv) \\ &= r \times \left(m \frac{dv}{dt} \right). \end{aligned}$$

اگر این نتیجه را در معادله (۳-۱۴۳) جایگزین کنیم، داریم:

$$\frac{dL}{dt} = r \times F = N. \quad (3-144)$$

یعنی میزان تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای برداری یک ذره نسبت به زمان برابر است با بردار گشتاور-نیروی وارد بر آن. قضیه اندازه حرکت زاویه‌ای را می‌توان به صورت انتگرال زیر نیز نوشت.

$$L_2 - L_1 = \int_{t_1}^{t_2} N dt. \quad (3-145)$$

قضایای اندازه حرکت زاویه‌ای صفحه‌ای و اندازه حرکت زاویه‌ای حول یک محور را می‌توان از قضایای اندازه حرکت زاویه‌ای برداری با اختیار مؤلفه‌ها در جهت مناسب، به دست آورد.

۳-۹ بحث درباره مسئله کلی حرکت دوبعدی و سه‌بعدی

اگر نیروی $F(v, r, t)$ به‌طور کلی به صورت تابعی از مکان، سرعت، و زمان در دست باشد، معادلات حرکت (۳-۱۲۶) به صورت دستگاهی از سه (در حالت دوبعدی، دستگاهی از دو) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همزمان در می‌آید:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t). \end{aligned} \quad (3-146)$$

اگر مکان $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ، و سرعت $v_0 = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$ در هر لحظه t_0 داده شده باشند، از معادلات (۳-۱۴۶) می‌توان d^2r/dt^2 را به دست آورد و از r, \dot{r} ، و \ddot{r} در لحظه t ، می‌توان r و \dot{r} را برای یک لحظه بعد و یا قبل در $t + dt$ تعیین کرد، و به این ترتیب توابع r, \dot{r} ، و \ddot{r} را با کمک معادلات (۳-۱۴۶)، به گذشته و آینده توسعه داد. می‌توان به این استدلال دقت ریاضی بخشید، و در این صورت به یک قضیه وجود جواب منجر می‌شود که وجود یک جواب یگانه این معادلات را برای مکان و سرعت داده شده در لحظه اولیه t_0 ، تضمین کند. توجه کنید که جواب عام معادلات (۳-۱۴۶) شامل شش ضریب ثابت «دلخواه» $x_0, y_0, z_0, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}$ است. به جای این شش ضریب، می‌توان هر شش کمیت دیگری را مشخص کرده که این شش ضریب را بتوان از آنها به دست آورد. (در مورد حرکت دوبعدی، دو معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و چهار ضریب ثابت «دلخواه» وجود خواهد داشت).

به‌طور کلی، حل دستگاه سه معادله همزمان (۳-۱۴۶) از حل تک معادله (۲-۹) برای حرکت یک‌بعدی به مراتب مشکل‌تر است. علت این دشواری آن است که، به‌طور کلی، تمام متغیرهای x, y, z و مشتق‌هایشان در هر سه معادله وجود دارند، و در نتیجه مسئله را به اندازه یک تک‌معادله مرتبه ششم مشکل می‌کنند. [در حقیقت، می‌توان نشان داد که دستگاه معادلات (۳-۱۴۶) با یک

تک معادله مرتبه ششم معادل است.] اگر هر مؤلفه نیرو فقط شامل مختصه متناظر و مشتق آن باشد،

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(\dot{x}, x, t), \\ F_y &= F_y(\dot{y}, y, t), \\ F_z &= F_z(\dot{z}, z, t), \end{aligned} \quad (۱۴۷-۳)$$

در این صورت، سه معادله (۳-۱۴۶) مستقل از یکدیگر خواهند بود. می توان معادلات (۳-۱۴۷) را به صورت سه مسئله مستقل در حرکت یک بعدی در نظر گرفت و $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ را به طور جداگانه از آنها به دست آورد. مهمترین مثال برای این حالت شاید هنگامی است که نیرو فقط به صورت تابعی از t داده شده باشد:

$$F = F(t) = [F_x(t), F_y(t), F_z(t)]. \quad (۳-۱۴۸)$$

در این صورت، معادلات حرکت x ، y ، و z را می توان به طور جداگانه با روش بخش ۲-۳ حل کرد. حالتی که نیروی اصطکاک با سرعت متناسب است نیز مثالی از نوع (۳-۱۴۷) است. بعضی اوقات حالات دیگری نیز پیش می آیند، مانند، نوسانگر هارمونیک سه بعدی (مثلاً توپ بیس بالی که در طشتی از ژلاتین قرار گرفته باشد، و یا اتمی در شبکه کریستالی)، که برای آنها نیرو، با انتخاب مناسب محورها، عبارت است از

$$\begin{aligned} F_x &= -k_x x, \\ F_y &= -k_y y, \\ F_z &= -k_z z, \end{aligned} \quad (۳-۱۴۹)$$

اکنون مسئله، به سه مسئله نوسانگر هارمونیک خطی جداگانه بر حسب x ، y ، و z تقسیم شده است. ناگفته نماند که در اغلب حالات، کار به این سادگی نیست و معادلات (۳-۱۴۷) برقرار نیست. روشهای خاصی برای حل پاره‌ای گروههای مسائل دوی بعدی و سه بعدی وجود دارد. بعضی از این روشها را در این فصل، به دست خواهیم آورد. مسائلی را که با این روشها قابل حل نباشند همیشه می توان از نظر اصول به وسیله روشهای عددی مختلف انتگرال گیری دستگاهی از معادلات مانند معادلات (۳-۱۴۶)، حل کرد و جوابهایی تقریبی با هر دقت لازم به دست آورد. چنین روشهایی در حالت سه بعدی، به مراتب خسته کننده تر از حالت یک بعدی اند، و معمولاً هم جز به کمک ماشینهای بزرگ خودکار محاسبه عملی نیستند.

وقتی سعی می کنیم که اندیشه انرژی پتانسیل را به حرکت دوی بعدی یا سه بعدی تعمیم دهیم، مشاهده می کنیم که در دست داشتن نیرویی به صورت $F(r)$ (که فقط تابعی از r باشد) برای تضمین وجود تابع انرژی پتانسیل $V(r)$ کافی نیست. در حالی که در حالت یک بعدی، مشاهده کردیم که اگر نیرو فقط تابعی از مکان باشد، تابع انرژی پتانسیل را همیشه می توان به وسیله معادله (۲-۴۱) تعریف کرد. علت اصلی این است که در حالت یک بعدی، ذره‌ای که از x_1 به x_2 می رود و به x_1 باز می گردد، باید در بازگشت همان مسیر را طی کند، به طوری که اگر نیرو فقط تابعی از مکان باشد، کار انجام شده بر ذره به وسیله نیرو، به هنگام برگشت به ضرورت باید مساوی کاری باشد که نیرو به هنگام رفتن از x_1 به x_2 انجام داده است. در حالی که در حالت سه بعدی، ذره ممکن

است از r_1 به r_2 برود و مسیر برگشت مختلفی اختیار کند، به طوری که حتی اگر F تابعی از r باشد، ذره ممکن است هنگام برگشت، تحت تأثیر نیروی دیگری قرار گیرد و کار انجام شده بر ذره همان کار قبلی نباشد. در بخش ۳-۱۲، معیاری برای تعیین وجود انرژی پتانسیل $V(r)$ بیان خواهیم کرد.

وقتی $V(r)$ وجود دارد، قضیهٔ بقای انرژی همچنان صادق است، و انرژی کل $(T+V)$ ، یک ثابت حرکت است. مع هذا هر چند در حرکت یک بعدی، انتگرال انرژی (لااقل از نظر اصولی) همیشه برای حل کردن مسئله کافی است (بخش ۲-۵)، در حرکت دو و سه بعدی، دیگر چنین حکمی صادق نیست. اگر x تنها مختصه باشد، در این صورت اگر رابطه‌ای $(E = T + V)$ بین x و \dot{x} برقرار باشد، می توانیم $\dot{x} = f(x)$ را به دست آوریم و مسئله را فقط، به یک انتگرال گیری تبدیل کنیم. لکن با مختصات x, y, z و یک رابطه بین $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ کافی نیست. ما احتیاج داریم که در حالت کلی، پنج رابطه از این نوع در دست داشته باشیم تا بتوانیم مثلاً x, y, \dot{x}, \dot{y} را حذف کنیم و $\dot{z} = f(z)$ را به دست آوریم. در حالت دو بعدی، سه رابطه بین x, y, \dot{x}, \dot{y} لازم است تا بتوانیم مسئله را با این روش حل کنیم. در اغلب حالات، یافتن چهار معادلهٔ دیگر مانند انتگرال انرژی از معادلات (۳-۱۴۶) (و یا دو معادلهٔ دیگر در حالت دو بعدی) غیر ممکن است. در واقع، معمولاً چنین روابطی وجود ندارند. مع هذا اغلب می توان کمیت‌های دیگری (مثلاً اندازهٔ حرکت زاویه‌ای) را که ثابت‌های حرکت‌اند، پیدا کرد و از آنجا یک یا دو رابطهٔ دیگر بین $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ و \dot{z} به دست آورد که در بسیاری از موارد برای حل مسئله کافی است. در آینده به ذکر مثال‌های مربوط می پردازیم.

۳-۱۰ نوسانگر هارمونیک در فضاهاى دوبعدى و سه بعدى

در این بخش و بخش بعد، چند مسئلهٔ ساده در نظر می گیریم که در آنها نیرو به صورت معادلات (۳-۱۴۷) است، به طوری که معادلات حرکت به معادلات مستقلی بر حسب x, y, z و تقسیم می شوند. در این صورت از نظر ریاضی، سه مسئلهٔ جداگانه داریم که هر یک از نوعی است که در فصل ۲ بررسی کردیم. تنها مطلب جدید این است که سه جواب $x(t), y(t), z(t)$ را نمایش حرکت در فضای سه بعدی تعبیر کنیم.

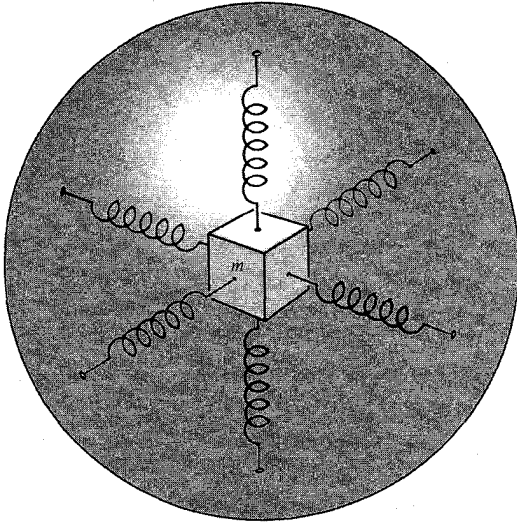
ابتدا، حل مسئلهٔ نوسانگر هارمونیک سه بعدی بی میرایی را به طور مختصر در نظر می گیریم که معادلات حرکت عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_x x, \\ m\ddot{y} &= -k_y y, \\ m\ddot{z} &= -k_z z. \end{aligned} \quad (3-150)$$

برای تصور چنین نوسانگری، می توان جرمی را بین سه مجموعه فنر متعامد آویزان کرد. به شکل ۳-۲۷ مراجعه کنید. جوابهای این معادله را از بخش ۲-۸ می دانیم:

$$\begin{aligned} x &= A_x \cos(\omega_x t + \theta_x), & \omega_x^2 &= k_x/m, \\ y &= A_y \cos(\omega_y t + \theta_y), & \omega_y^2 &= k_y/m, \\ z &= A_z \cos(\omega_z t + \theta_z), & \omega_z^2 &= k_z/m, \end{aligned} \quad (3-151)$$

شش ضریب $(A_x, A_y, A_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$ به شرایط اولیهٔ $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ بستگی دارند. هر



شکل ۳-۲۷ نمونه یک نوسانگر هارمونیک سه بعدی.

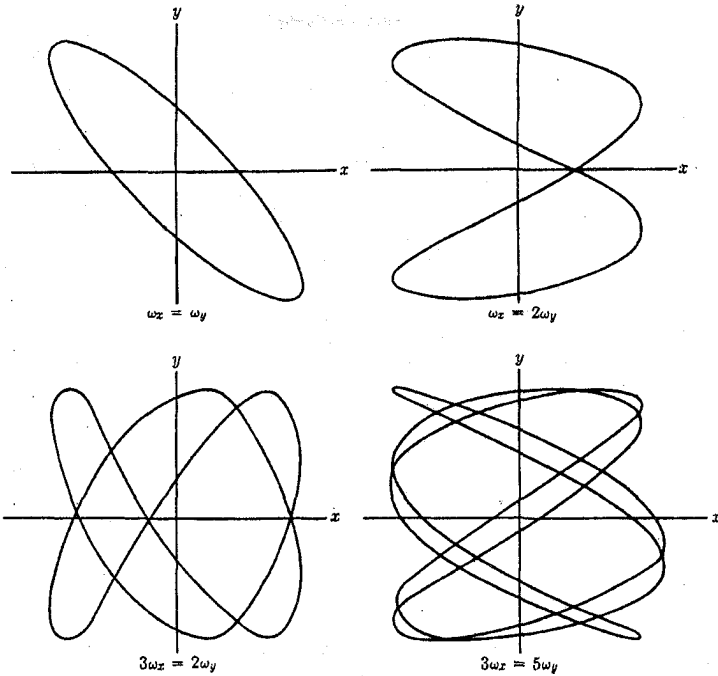
مختصه‌ای به طور مستقل با حرکت هارمونیک ساده‌ای که فرکانس آن به جرم و ضریب نیروی بازگرداننده متنظر بستگی دارد، در نوسان است. حرکت منتجه ذره در محدوده‌ای به شکل مکعب مستطیل به ابعاد $2A_x \times 2A_y \times 2A_z$ در اطراف مبدأ رخ می‌دهد. اگر فرکانسهای زاویه‌ای $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ متوافق باشند، یعنی اگر برای مجموعه‌ای از اعداد صحیح (n_x, n_y, n_z) رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z}, \quad (3-152)$$

در این صورت مسیر حرکت ذره در فضا، مسیری بسته خواهد بود، و حرکت تناوبی است. اگر (n_x, n_y, n_z) چنان اختیار شوند که مقسوم علیه صحیح مشترکی نداشته باشند، در این صورت زمان تناوب حرکت عبارت است از

$$\tau = \frac{2\pi n_x}{\omega_x} = \frac{2\pi n_y}{\omega_y} = \frac{2\pi n_z}{\omega_z}. \quad (3-153)$$

طی یک زمان تناوب، مختصه x ، n_x بار و مختصه y ، n_y بار و مختصه z ، n_z بار نوسان می‌کند، به طوری که در پایان زمان تناوب، ذره به مکان و سرعت اولیه خود بر می‌گردد. در فضای دوبعدی، اگر مسیر ذره نوسانگر برای ترکیبهای مختلف فرکانس ω_x و ω_y و فازهای مختلف θ_x و θ_y رسم شود شکلهای جالب و زیبایی بسیاری به دست می‌آیند. این شکلها را شکلهای لیسازو^۱ می‌نامند، (به شکل ۳-۲۸ مراجعه کنید)، و ممکن است آنها را به طور مکانیکی به وسیله مکانیزمی به دست آورد که یک مداد و یا وسیله نوشتنی دیگری را طبق معادلات (۳-۱۵۱) به حرکت در می‌آورد. شکلهای



شکل ۳-۲۸ شکلهای لیسازو.

مشابه دیگری را می‌توان به‌طور الکتریکی بر روی یک نوسان بین کاتدی به‌وسیلهٔ روفتن افقی و عمودی با ولتاژهای نوسان‌کنندهٔ مناسبی به‌دست آورد. اگر فرکانسهای ω_x ، ω_y و ω_z متوافق باشند، یعنی اگر معادلهٔ (۳-۱۵۲) برای هیچ مجموعه از اعداد صحیح برقرار نباشد، حرکت تناوبی نخواهد بود، و مسیر ذره تمام محدودهٔ $2A_x \times 2A_y \times 2A_z$ را پر می‌کند؛ به این معنی که ذره سرانجام به‌طور دلخواه به هر نقطه از محدوده نزدیک می‌شود. این بحث را می‌توان بی‌درنگ به حالت‌های نوسانهای میرا و نوسانهای واداشته در فضای دوبعدی و سه‌بعدی تعمیم داد.

اگر هر سه ضریب k_x ، k_y و k_z مساوی باشند، نوسانگر را ایزوتروپ^۱ گویند، یعنی در تمام جهات یکسان است. در این حالت، سه فرکانس ω_x ، ω_y و ω_z مساوی‌اند و حرکت تناوبی است، و هر محور در هر دورهٔ تناوب، یک نوسان کامل می‌کند. می‌توان نشان داد که مسیر برحسب مقادیر دامنه‌ها و فازها $(A_x, A_y, A_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$ ، بیضی شکل، مستقیم‌الخط، و یا دایره‌ای است.

۱۱-۳ گلوله

یکی از مسائل مهم تاریخ علم مکانیک، تعیین مسیر گلوله است. اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، گلوله‌ای که در حرکت پرتابی تحت تأثیر نیروی ثقل قرار می‌گیرد، در نزدیکی سطح زمین طبق معادلهٔ

1. Isotropic

زیر حرکت می‌کند

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -mg\hat{z}, \quad (154-3)$$

که در آن محور z در جهت قائم اختیار شده است. معادله فوق را می‌توان به صورت معادله‌های مؤلفه‌ای زیر نوشت:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad (155-3)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad (156-3)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg, \quad (157-3)$$

جواب معادلات فوق عبارت‌اند از:

$$x = x_0 + v_{x_0} t, \quad (158-3)$$

$$y = y_0 + v_{y_0} t, \quad (159-3)$$

$$z = z_0 + v_{z_0} t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (160-3)$$

و یا به صورت برداری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{z}. \quad (161-3)$$

فرض می‌کنیم که گلوله از مبدأ $(0, 0, 0)$ با سرعت اولیه‌اش در صفحه xz ، یعنی $v_{y_0} = 0$ شروع به حرکت کند. این محدودیتی بر روی حرکت گلوله نیست، بلکه فقط به انتخاب دستگاه مختصات مناسبی مربوط می‌شود. در این صورت معادلات $(158-3)$ ، $(159-3)$ ، و $(160-3)$ به صورت زیر در می‌آیند

$$x = v_{x_0} t, \quad (162-3)$$

$$y = 0, \quad (163-3)$$

$$z = v_{z_0} t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (164-3)$$

این معادلات، حرکت گلوله را کاملاً توصیف می‌کنند. اگر t را از دو معادله اول پیدا کنیم و در معادله سوم قرار دهیم، معادله‌ای برای مسیر حرکت در صفحه xz به دست می‌آید:

$$z = \frac{v_{z_0}}{v_{x_0}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x_0}^2} x^2. \quad (165-3)$$

معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\left(x - \frac{v_{z_0} v_{x_0}}{g} \right)^2 = -2 \frac{v_{x_0}^2}{g} \left(z - \frac{v_{z_0}^2}{2g} \right). \quad (166-3)$$

این معادله یک سهمی است که تععرش به طرف پایین است و در نقطه

$$z_m = \frac{v_{z_0}^2}{2g}, \quad (167-3)$$

به حداکثر ارتفاع خود می‌رسد، و صفحه افقی $z = 0$ را در مبدأ و در نقطه

$$x_m = 2 \frac{v_{z_0} v_{x_0}}{g}. \quad (168-3)$$

قطع می‌کند. اگر سطح زمین افقی باشد، x_m برد گلوله خواهد بود.

اکنون مقاومت هوا را به صورت نیروی اصطکاکی متناسب با سرعت در نظر می‌گیریم:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -mg\hat{z} - b \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (169-3)$$

اگر فرض کنیم که حرکت فقط در صفحه xz انجام شود، معادله فوق را می‌توان به صورت مؤلفه‌ای

زیر نوشت

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt}, \quad (170-3)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - b \frac{dz}{dt}.$$

باید توجه داشت که مقاومت واقعی هوا در مقابل گلوله متحرک، تابع پیچیده‌ای از سرعت

است، بنابراین جوابهایی که به دست می‌آوریم اگر چه، ماهیت کلی حرکت را بیان می‌کنند ولی

فقط تقریبی‌اند. اگر گلوله از کانون در لحظه $t = 0$ شروع به حرکت کند، جوابهای

معادلات (۱۷۰-۳) عبارت‌اند از:

$$v_x = v_{x_0} e^{-bt/m}, \quad (171-3)$$

$$x = \frac{m v_{x_0}}{b} (1 - e^{-bt/m}), \quad (172-3)$$

$$v_z = \left(\frac{mg}{b} + v_{z_0} \right) e^{-bt/m} - \frac{mg}{b}, \quad (173-3)$$

$$z = \left(\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{m v_{z_0}}{b} \right) (1 - e^{-bt/m}) - \frac{mg}{b} t. \quad (174-3)$$

[به بخشهای ۲-۴ و ۲-۶ مراجعه کنید.] اگر t را از معادله (۱۷۲-۳) به دست آوریم و در

معادله (۱۷۴-۳) جایگزین کنیم، معادله‌ای برای مسیر حرکت گلوله به دست می‌آید:

$$z = \left(\frac{mg}{b v_{x_0}} + \frac{v_{z_0}}{v_{x_0}} \right) x - \frac{m^2 g}{b^2} \ln \left(\frac{m v_{x_0}}{m v_{x_0} - b x} \right). \quad (175-3)$$

برای مقاومت کم هوا، یا مسافت‌های کوتاه، وقتی $1 \ll (bx)/(mv_{x_0})$ باشد، می‌توان معادله (۳-۱۷۵) را بر حسب توانهای $(bx)/(mv_{x_0})$ بسط داد تا رابطه زیر به دست آید:

$$z = \frac{v_{z_0}}{v_{x_0}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x_0}^2} x^2 - \frac{1}{3} \frac{bg}{mv_{x_0}^3} x^3 - \dots \quad (3-176)$$

بنابراین مسیر حرکت گلوله در ابتدا به صورت سهمی است، ولی برای مقادیر بزرگتر x (اگر v_{x_0} مثبت اختیار کنیم)، z سریع‌تر از یک سهمی کاهش می‌یابد. این واقعیت که در جمله نخست با معادله (۳-۱۶۵) تطابق دارند و جمله سوم هم علامت درستی دارد راهی جذاب برای بررسی صحیح بودن جبری دارد که به معادله (۳-۱۷۶) ختم می‌شود با بسط به سری توانی بر حسب پارامتری کوچک راهی ساده و سودمند برای بررسی صحیح بودن نتیجه است و علاوه بر آن فرمول تقریبی ساده‌ای به دست می‌دهد که برای تعبیر و تفسیر آسان است. طبق معادله (۳-۱۷۵)، وقتی x به سمت b/mv_{x_0} میل کند، z به سمت منهای بی‌نهایت میل خواهد کرد یعنی، مسیر گلوله به خط قائمی در نقطه $x = b/mv_{x_0}$ منتهی می‌شود. از معادله (۳-۱۷۳) نتیجه می‌شود که سقوط قائم در انتهای مسیر، در سرعت نهایی $-mg/b$ رخ می‌دهد. (البته، گلوله ممکن است قبل از رسیدن به این قسمت از مسیرش، به زمین برگردد.)

اگر $z = 0$ را در معادله (۳-۱۷۶) بگذاریم، علاوه بر جواب واضح $x = 0$ ، معادله دارای جوابی برای برد x_m است که می‌توان آن را به وسیله تقریبهای پیاپی به دست آورد. ما ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x_m = \frac{2v_{x_0} v_{z_0}}{g} - \frac{2}{3} \frac{b}{v_{x_0}} x_m^2 - \dots \quad (3-177)$$

اگر از جمله دوم به بعد صرف نظر کنیم، به عنوان تقریب اول داریم

$$x_m = \frac{2v_{x_0} v_{z_0}}{g},$$

که با معادله (۳-۱۶۸) سازگار است. حال این جواب را در جمله دوم معادله (۳-۱۷۷) جایگزین می‌کنیم تا تقریب دوم را به دست آوریم

$$x_m = \frac{2v_{x_0} v_{z_0}}{g} - \frac{8}{3} \frac{b v_{z_0}^2 v_{x_0}}{mg^2} \quad (3-178)$$

عبارت دوم، به منزله تصحیح مرحله اول برد و ناشی از مقاومت هوا است، و هرگاه مقاومت هوا کم باشد، دو عبارت اول تقریبی مناسب‌اند. جملات مرتبه بالاتر را می‌توان با تکرار فرایند جایگزینی جوابهای تقریبی در معادله (۳-۱۷۷) محاسبه کرد. بنابراین جملات پیاپی برای x_m را به صورت سری توانی در b به دست می‌آوریم. حالت انتهایی عکس هنگامی است که مقاومت هوا در تعیین برد عامل اصلی باشد، (شکل ۳-۲۹)، و این حالت هنگامی رخ می‌دهد که مسیر قائم گلوله در نقطه $x = (mv_{x_0})/b$ در بالای صفحه افقی $z = 0$ شروع شود. در این صورت برد تقریبی عبارت است از

$$x_m = \frac{mv_{x_0}}{b}, \quad \left(\frac{bv_{z_0}}{mg} \gg 1 \right). \quad (3-179)$$



شکل ۳-۲۹ مسیرهای حداکثر برد برای گلوله‌هایی که دارای سرعت دهانه‌ای مختلف‌اند.

ما می‌توانیم (به‌طور تقریبی) مسئله تأثیر باد بر گلوله را با فرض آن که نیروی مقاومت هوا با سرعت نسبی گلوله نسبت به هوا متناسب باشد، حل کنیم:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -mg\hat{z} - b \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_w \right), \quad (۱۸۰-۳)$$

که در آن \mathbf{v}_w سرعت باد است. اگر \mathbf{v}_w ثابت باشد، عبارت $b\mathbf{v}_w$ در معادله (۳-۱۸۰)، همانند نیروی ثابتی عمل می‌کند که به نیروی $-mg\hat{z}$ اضافه شده باشد، و مسئله را می‌توان به آسانی طبق روش فوق حل کرد، و تنها فرق در این است که ممکن است علاوه بر نیروهای اصطکاک، نیروهای ثابتی در سه جهت x ، y ، و z وجود داشته باشند.

مقاومت هوا با افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد، چنان که صورت بهتری برای معادله حرکت گلوله‌ای که تا ارتفاعات خیلی زیاد بالا می‌رود عبارت خواهد بود از

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -mg\hat{z} - b e^{-z/h} \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (۱۸۱-۳)$$

که در آن h ارتفاعی است (مثلاً در حدود هشت کیلومتر) که مقاومت هوا در آن به $1/e$ مقدار خود در سطح زمین، کاهش می‌یابد. این معادله به‌صورت مؤلفه‌ای بدین قرار است.

$$m\ddot{x} = -bx e^{-z/h}, \quad m\ddot{y} = -by e^{-z/h}, \\ m\ddot{z} = -mg - bz e^{-z/h}. \quad (۱۸۲-۳)$$

حل این معادلات از معادلات قبلی بسیار مشکل‌تر است. چون z در معادلات x و y ظاهر می‌شود، باید ابتدا $z(t)$ را از معادله z به‌دست آورد و سپس آن را در دو معادله دیگر جایگزین کرد. معادله z از نوع معادلات ساده مورد بحث فصل ۲ نیست. اهمیت این مسئله در جنگ جهانی اول زمانی معلوم شد که بر حسب تصادف متوجه شدند که وقتی توپ را با زاویه‌ای بسیار بزرگتر از زاویه‌ای که قبلاً تصور می‌کردند به حداکثر برد منجر می‌شود روانه کنند برد گلوله بسیار بیشتر می‌شود. اثر کاهش مقاومت هوا در ارتفاعات چند میلی روی برد گلوله، بسیار بیش از اثر کاهش مؤلفه افقی سرعت دهانه‌ای در اثر زیاد زاویه لوله توپ است.

۱۲-۳ انرژی پتانسیل

اگر نیروی F وارد بر ذره‌ای تابعی از مکانش $\mathbf{r} = (x, y, z)$ باشد، در این صورت کار انجام شده به‌وسیله نیرو، وقتی که ذره از \mathbf{r}_1 به \mathbf{r}_2 می‌رود به‌وسیله انتگرال خطی زیر داده می‌شود

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

پیشنهاد می شود که همانند معادله (۲-۴۱) برای حرکت یک بعدی، انرژی پتانسیل $V(r) = V(x, y, z)$ را به صورت کار انجام شده بر ذره وقتی که از r به نقطه شاخص r_s حرکت می کند، تعریف کنیم

$$V(r) = - \int_{r_s}^r F(r) \cdot dr . \quad (۳-۱۸۳)$$

اما چنین تعریفی متضمن آن است که تابع $V(r)$ فقط تابعی از مختصات (x, y, z) نقطه r (و از نقطه شاخص r_s که آن را ثابت فرض می کنیم) باشد، در حالی که در حالت کلی، انتگرال طرف راست به مسیر انتگرال گیری از r_s به r بستگی دارد. تعریف انرژی پتانسیل فقط هنگامی قابل قبول خواهد بود که انتگرال طرف راست مستقل از مسیر انتگرال گیری باشد.

فرض کنید که تابع نیروی $F(x, y, z)$ چنان باشد که انتگرال خطی معادله (۳-۱۸۳) مستقل از مسیر انتگرال گیری از r_s به هر نقطه r باشد. در این صورت مقدار انتگرال فقط به r (و به r_s بستگی دارد، و معادله (۳-۱۸۳) تابع انرژی پتانسیل $V(r)$ را تعریف می کند. تغییر V وقتی ذره از r به $r + dr$ حرکت می کند، برابر است با کار انجام شده به وسیله نیروی F با علامت منفی:

$$dV = -F \cdot dr . \quad (۳-۱۸۴)$$

اگر معادله (۳-۱۸۴) را با تعریف هندسی (معادله (۳-۱۰۷)) گرادیان مقایسه کنیم، مشاهده می کنیم که

$$\begin{aligned} -F &= \text{grad } V, \\ F &= -\nabla V. \end{aligned} \quad (۳-۱۸۵)$$

معادله (۳-۱۸۵) را می توان جواب معادله (۳-۱۸۳) برای F بر حسب V دانست. به صورت مؤلفه ای،

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad (۳-۱۸۶)$$

ضمن جستجوی شرطی که اگر در تابع $F(r)$ صادق باشد انتگرال معادله (۳-۱۸۳) مستقل از مسیر می شود، متوجه می شویم که چون معادله (۳-۲۸) را می توان از تعریف جبری حاصل ضرب خارجی ثابت کرد، این معادله باید برای علامت برداری ∇ نیز برقرار باشد:

$$\nabla \times \nabla = 0 . \quad (۳-۱۸۷)$$

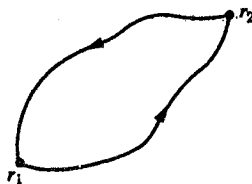
اگر $(\nabla \times \nabla)$ را برای تابع V به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\nabla \times \nabla V = \text{curl}(\text{grad } V) = 0 . \quad (۳-۱۸۸)$$

معادله فوق را می توان به راحتی به وسیله محاسبات مستقیم تحقیق کرد. از معادلات (۳-۱۸۸) و (۳-۱۸۵)، خواهیم داشت

$$\nabla \times F = \text{curl } F = 0 . \quad (۳-۱۸۹)$$

چون معادله (۳-۱۸۹) با فرض وجود یک تابع پتانسیل به دست آمد، به منزله شرط لازمی است که باید توسط تابع نیروی $F(x, y, z)$ برقرار بشود تا بتوان یک تابع پتانسیل را تعریف کرد. با



شکل ۳-۳۰ دو راه بین r_1 و r_2 که مسیر بسته‌ای را تشکیل می‌دهند.

استفاده از قضیه استوکس (معادله ۳-۱۱۷)) می‌توان نشان داد که معادله (۳-۱۸۹) نیز شرطی کافی برای وجود تابع پتانسیل است. بنا به قضیه استوکس، اگر هر مسیر بسته‌ای مانند C را در فضا در نظر بگیریم، کار انجام شده به وسیله نیروی $F(r)$ ، وقتی ذره این مسیر بسته را طی می‌کند عبارت است از

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \hat{n} \cdot (\nabla \times F) dS, \quad (3-190)$$

که در آن S سطحی است در فضا که به وسیله منحنی بسته C ، محصور شده است. اکنون اگر فرض کنیم که معادله (۳-۱۸۹) برقرار است، انتگرال طرف راست صفر است، و برای هر مسیر بسته خواهیم داشت

$$\int_C F \cdot dr = 0. \quad (3-191)$$

ولی اگر کار انجام شده به وسیله نیروی F حول هر مسیر بسته‌ای صفر باشد، در این صورت کار انجام شده وقتی از r_1 به r_2 می‌رویم، از مسیر انتخابی مستقل خواهد بود. برای اثبات، دو راه دلخواه بین r_1 و r_2 و مسیر بسته C را از r_1 به r_2 از یک راه و از r_2 به r_1 از راه دیگر در نظر می‌گیریم (شکل ۳-۳۰). چون کار انجام شده بر روی مسیر C برابر صفر است، باید کار انجام شده ضمن رفتن از r_1 به r_2 با کار انجام شده هنگام برگشت از r_2 به r_1 مساوی و مختلف‌العلامت باشد، و در نتیجه کار انجام شده در هر یک از دو مسیر یکسان است. اگر این استدلال را در مورد انتگرال طرف راست معادله (۳-۱۸۳) به کار ببریم، مشاهده می‌کنیم که نتیجه از مسیر انتگرال‌گیری از r_s تا r مستقل است، و بنابراین وقتی حد پایین r_s ثابت باشد، انتگرال تابعی مانند $V(r)$ از حد بالای انتگرال است. بنابراین وقتی نیرو به صورت تابع مکان $F(r)$ داده شده باشد، معادله (۳-۱۸۹) شرط لازم و کافی برای وجود تابع پتانسیل $V(r)$ است.

وقتی کرول F صفر است، کار انجام شده به وسیله نیرو را هنگامی که ذره از r_1 به r_2 حرکت می‌کند، می‌توان به صورت تفاضل مقادیر انرژی پتانسیل در این دو نقطه بیان کرد

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr &= \int_{r_1}^{r_s} F \cdot dr + \int_{r_s}^{r_2} F \cdot dr \\ &= V(r_1) - V(r_2). \end{aligned} \quad (3-192)$$

اگر معادله (۳-۱۹۲) را با قضیه انرژی (۳-۱۳۵) ترکیب کنیم، برای هر دو زمان دلخواه t_1 و t_2 خواهیم داشت

$$T_1 + V(r_1) = T_2 + V(r_2). \quad (3-193)$$

بنابراین، انرژی کل $(T + V)$ باز ثابت است و در مورد حرکت فضای سه بعدی، یک انتگرال انرژی موجود است

$$T + V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = E. \quad (۱۹۴-۳)$$

نیرویی که فقط تابعی از مکان باشد، و کرل آن صفر شود کنسرواتیو نامیده می شود، زیرا به قضیه بقای مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل (معادله ۳-۱۹۴)) منجر می گردد.

ممکن است در بعضی از حالات، نیروی $F(\mathbf{r}, t)$ تابعی از مکان و زمان هر دو باشد. اگر در هر زمان، کرل $F(\mathbf{r}, t)$ صفر شود، می توان یک تابع انرژی پتانسیل $V(\mathbf{r}, t)$ را به صورت زیر تعریف کرد

$$V(\mathbf{r}, t) = - \int_{r_s}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}, \quad (۱۹۵-۳)$$

و برای هر لحظه زمانی t چنان که $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0$ ، خواهیم داشت:

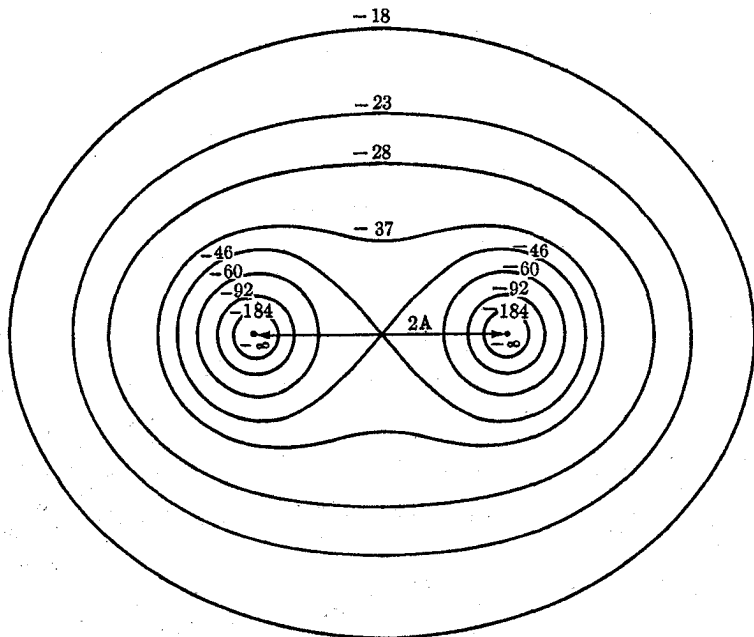
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = - \nabla V(\mathbf{r}, t). \quad (۱۹۶-۳)$$

اما چون معادله (۳-۱۹۲) دیگر برقرار نیست، قانون بقای انرژی را نمی توان ثابت کرد و تغییر انرژی پتانسیل دیگر مساوی منهای کار انجام شده بر ذره نیست، زیرا انتگرالی که انرژی پتانسیل را در زمان t تعریف می کند، از تابع نیرو در آن زمان حساب می شود، در حالی که انتگرالی که کار را تعریف می کند، در هر نقطه با استفاده از تابع نیرو در زمانی که ذره از آن نقطه می گذرد، حساب می گردد. در نتیجه وقتی F و V توابعی از زمان اند، انرژی $T + V$ ثابت نیست و چنین نیرویی را نباید کنسرواتیو نامید.

وقتی نیروهای وارد بر یک ذره، کنسرواتیونند، با استفاده از معادله (۳-۱۹۴) می توان سرعت ذره را بر حسب مکان آن حساب کرد. انرژی E ، با شرایط اولیه حرکت، ثابت است. معادله (۳-۱۹۴) نیز مانند معادله (۲-۴۴)، هیچگونه اطلاعی راجع به جهت حرکت نمی دهد. این ندانستن جهت حرکت در فضاهای دوبعدی و سه بعدی کار را بسیار دشوار می کند، زیرا در این حالتها، به خلاف حالت یک بعدی که فقط دو جهت مخالف یکدیگر برای حرکت ذره موجود است جهات حرکات ممکن بی نهایت بسیار است. در حالت یک بعدی، فقط یک مسیر برای حرکت ذره وجود دارد. در فضاهای دوبعدی و سه بعدی، مسیرهای زیادی وجود دارند و جز در صورتی که مسیر حرکت ذره را بدانیم، معادله (۳-۱۹۴) به تنهایی اطلاع زیادی درباره حرکت به ما نمی دهد، مگر آن که حرکت در ناحیه ای رخ دهد که $V(x, y, z) \leq E$ باشد. به عنوان مثال، انرژی پتانسیل یک الکترون در میدان جاذبه الکتریکی دو پروتون (ملکول یونیزه هیدروژن H_2^+)، عبارت است از

$$V = - \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2}, \quad (\text{esu}) \quad (۱۹۷-۳)$$

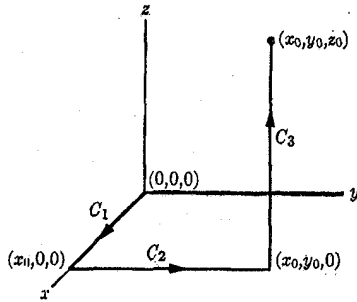
که در آن r_1 و r_2 فاصله های الکترون از دو پروتون است. تابع $V(x, y)$ (فقط برای حرکت در صفحه xy) در شکل ۳-۳۱ که نقشه خطوط طراز هم پتانسیل است، رسم شده است، در این نقشه دو پروتون به فاصله 2Å از هم در نقاط $x = \pm 1\text{Å}$ و $y = 0$ قرار دارند، و ارقام روی خطوط طراز انرژی پتانسیل ثابت، همان انرژیهای پتانسیل مربوط به آنهاست که به واحد 10^{-12} ارگ بیان شده است. تا زمانی که $E < -46 \times 10^{-12}$ ارگ باشد، محل الکترون به ناحیه اطراف یکی از پروتونها محدود



شکل ۳-۳۱ انرژی پتانسیل الکترون در میدان الکتریکی دو پروتون که به فاصله 2Å از هم قرار گرفته‌اند (انرژیهای پتانسیل بر حسب 10^{-12} ارگ‌اند).

است، و بر حسب شرایط اولیه، انتظار داریم که حرکتش نوسانی در طرفین مرکز جاذب، و یا گردش روی مداری حول آن باشد. (این توضیحات درباره حرکت احتمالی علاوه بر نتایجی که فقط از انتگرال انرژی گرفته می‌شود، به ششم فیزیکی نیز احتیاج دارد). اگر $\langle E \rangle > 0$ ارگ باشد، حرکت الکترون به ناحیه‌ای محدود می‌شود که شامل هر دو پروتون است، و حرکات متفاوتی امکان پذیر است. اگر $E > 0$ باشد، الکترون به هیچ ناحیه کرانداری در صفحه محدود نمی‌شود. اگر: $E \ll -46 \times 10^{-12}$ ارگ باشد، محل الکترون محدود به ناحیه‌ای است که خطوط هم‌پتانسیل تقریباً به صورت دایره‌ی دور یک پروتون اند، و حرکت آن عملاً چنان است که گویی پروتون دیگری موجود نیست. اگر $E < 0$ ولی $E \gg -46 \times 10^{-12}$ ارگ باشد، الکترون ممکن است، دور از مراکز جاذب بر مداری بچرخد، و در آن صورت، حرکتش تقریباً حرکت الکترونی است که با مرکز جاذب منفردی با بار $2e$ در پیوند باشد، زیرا خطوط هم‌پتانسیل در نقاط دور از مراکز جاذب، تقریباً دایره‌ای شکل‌اند.

هرگاه یک تابع انرژی پتانسیل $V(x, y, z)$ داده شده باشد، می‌توان با استفاده از معادله (۳-۱۸۶) مؤلفه‌های نیروی مربوط به آن را در هر نقطه حساب کرد. به عکس، با در دست داشتن نیروی $F(x, y, z)$ می‌توانیم کرول آن را محاسبه کنیم تا به وجود تابع انرژی پتانسیل پی ببریم. اگر تمام مؤلفه‌های بردار کرول F در هر ناحیه از فضا صفر باشند، F را می‌توان، در آن ناحیه از فضا، بر حسب یک تابع انرژی پتانسیل، به صورت $-\nabla V$ نمایش داد. انرژی پتانسیل را باید از



شکل ۳-۳ یک مسیر انتگرال‌گیری از $(0,0,0)$ تا (x_0, y_0, z_0) .

معادله (۳-۱۸۳) حساب کرد. به علاوه، چون $\text{curl } F = 0$ است، نتیجه از مسیر انتگرال‌گیری مستقل است، و می‌توان انتگرال را در هر مسیر مناسبی حساب کرد. به عنوان مثال، دو تابع نیروی زیر را در نظر می‌گیریم

$$F_x = axy, \quad F_y = -az^2, \quad F_z = -ax^2, \quad (\text{الف})$$

$$F_x = ay(y^2 - 3z^2), \quad F_y = 3ax(y^2 - z^2), \quad F_z = -6axyz, \quad (\text{ب})$$

که در آن a ثابت است. کرل را در هر دو حالت محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \hat{x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (\text{الف}) \\ &= (\gamma az) \hat{x} + (\gamma ax) \hat{y} - (ax) \hat{z}, \end{aligned}$$

$$\nabla \times F = 0. \quad (\text{ب})$$

در حالت (الف)، انرژی پتانسیلی وجود ندارد. در حالت (ب)، انرژی پتانسیل وجود دارد و آن را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $r_s = 0$ باشد، یعنی انرژی پتانسیل را در مبدأ، صفر می‌گیریم. چون مؤلفه‌های نیرو به صورت توابعی از x, y, z داده شده‌اند، ساده‌ترین مسیر انتگرال‌گیری از $(0,0,0)$ به (x_0, y_0, z_0) برای محاسبه انتگرال معادله (۳-۱۸۳)، مسیری است که در امتداد خطوط موازی با محورهای مختصات ادامه می‌یابد، مثلاً مسیری که در شکل ۳-۳ اختیار شده است:

$$V(x_0, y_0, z_0) = - \int_{(0,0,0)}^{(x_0, y_0, z_0)} F \cdot dr = - \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr - \int_{C_3} F \cdot dr.$$

در امتداد C_1 داریم

$$y = z = 0, \quad F_x = F_y = F_z = 0, \quad dr = \hat{x} dx.$$

بنابراین

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{x_0} F_x dx = 0.$$

در امتداد C_1 ،

$$x = x_0, \quad z = 0,$$

$$F_x = ay^2, \quad F_y = 3ax_0y^2, \quad F_z = 0,$$

$$dr = \hat{y} dy.$$

بنابراین

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^y F_y dy = ax_0 y^3.$$

در امتداد C_2 ،

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

$$F_x = ay_0(y_0^2 - 3z^2), \quad F_y = 3ax_0(y_0^2 - z^2), \quad F_z = -6ax_0y_0z,$$

$$dr = \hat{z} dz.$$

بنابراین

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^z F_z dz = -3ax_0y_0z^2.$$

به این ترتیب اگر اندیس ۰ را حذف کنیم، انرژی پتانسیل عبارت است از

$$V(x, y, z) = -axy^2 + 3axyz^2.$$

به سادگی می توان نشان داد که گرادیان این تابع، نیروی داده شده در قسمت (ب) فوق است. در واقع، یک روش برای یافتن انرژی پتانسیل که اغلب از روش فوق سریع تر است؛ این است که سعی کنیم تابعی را حدس بزنیم که گرادیان آن، نیروی مورد نظر را بدهد.

یکی از حالات مهم نیروی کنسرواتو، نیروی مرکزی است و آن نیرویی است که همیشه به سمت یک مرکز ثابت O ، یا دور از آن مؤثر است، و اندازه آن فقط تابعی از فاصله ذره تا O است. در مختصات کروی با مبدأ O ، نیروی مرکزی به صورت زیر است.

$$\mathbf{F} = \hat{r}F(r). \quad (۱۹۸-۳)$$

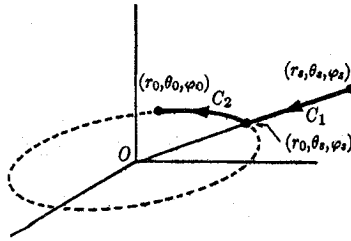
چون $\hat{r} = \mathbf{r}/r$ است، مؤلفه های دکارتی یک نیروی مرکزی عبارت اند از:

$$F_x = \frac{x}{r} F(r),$$

$$F_y = \frac{y}{r} F(r), \quad [r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}], \quad (۱۹۹-۳)$$

$$F_z = \frac{z}{r} F(r).$$

با محاسبه مستقیم، می توان نشان داد که کرل این نیرو صفر است، و به تابع $F(r)$ بستگی ندارد.



شکل ۳-۳۳ مسیر انتگرال‌گیری برای نیروی مرکزی.

برای مثال

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right),$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = y \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right).$$

بنابراین مؤلفه z بردار کرل F صفر می‌شود، و به همین ترتیب، مؤلفه‌های دیگر آن نیز صفر می‌شوند. برای محاسبه انرژی پتانسیل، نقطه شاخص دلخواهی مانند r_s را اختیار می‌کنیم و از r_s تا r در امتداد مسیری که در شکل ۳-۳۳ نشان داده شده است، یعنی ابتدا از r_s به مختصات $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ در امتداد شعاع (C_1) تا نقطه $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ و سپس در امتداد محیط دایره‌ای (C_2) به شعاع r حول مبدأ تا نقطه (r, θ, φ) انتگرال‌گیری می‌کنیم. در امتداد C_1 ,

$$dr = \hat{r} dr,$$

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{r_s}^r F(r) dr.$$

در امتداد C_2 ,

$$dr = \hat{\theta} r d\theta + \hat{\phi} r \sin \theta d\varphi,$$

$$\int_{C_2} F \cdot dr = 0.$$

بنابراین

$$V(r_s) = - \int_{r_s}^r F \cdot dr = - \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr$$

$$= - \int_{r_s}^r F(r) dr.$$

انرژی پتانسیل فقط تابعی از r است:

$$V(r) = V(r) = - \int_{r_s}^r F(r) dr. \quad (۳-۲۰۰)$$

۱۳-۳ حرکت ذره تحت تأثیر نیروی مرکزی

نیروی مرکزی نیرویی است که به صورت معادله (۳-۱۹۸) داده می‌شود. از نظر فیزیکی، چنین نیرویی به منزله نیروی جاذب، [اگر $F(r) < 0$ باشد] و یا نیروی دافع، [اگر $F(r) > 0$ باشد] از

نقطه ثابتی واقع بر مبدأ $r = 0$ خواهد بود. در حالات بسیاری که دو ذره با یکدیگر درکنش‌اند، نیروی بین آنها (لااقل در وهله اول) نیروی مرکزی است. بدین معنی که اگر هر یک از ذرات در مبدأ قرار گرفته باشد، نیروی وارد بر دیگری به وسیله معادله (۳-۱۹۸) داده می‌شود. به‌عنوان مثال، نیروی ثقل خورشید بر سیارات، یا نیروی جاذبه الکتریکی هسته اتم بر الکترون، نیروی مرکزی جاذب‌اند. نیروی موجود بین یک پروتون یا یک ذره α و یک هسته دیگر، نیروی مرکزی دافع است. در اغلب حالات مهم، نیروی $F(r)$ با $1/r^2$ متناسب است. این حالت را در بخش بعد بررسی خواهیم کرد. صور دیگر تابع $F(r)$ نیز گاهی پیش می‌آید، مثلاً در بعضی از مسائل سازه و برهم‌کنش‌های هسته‌ای اتمهای پیچیده و ملکولها. در این بخش روش کلی حل مسئله ذره‌ای را که تحت تأثیر یک نیروی مرکزی حرکت می‌کند، ارائه می‌دهیم.

چون در تمام این مثالها، هیچ یک از دو ذره‌ای که با یکدیگر درکنش‌اند، به نقطه ثابتی بسته نشده‌اند، مسئله‌ای که حل می‌کنیم، مانند اغلب مسائل فیزیکی، به منزله آرمانی‌سازی مسئله واقعی است و هنگامی معتبر است که عملاً بتوانیم یکی از ذرات را در مبدأ ساکن پنداریم، مثلاً اگر یکی از ذرات بسیار سنگین‌تر از دیگری باشد. چون بنا به قانون سوم نیوتن، نیروهای وارد به هر دو ذره با هم برابرند، شتاب ذره سنگین‌تر، از شتاب ذره سبک‌تر بسیار کوچکتر است، و حرکت ذره سنگین‌تر، در مقایسه با حرکت ذره سبک‌تر قابل صرف‌نظر کردن است. در آینده در بخش ۴-۷ به این حقیقت پی خواهیم برد که راه حل ما با ترمیم مختصری می‌تواند، حتی هنگامی که دو جرم با هم مساوی‌اند، به جواب دقیقی برای مسئله حرکت دو ذره درکنش منجر شود.

توجه کنید که اندازه حرکت زاویه‌ای برداری یک ذره تحت تأثیر نیروی مرکزی ثابت است، زیرا

گشتاور - نیرو عبارت است از

$$N = r \times F = (r \times \hat{r}) F(r) = 0. \quad (201-3)$$

بنابراین طبق معادله (۳-۱۴۴)، خواهیم داشت:

$$\frac{dL}{dt} = 0. \quad (202-3)$$

در نتیجه، اندازه حرکت زاویه‌ای حول هر محوری که از مرکز نیرو می‌گذرد ثابت است. علت مهم بودن مفهوم اندازه حرکت زاویه‌ای این است که بسیاری از نیروهای فیزیکی، نیروهای مرکزی‌اند.

برای به‌دست آوردن معادله حرکت ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی مرکزی قرار گرفته است، ابتدا نشان می‌دهیم که مسیر ذره در صفحه‌ای قرار دارد که شامل مرکز نیرو است. برای نشان دادن این مطلب، فرض می‌کنیم که مکان r و سرعت v در هر زمان اولیه t داده شده باشند، و محور x را گذرنده از مکان اولیه r ذره و محور z را عمود بر سرعت اولیه v اختیار می‌کنیم. در این صورت در

ابتدا داریم

$$x_0 = |r|, \quad y_0 = z_0 = 0, \quad (203-3)$$

$$v_{x_0} = v_0 \cdot \hat{x}, \quad v_{y_0} = v_0 \cdot \hat{y}, \quad v_{z_0} = 0. \quad (204-3)$$

طبق معادلات (۳-۱۹۹)، معادلات حرکت در مختصات دکارتی عبارت اند از:

$$m\ddot{x} = \frac{x}{r}F(r), \quad m\ddot{y} = \frac{y}{r}F(r), \quad m\ddot{z} = \frac{z}{r}F(r). \quad (۳-۲۰۵)$$

یک جواب معادله z که شرایط اولیه z_0 و \dot{z}_0 را برقرار می‌کند، عبارت است از:

$$z(t) = 0. \quad (۳-۲۰۶)$$

بنابراین، حرکت به تمامی در صفحه xy رخ می‌دهد. از نظر فیزیکی می‌بینیم که اگر نیروی وارد بر ذره همیشه به سمت مبدأ باشد، سرعت ذره هرگز نمی‌تواند مؤلفه‌ای خارج از صفحه‌ای داشته باشد که ذره از ابتدا در آن حرکت می‌کند. همچنین می‌توان این نتیجه را معلول بقای اندازه حرکت زاویه‌ای دانست. طبق معادله (۳-۲۰۲)، بردار $L = m(r \times v)$ ثابت است، و بنابراین هر دو بردار r و v باید همیشه در صفحه‌ای ثابت عمود بر L قرار گیرند.

اکنون مسئله را به مسئله حرکت در یک صفحه تبدیل کرده‌ایم که دارای دو معادله دیفرانسیل و چهار شرط اولیه است که باید برقرار شوند. اگر مختصات قطبی r و θ را در صفحه حرکت اختیار کنیم، طبق معادلات (۳-۸۰) و (۳-۱۹۸)، معادلات حرکت در جهتهای r و θ عبارت اند از

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r), \quad (۳-۲۰۷)$$

$$mr\ddot{\theta} - 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0. \quad (۳-۲۰۸)$$

اگر معادله (۳-۲۰۸) را چنان که در مورد قضیه مشتق اندازه حرکت زاویه‌ای (در صفحه) دیدیم در r ضرب کنیم، خواهیم داشت.

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt} = 0. \quad (۳-۲۰۹)$$

این معادله، بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول مبدأ را بیان می‌کند و همچنین نتیجه‌ای از معادله (۳-۲۰۲) فوق است. می‌توان از آن انتگرال گرفت تا انتگرال اندازه حرکت زاویه‌ای معادلات حرکت به دست آید

$$mr^2\dot{\theta} = L = \text{مقدار ثابت}. \quad (۳-۲۱۰)$$

مقدار ثابت L را باید از شرایط اولیه به دست آورد. چون نیرو کنسرواتیو است، یک انتگرال دیگر معادلات (۳-۲۰۷) و (۳-۲۰۸) عبارت است از:

$$T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) = E, \quad (۳-۲۱۱)$$

که در آن $V(r)$ به وسیله معادله (۳-۲۰۰) داده شده است و E ثابت انرژی است که باید از شرایط اولیه حساب شود. اگر $\dot{\theta}$ را از معادله (۳-۲۱۰) به دست آوریم و آن را در معادله فوق جایگزین کنیم، انرژی چنین می‌شود

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E. \quad (۳-۲۱۲)$$

\dot{r} را از معادله فوق به دست می آوریم

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)} \quad (213-3)$$

بنابراین

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{[E - V(r) - (L^2/2mr^2)]^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t. \quad (214-3)$$

انتگرال را باید حساب کرد و $r(t)$ را از معادله حاصل به دست آورد. سپس $\theta(t)$ از معادله (۲۱۰-۳) حاصل می شود.

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt. \quad (215-3)$$

به این ترتیب، جواب معادلات (۲۰۷-۳) و (۲۰۸-۳) بر حسب چهار ضریب ثابت E ، L ، r_0 و θ_0 به دست می آید که آنها را می توان با معلوم بودن مکان و سرعت اولیه ذره در صفحه حساب کرد.

توجه کنید که روش حل ما بر اساس معادله (۲۱۲-۳) همانند روش حل مسئله یک بعدی بر اساس انتگرال انرژی (معادله (۲-۴۴)) است. در اینجا مختصه r نقش x ، و $\dot{\theta}$ در انرژی جنبشی، وقتی $\dot{\theta}$ به وسیله معادله (۲۱۰-۳) حذف شده باشد، نقش عبارتی اضافی به انرژی پتانسیل را بازی می کند. از جایگزین کردن معادله (۲۱۰-۳) در معادله (۲۰۷-۳)، این تشابه را بهتر می توان نشان داد

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r). \quad (216-3)$$

اگر عبارت $-L^2/mr^3$ را به طرف راست معادله فوق ببریم، خواهیم داشت

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}. \quad (217-3)$$

این معادله درست با معادله حرکت یک بعدی برای ذره ای که تحت تأثیر نیروی واقعی $F(r)$ و «نیروی گریز از مرکز» L^2/mr^3 قرار گرفته است، هم شکل است. نیروی گریز از مرکز، در واقع به هیچ روی نیرو نیست، بلکه قسمتی از حاصل ضرب جرم در شتاب است که به طرف راست معادله منتقل شده است تا معادله r را به معادله ای تبدیل کند که همان شکل حرکت یک بعدی را دارا باشد و ما آن را «نیروی کاذب» می نامیم. اگر معادله (۲۱۷-۳) را به صورت مسئله حرکت یک بعدی در نظر بگیریم، «انرژی پتانسیل» مؤثر مربوط به «نیروی» طرف راست عبارت است از

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int F(r) dr - \int \frac{L^2}{mr^3} dr \\ &= V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \end{aligned} \quad (218-3)$$

عبارت دوم V' ، عبارت است از «انرژی پتانسیل» وابسته به «نیروی گریز از مرکز». انتگرال انرژی حاصل، درست معادله (۳-۲۱۲) است. علت این که توانستیم جواب کاملی برای مسئله خودمان به دست آوریم که فقط بر اساس دو انتگرال و یا ثابتهای حرکت (E و L) نهاده شده است، این است که معادلات حرکت شامل مختصه θ نیستند، لذا ثابت بودن L ما را قادر می‌کند که θ را به کلی از معادله (۳-۲۰۷) حذف کنیم و مسئله را به یک مسئله یک بعدی معادل آن تبدیل کنیم.

بعضی اوقات در عمل، محاسبه انتگرال معادله (۳-۲۱۴) نسبتاً مشکل و به دست آوردن $r(t)$ از معادله حاصل دشوار می‌شود. بعضی اوقات پیدا کردن مسیر ذره در فضا ساده‌تر از پیدا کردن معادله حرکت آن به صورت تابعی از زمان است. می‌توانیم مسیر ذره را به وسیله تعیین $r(\theta)$ توصیف کنیم. اگر به جای r و u مقادیر زیر را قرار دهیم، معادله حاصل تا حدودی ساده‌تر می‌شود

$$u = \frac{1}{r}, \quad r = \frac{1}{u}. \quad (3-219)$$

با استفاده از معادله (۳-۲۱۰) داریم

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -r^2 \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} \\ &= -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}, \end{aligned} \quad (3-220)$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (3-221)$$

اگر این مقادیر r و \ddot{r} را در معادله (۳-۲۱۷) جایگزین کنیم، و در $(L^2 u^2) - m$ ضرب کنیم، معادله دیفرانسیلی برای مسیر و یا مدار بر حسب $u(\theta)$ خواهیم داشت

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right). \quad (3-222)$$

اگر $L=0$ باشد، طرف راست معادله (۳-۲۲۲) بی‌نهایت می‌شود، ولی از معادله (۳-۲۱۰) می‌توان نتیجه گرفت که در این حالت θ ثابت است و مسیر خط مستقیمی است که از مبدأ می‌گذرد.

حتی در مواردی که حل صریح معادلات (۳-۲۱۴) و (۳-۲۱۵) و یا معادله (۳-۲۲۲) مشکل است، می‌توان [درست مانند حالت یک بعدی که در بخش ۲-۵ مورد بحث قرار گرفت] از طریق پتانسیل مؤثر V' که به وسیله (۳-۲۱۸) داده می‌شود اطلاعاتی کیفی درباره حرکت r به دست آورد. از طریق رسم $V'(r)$ ، برای هر انرژی کل E می‌توان تشخیص داد که آیا حرکت به ازای r متناوب و یا غیرمتناوب است. می‌توان نقاط برگشت متحنی را مشخص کرد و نیز می‌توان چگونگی تغییر سرعت \dot{r} هنگام حرکت را به طور تقریبی توصیف کرد. اگر $V'(r)$ در نقطه r_c دارای می‌نیمی باشد، در این صورت r_c می‌تواند به ازای انرژی E که کمی از $V'(r_c)$ بزرگتر است، حول نقطه r_c با سرعت زاویه‌ای زیر، نوسانهای کوچک تقریباً هارمونیک داشته باشد.

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2 V'}{dr^2} \right)_{r_c}. \quad (3-223)$$

[بحث مربوط به معادله (۲-۵۷) را در بخش ۲-۷ ببینید.] البته باید به خاطر داشت که ذره در عین حال با سرعت زاویه‌ای زیر حول مرکز نیرو می‌چرخد،

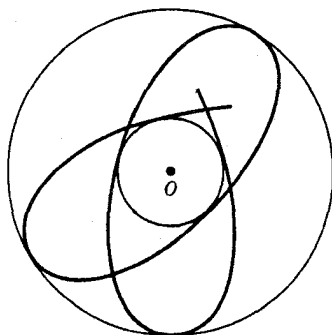
$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}. \quad (۳-۲۲۴)$$

با افزایش r ، میزان چرخش ذره بر حسب زمان، کاهش می‌یابد. وقتی حرکت r متناوب است، زمان تناوب حرکت r در حالت کلی با زمان تناوب چرخش یکسان نیست، چنان‌که، هر چند مدار ذره به ناحیه‌ای متناهی از فضا محدود است، ممکن است بسته نباشد. (شکل ۳-۳۴ را ببینید.) در مواردی که حرکت r متناوب نیست، وقتی r به سمت ∞ میل می‌کند، سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ به سمت صفر میل خواهد کرد، و بر حسب اینکه r به چه تندگی افزایش می‌یابد، ذره هنگام حرکت به طرف $r = \infty$ ، ممکن است یک یا چند چرخش کامل انجام بدهد، یا ندهد. در صورتی که حرکت تناوبی باشد، یعنی هنگامی که ذره در مدار بسته‌ای حرکت کند، زمان تناوب حرکت مداری ذره به سطح مدار مربوط است. این نتیجه را می‌توان به صورت زیر نشان داد. وقتی ذره به اندازه زاویه کوچک $d\theta$ حرکت کند، سطح رفته به وسیله شعاع واصل از کانون تا ذره تقریباً عبارت است از (به شکل ۳-۳۵ مراجعه کنید).

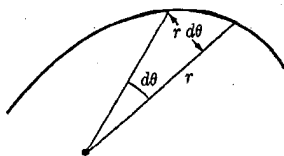
$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (۳-۲۲۵)$$

بنابراین طبق معادله (۳-۲۱۰)، میزان رفته شدن سطح به وسیله شعاع بر حسب زمان عبارت است از

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m}. \quad (۳-۲۲۶)$$



شکل ۳-۳۴ مداری که به طور غیرمتناوب محدود شده است.



شکل ۳-۳۵ سطح رفته توسط شعاع.

این نتیجه برای هر ذره‌ای که تحت تأثیر نیرویی مرکزی حرکت می‌کند برقرار است. اگر حرکت متناوب باشد، و در طول یک زمان تناوب کامل τ حرکت انتگرال‌گیری کنیم، سطح مدار چنین خواهد بود

$$S = \frac{L\tau}{2m} \quad (۲۲۷-۳)$$

اگر مدار معلوم باشد، زمان تناوب چرخش را می‌توان از این فرمول حساب کرد.

۳-۱۴ نیروی مرکزی متناسب با عکس مربع فاصله

مهمترین مسئله حرکت در فضای سه بعدی مسئله جرمی است که تحت تأثیر نیرویی مرکزی متناسب با عکس مربع فاصله از مرکز حرکت می‌کند

$$F = \frac{K}{r^2} \hat{r}, \quad (۲۲۸-۳)$$

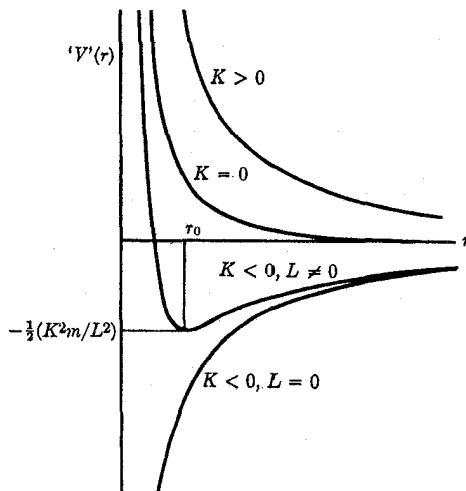
که انرژی پتانسیل برای آن عبارت است از

$$V(r) = \frac{K}{r}, \quad (۲۲۹-۳)$$

که در آن برای اجتناب از ثابت دیگری در $V(r)$ ، شعاع شاخص r_0 بی‌نهایت اختیار شده است. به عنوان مثال، نیروی ثقل (بخش ۱-۵)، بین دو جرم m_1 و m_2 که به فاصله r از یکدیگر قرار گرفته‌اند به وسیله معادله (۲۲۸-۳) یا

$$K = -Gm_1m_2, \quad G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ dyne-g}^{-2}\text{-cm}^2, \quad (۲۳۰-۳)$$

داده می‌شود که در آن K منفی است، زیرا نیروی ثقل جاذب است. مثال دیگر، نیروی الکترواستاتیک بین دو ذره باردار q_1 و q_2 است که به فاصله r از یکدیگر قرار گرفته‌اند. این



شکل ۳-۳۶ پتانسیل مؤثر نیروی مرکزی متناسب با عکس قانون مربع نیرو.

نیرو به وسیله معادله (۳-۲۲۸) با

$$K = q_1 q_2, \quad (۳-۲۳۱)$$

داده می شود که در آن آحاد بارها، آحاد الکترواستاتیک و واحد نیرو، دین است. وقتی بارهای q_1 و q_2 هم علامت اند، نیروی الکترواستاتیک دافع، و در غیر این صورت جاذب است. از نظر تاریخی، مسائل حرکت سیارات تحت تأثیر نیروی جاذبه ثقلی خورشید و حرکت ماهواره ها به دور سیارات، اولین مسائلی بودند که با روش مکانیک نیوتنی حل شدند. موفقیت نظریه در توضیح این حرکات، ضامن قبول اولیه آن شد.

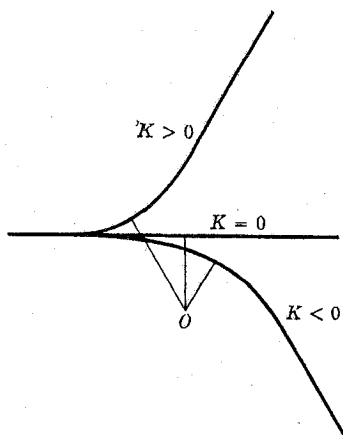
ابتدا کیفیت مدارهایی را تعیین می کنیم که به وسیله قانون نیروی متناسب با $1/r^2$ داده شده اند.

پتانسیل مؤثر

$$'V'(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (۳-۲۳۲)$$

در شکل ۳-۳۶ رسم شده است.

برای یک نیروی دافع ($K > 0$)، هیچگونه حرکت تناوبی در امتداد r وجود ندارد، فقط انرژیهای کل مثبت E امکان پذیر است و ذره از $r = \infty$ به یک نقطه برگشت می آید و دوباره به سمت بی نهایت دور می شود. برای انرژی و اندازه حرکت زاویه ای داده شده، نقطه برگشت، در مقایسه با حالت $K = 0$ (یعنی حالتی که نیرویی وجود ندارد) و مدار خطی مستقیم است، در r بزرگتری قرار می گیرد. برای نیروی جاذب ($K < 0$) و $L \neq 0$ ، اگر $E > 0$ باشد، حرکت باز نامحدود است، ولی در این حالت، نقطه برگشت، در مقایسه با حالت $K = 0$ ، در r کوچکتری قرار می گیرد. در نتیجه این مدارها به صورتی خواهند بود که در شکل ۳-۳۷ مشخص شده اند. خطوط نازک در شکل ۳-۳۷ نمایشگر شعاع نقطه برگشت یا فاصله حضیض اند، که از نزدیکترین نقطه مسیر ذره تا مرکز جاذب یا دافع اندازه گیری شده است. برای $K < 0$ و $E < 0 < \frac{1}{2} K^2 m / L^2$ - مختصه r بین دو نقطه برگشت نوسان می کند. برای $E = -\frac{1}{2} K^2 m / L^2$ ، ذره در دایره ای به شعاع $r_0 = L^2 / (-Km)$ حرکت می کند. محاسبه نشان می دهد (مسئله ۴۴ انتهای این فصل را ببینید) که



شکل ۳-۳۷ طرح مدارهای نامحدود حرکت، تحت تأثیر نیروی متناسب با $1/r^2$.

زمان تناوب نوسانهای کوچک r همان زمان تناوب چرخش است، به طوری که برای E نزدیک به $-\frac{1}{2}K^2m/L^2$ ، مدار منحنی بسته‌ای است، که مبدأ آن اندکی از مرکز منحرف شده است. در آینده نشان خواهیم داد که اگر $L \neq 0$ باشد، مدار به‌ازای تمام مقادیر منفی E بیضی است. اگر $L = 0$ باشد، مسئله به حرکت جسم افتان در فضای یک بعدی تبدیل می‌شود که در بخش ۲-۶ مورد بحث قرار گرفت.

محاسبه انتگرال در معادلات (۳-۲۱۴) و (۳-۲۱۵) برای قانون نیروی متناسب با $1/r^2$ به نسبت پرمحمت است. خواهیم دید که تمام اطلاعات اساسی درباره حرکت را می‌توان به سادگی بیشتری با شروع کار از معادله (۳-۲۲۲) مدار، به دست آورد. در این حالت، معادله (۳-۲۲۲) مدار چنین می‌شود

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mK}{L^2}. \quad (3-223)$$

این معادله با معادله یک نوسانگر هارمونیک با فرکانس واحد که تحت تأثیر نیروی ثابتی قرار گرفته باشد، همشکل است (در اینجا، θ نقش t را بازی می‌کند). معادله همگن و جواب عمومی آن عبارت‌اند از

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0, \quad (3-234)$$

$$u = A \cos(\theta - \theta_0), \quad (3-235)$$

که در آن A و θ_0 ضرایب ثابت دلخواه‌اند. یک جواب خاص بدیهی معادله غیرهمگن (۳-۲۳۳)، جواب ثابت است

$$u = -\frac{mK}{L^2}. \quad (3-236)$$

بنابراین جواب عام معادله (۳-۲۳۳) عبارت است از

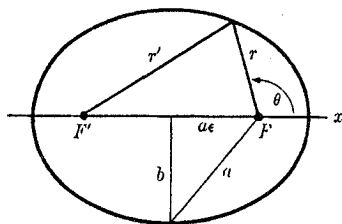
$$u = \frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} + A \cos(\theta - \theta_0). \quad (3-237)$$

چنان‌که به‌زودی نشان خواهیم داد، این معادله یک مقطع مخروطی (بیضی، سهمی، یا هذلولی) با کانون $r = 0$ است. ثابت θ_0 ، طرز قرار گرفتن مدار در صفحه را مشخص می‌کند. ثابت A که ممکن است مثبت اختیار شود (چون θ_0 دلخواه است)، نقاط برگشت حرکت r را معین می‌کند. این نقاط به‌وسیله روابط زیر داده می‌شوند

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{mK}{L^2} + A, \quad \frac{1}{r_2} = -\frac{mK}{L^2} - A. \quad (3-238)$$

اگر $A > -mK/L^2$ باشد (چنان‌که به‌ضرورت برای $K > 0$ چنین است)، در این صورت فقط یک نقطه برگشت r_1 وجود خواهد داشت، زیرا r نمی‌تواند منفی باشد. حالت $A < -mK/L^2$ ممکن نیست، زیرا در این صورت r نمی‌تواند برای تمام مقادیر θ مثبت باشد. برای E داده شده، نقاط برگشت جوابهای معادله زیرند

$$V(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E. \quad (3-239)$$



شکل ۳-۳۸ توضیح هندسی بیضی.

که جوابهای آن عبارت اند از:

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{mK}{L^2} + \left[\left(\frac{mK}{L^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L^2} \right]^{1/2} \quad (240-3)$$

$$\frac{1}{r_2} = -\frac{mK}{L^2} - \left[\left(\frac{mK}{L^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L^2} \right]^{1/2}$$

از مقایسه معادله (۳-۲۳۸) با معادله (۳-۲۴۰) نتیجه می شود که مقدار A بر حسب انرژی و اندازه حرکت زاویه ای به وسیله معادله زیر داده می شود

$$A^2 = \frac{m^2 K^2}{L^2} + \frac{2mE}{L^2} \quad (241-3)$$

اکنون مدار بر حسب شرایط اولیه معین شده است.

بیضی عبارت است از مسیر ذره ای متحرک که مجموع فواصلش از دو نقطه ثابت F و F' همواره مقدار ثابتی باشد. ^۱ نقاط F و F' را کانونهای بیضی می نامند. با به کار بردن علائم (شکل ۳-۳۸)، داریم

$$r' + r = 2a, \quad (242-3)$$

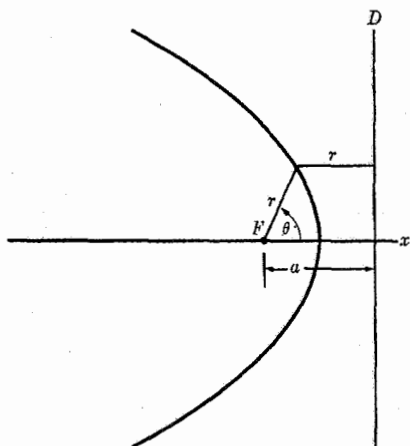
که در آن a نصف قطر بزرگتر بیضی است. اگر دستگاه مختصات قطبی را طوری اختیار کنیم که مرکزش در کانون F باشد و محور x منفی از کانون F' عبور کند، قانون کسینوس به معادله زیر منجر می شود.

$$r'^2 = r^2 + 2a^2 \varepsilon^2 + 2ra\varepsilon \cos \theta, \quad (243-3)$$

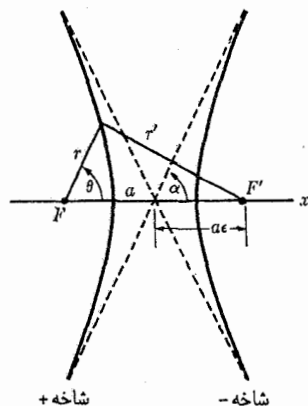
که در آن $a\varepsilon$ فاصله مرکز بیضی تا کانون است. ε را ضریب خروج از مرکز بیضی می نامند. اگر $\varepsilon = 0$ باشد، کانونها برهم منطبق خواهند بود و بیضی یک دایره است. وقتی ε به سمت ۱ میل می کند، برحسب اینکه کانون F' به بی نهایت برود و یا در فاصله ثابتی از F باقی بماند، بیضی به یک سهمی یا به یک خط مستقیم تبدیل می شود. اگر r' را از معادله (۳-۲۴۲) به دست آوریم و در معادله (۳-۲۴۳) جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$r = \frac{a(1 + \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (244-3)$$

۱. برای بحث مفصل تر درباره مقاطع مخروطی فصلهای ۶، ۷، ۸، ۱۰ کتاب زیر را ببینید.



شکل ۳-۴۰ تعریف هندسی سهمی.



شکل ۳-۳۹ تعریف هندسی هذلولی.

معادله (۳-۲۴۴)، معادله یک بیضی با مختصات قطبی است که از مبدأ آن بر یکی از کانونها منطبق است اگر b نصف کوچکترین قطر بیضی باشد. از شکل ۳-۳۸ داریم

$$b = a(1 - \varepsilon^2)^{1/2}. \quad (3-245)$$

سطحی بیضی را می توان مستقیماً به وسیله انتگرال گیری به دست آورد

$$S = \pi ab. \quad (3-246)$$

هذلولی عبارت است از مسیر نقطه متحرکی که تفاضل فواصلش از دو کانون ثابت F و F' همواره مقدار ثابتی باشد (شکل ۳-۳۹). هذلولی دارای دو شاخه است که به وسیله معادلات زیر تعریف می شوند

$$r' - r = 2a \text{ (شاخه مثبت)}, \quad (3-247)$$

$$r' - r = -2a \text{ (شاخه منفی)}.$$

شاخه ای که F را دور می زند، شاخه مثبت (شاخه طرف چپ در شکل) و شاخه ای را که از F دوری می جوید، شاخه منفی (شاخه طرف راست در شکل) می نامند. معادله (۳-۲۴۳) برای هذلولی نیز برقرار است، ولی اینجا ضریب خروج از مرکز ε ، از یک بزرگتر است. در مختصات قطبی، معادله هذلولی چنین می شود

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \varepsilon \cos \theta}. \quad (3-248)$$

(علامت + به شاخه مثبت، و علامت - به شاخه منفی مربوط می شود). خطوط مجانب هذلولی، (خطوط نقطه چین در شکل ۳-۳۹)، با محوری که از کانون می گذرد، زاویه α تشکیل می دهد، و

همان مقدار θ است که به ازای آن r بی نهایت می شود

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3-249)$$

سهمی عبارت است از مسیر نقطه متحرکی که فواصل آن از خط ثابت D (خط هادی) و کانون ثابت F برابر باشد. از شکل ۳-۴۰ داریم

$$r = \frac{a}{1 + \cos \theta}, \quad (250-3)$$

که در آن a فاصله کانون F تا خط هادی D است. می توان معادلات هر سه مقطع مخروطی را به صورت شاخص زیر نوشت

$$\frac{1}{r} = B + A \cos \theta, \quad (251-3)$$

که در آن A مثبت است، و B و A به صورت زیر داده می شوند
اگر $B > A$ باشد، یعنی در مورد بیضی

$$B = \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)}; \quad (252-3)$$

اگر $B = A$ باشد یعنی در مورد سهمی،

$$B = \frac{1}{a}, \quad A = \frac{1}{a}; \quad (253-3)$$

اگر $0 < B < A$ باشد، یعنی در مورد شاخه مثبت هذلولی

$$B = \frac{1}{a(\varepsilon^2 - 1)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon^2 - 1)}; \quad (254-3)$$

اگر $0 < B < -A$ باشد، یعنی در مورد شاخه منفی هذلولی

$$B = -\frac{1}{a(\varepsilon^2 - 1)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon^2 - 1)}. \quad (255-3)$$

حالت $B < -A$ ممکن نیست، زیرا در این صورت، r برای هیچ یک از مقادیر θ مثبت نخواهد بود. اگر طرز قرار گرفتن دلخواهی برای منحنی نسبت به محور x اختیار کنیم، معادله (۳-۲۵۱)، چنین می شود

$$\frac{1}{r} = B + A \cos(\theta - \theta_0), \quad (256-3)$$

که در آن θ_0 زاویه بین محور x و خطی است که از کانون به نقطه حضيض وصل می شود (و آن نقطه ای از منحنی است که نزدیکترین فاصله را از مبدأ دارد). باید توجه داشته باشید که در تمام حالات

$$\varepsilon = \frac{A}{|B|}. \quad (257-3)$$

برای بیضی و یا هذلولی

$$a = \left| \frac{B}{A^2 - B^2} \right|. \quad (258-3)$$

معادله (۳-۲۳۷) برای مدار ذره‌ای که تحت تأثیر قانون نیروی متناسب با $1/r^2$ قرار گرفته باشد، با معادله (۳-۲۵۶) برای یک مقطع مخروطی هم‌شکل است، به شرطی که A, B ، [با استفاده از معادله (۳-۲۴۱)] مقادیر زیر را داشته باشند،

$$B = -\frac{mK}{L^2}, \quad (3-259)$$

$$A = \left(B^2 + \frac{2mE}{L^2} \right)^{1/2}.$$

طبق معادله (۳-۲۵۷)، ضریب خروج از مرکز مدار عبارت است از

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{mK^2} \right)^{1/2}. \quad (3-260)$$

برای نیروی جاذب ($K < 0$) و بسته به اینکه $E < 0$ ، $E = 0$ یا $E > 0$ باشد، مدار بیضی یا سهمی یا هذلولی است. اگر مدار هذلولی باشد، شاخهٔ مثبت آن خواهد بود. برای نیروی دافع ($K > 0$)، باید $E > 0$ باشد، و مدار فقط می‌تواند شاخهٔ منفی هذلولی باشد. این نتایج با بحث کیفی قبلی ما توافق دارند. برای مدارهای بیضی و هذلولی شکل، نیم محور بزرگتر a به وسیلهٔ رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$a = \left| \frac{K}{2E} \right|. \quad (3-261)$$

باعث تعجب است که این رابطه شامل ضریب خروج از مرکز و یا اندازهٔ حرکت زاویه‌ای نیست. انرژی E فقط به نیم محور بزرگتر a بستگی دارد و به عکس. معادلات (۳-۲۶۰) و (۳-۲۶۱) را می‌توان مستقیماً از معادله (۳-۲۳۹) نقاط برگشت حرکت r ، به دست آورد. اگر r از این معادله پیدا کنیم، نقاط برگشت به دست می‌آیند،

$$r_{1,2} = \frac{K}{2E} \pm \left[\left(\frac{K}{2E} \right)^2 + \frac{L^2}{2mE} \right]^{1/2}. \quad (3-262)$$

کوچکترین و بزرگترین شعاع بیضی عبارت‌اند از:

$$r_{1,2} = a(1 \pm \varepsilon), \quad (3-263)$$

و کوچکترین شعاع هذلولی عبارت است از:

$$r_1 = a(\varepsilon \pm 1), \quad (3-264)$$

که در آن علامت بالایی برای شاخهٔ مثبت، و علامت پایینی برای شاخهٔ منفی است. از مقایسهٔ معادلات (۳-۲۶۳) و (۳-۲۶۴) با معادله (۳-۲۶۲)، می‌توان مقادیر a و ε را خواند. بنابراین اگر بدانیم که مسیر، بیضی یا هذلولی است، می‌توانیم اندازه و شکل آن را به سهولت از معادله (۳-۲۳۹) به دست آوریم که در واقع از روش سادهٔ انرژی نتیجه می‌شود، بی‌آنکه لازم باشد جواب دقیق معادلهٔ مدار را به دست آوریم. این نکتهٔ مفیدی است که باید به خاطر سپرد.

۳-۱۵ مدارهای بیضی شکل - مسئله کپلر

در اوایل قرن هفدهم، پیش از آنکه نیوتن قوانین حرکت خود را کشف کند، کپلر سه قانون زیر را برای توصیف حرکت سیارات اعلام کرد. کپلر این قوانین را از رصدهای دقیق و پر دامنه‌ای که تیکوبراهه از حرکات سیارات انجام داده بود استخراج کرد.

۱. سیارات در مدارهایی بیضی شکل حرکت می‌کنند که خورشید بر روی یکی از کانونهای آنها قرار دارد.

۲. سطح روفته شده به‌وسیله بردار شعاعی خورشید تا سیارات در زمانهای مساوی، مساوی است.

۳. مربع زمان تناوب چرخش سیارات به دور خورشید با مکعب نصف محور بزرگ‌تر بیضی متناسب است.

قانون دوم به‌وسیله معادله (۳-۲۲۶) بیان شده و نتیجه‌ای از بقای اندازه حرکت زاویه‌ای است. این قانون نشان می‌دهد که نیروی وارد بر سیارات نیرویی مرکزی است. همان‌طور که قبلاً نشان داده‌ایم، قانون اول از این حقیقت ناشی می‌شود که نیرو با عکس مربع فاصله متناسب است. قانون سوم از این حقیقت ناشی می‌شود که نیروی ثقل همان‌طور که در زیر نشان داده شده است با جرم سیاره متناسب است.

در حالت مدار بیضی شکل، زمان تناوب حرکت را می‌توان از معادلات (۳-۲۲۷) و (۳-۲۴۶) به‌دست آورد:

$$\tau = \frac{\gamma m}{L} \pi a b = \frac{\gamma m}{L} \pi a^2 (1 - \varepsilon^2)^{1/2} = \left(\frac{\pi^2 K^2 m}{2|E|^3} \right)^{1/2}, \quad (3-245)$$

یا با استفاده از معادله (۳-۲۶۱)،

$$\tau^2 = 4\pi^2 a^3 \left| \frac{m}{K} \right|. \quad (3-246)$$

در حالتی که جسم کوچکی به جرم m ، تحت تأثیر نیروی جاذبه ثقل جسم بزرگی به جرم M ، حرکت می‌کند، (معادله (۳-۲۳۰)) معادله فوق به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{MG} a^3. \quad (3-247)$$

ضریب a^3 برای تمام سیارات ثابت است، و این با قانون سوم کپلر توافق دارد. اگر G را بدانیم، با اندازه گرفتن زمان تناوب و محور بزرگتر مدار هر سیاره می‌توانیم از معادله (۳-۲۴۷) جرم خورشید را «اندازه» بگیریم. این کار را در گذشته در مسئله ۱۱ از فصل ۱، برای مداری مدور انجام داده‌ایم. اکنون معادله (۳-۲۴۷) نشان می‌دهد که اگر به‌جای شعاع، نصف محور بزرگتر را قرار دهیم، این نتیجه در مورد مدارهای بیضی شکل نیز صادق است.

نشان داده‌ایم که قوانین کپلر از قوانین حرکت نیوتن و قانون ثقل نتیجه می‌شود. مسئله عکس، یعنی استنتاج قانون نیرو از قوانین کپلر و قانون حرکت، مسئله ساده‌تری است، و از نظر تاریخی اهمیت بسیار دارد، زیرا از این راه بود که نیوتن قانون ثقل را نتیجه گرفت. با در نظر گرفتن این حقیقت که مسئله نیروی مرکزی که در بخش اخیر حل شد، نوعی آرمانی‌سازی مسئله فیزیکی واقعی است،

انتظار داریم که حرکات سیارات اندک انحرافی از قوانین کپلر داشته باشند. اولاً چنان که در بخش ۳-۱۳ اشاره شد، فرض کردیم که خورشید ساکن باشد، حال آن که در واقع، در اثر جاذبه سیارات، باید حرکت لنگی وار خفیفی داشته باشد. این اثر حتی در مورد سیارات بسیار بزرگ، بسیار ناچیز است، و به وسیله روشهایی که در آینده در بخش ۴-۷ بیان خواهد شد، قابل تصحیح است. ثانیاً سیاره‌ای، مثلاً زمین، علاوه بر کشش خورشید تحت تأثیر کشش سیارات دیگری نیز هست. از آنجا که جرم حتی سنگین ترین سیارات فقط چند درصد جرم خورشید است، این نیروی کشش سیارات موجب می شود که انحرافات کوچک، ولی سنجش پذیری از قوانین کپلر ایجاد گردد. این انحرافات را می توان حساب کرد، و با رصدهای بسیار دقیق نجومی توافق دارند. در واقع سیارات نپتون^۱ و پلوتو^۲ در نتیجه اثری که بر مدار سایر سیارات می گذاشتند، کشف شدند. رصدهایی که در حدود ۶۰ سال بعد از کشف سیاره اورانوس در سال ۱۷۸۱ از آن سیاره به عمل آمد، حاکی از آن بود که حتی بعد از تصحیح اثرات ثقلی سایر سیارات شناخته شده، هنوز انحرافات غیر قابل توضیحی از مدار پیش بینی شده وجود دارد. آدامز^۳ و لووریه^۴ به کمک تحلیل ریاضی دقیق و پرداخته داده‌ها توانستند نشان دهند که با فرض سیاره ناشناخته‌ای در آن سوی اورانوس، می توان انحراف این سیاره را توضیح داد و مکان آن سیاره را حساب کردند. سیاره نپتون به زودی به طور دقیق در مکان پیش بینی شده، کشف گردید.

مدارهای ستاره‌های دنباله‌داری، که گامگاه به دور خورشید رفت و آمد می کنند، لاقبل در بعضی حالات، بیضی‌هایی بسیار کشیده‌اند. در حال حاضر معلوم نیست که هیچ یک از ستاره‌های دنباله‌دار از فراسوی منظومه شمسی وارد می شوند یا نه. اگر وارد شوند دست کم در ابتدا باید مدارهای سهمی یا هذلولی داشته باشند. حتی زمان تناوب ستاره‌های دنباله‌داری که می دانیم مدارشان بیضی شکل است بر اثر کشش محل ثقلی سیارات بزرگتری که بر سبیل تصادف در نزدیکی مسیر آنها قرار دارند، به نسبت نامنظم است. ستاره‌های دنباله‌دار در فاصله بین برخوردهای نزدیک با سیارات بزرگتر، تقریباً مسیری را دنبال می کنند که به وسیله معادله (۳-۲۵۶) داده شده است، ولی نظم حرکتشان طی این برخوردها بهم می خورد به طوری که مقادیر ضرایب A ، B ، و θ پس از برخورد تغییر خواهند یافت.

همان طور که در بخش ۳-۱۳ ذکر کردیم، به طور کلی انتظار داریم که مدارهای ناشی از نیروی جاذبه‌ای مرکزی $F(r)$ ، بسته نباشند، (شکل ۳-۳۴). مدارهای بسته (بجز مدارهای دایره‌ای شکل)، فقط هنگامی پدید می آیند که زمان تناوب نوسانهای شعاعی مساوی (و یا مضرب صحیح و دقیقی از) زمان تناوب دوران باشد. فقط برای صور خاصی از تابع $F(r)$ ، مثلاً نیروی متناسب با $1/r^2$ ، مدار بسته خواهد بود. انتظار می رود که هر تغییری در قانون نیروی متناسب با $1/r^2$ (خواه به صورت تغییر در توان r و یا به صورت اضافه کردن جمله‌ای به $F(r)$ که با $1/r^2$ متناسب نباشد)، به مدارهای نابسسته منجر گردد. با این حال اگر تغییر خیلی کوچک باشد، مدار باید تقریباً بیضی شکل شود. در این صورت زمان تناوب دوران فقط کمی بزرگتر و یا کوچکتر از زمان تناوب نوسانهای شعاعی خواهد بود، و مدار تقریباً بیضی‌ای خواهد بود که محور بزرگتر آن به آهستگی حل مرکز نیرو

1. Neptune

2. Pluto

3. Adams

4. Leverrier

دوران می‌کند. در واقع گذشته از اختلالات ناشی از اثرات ثقلی سیارات دیگر، حرکت تقدیمی خفیفی نیز برای محور بزرگتر مدار تیر^۱ با سرعت زاویه‌ای ۴۱ ثانیه کمانی در قرن رصد شده است. زمانی تصور می‌کردند که این حال را می‌توان به علت اثر ثقلی غبار موجود در منظومه شمسی توضیح داد اما می‌توان نشان داد که مقدار غبار موجود بسیار کمتر از آن است که بتواند منشاء این اثر باشد. امروز به نسبت محقق شده است که این اثر ناشی از اصلاحات کوچکی است که بنا بر نظریه نسبیت در نظریه حرکت سیاره‌ای نیوتن لازم بوده است.^۲

اگر می‌توانستیم از مکانیک نیوتن استفاده کنیم، مسئله حرکت الکترونها حول هسته اتم، همانند حرکت سیارات حول خورشید بود. اما واقعیت امر آن است که حرکت الکترونها را باید از قوانین مکانیک کوانتم حساب کرد. قبل از کشف مکانیک کوانتم، بور^۳ فرض کرد که الکترونها بر مدارهایی که به کمک مکانیک نیوتن معین می‌شوند حرکت می‌کنند، و توانست توضیح نسبتاً خوبی برای حرکت اتمها بدهد. نظریه بور هنوز برای تصویری تقریبی از ساختمان اتمها مفید است.^۴

۳-۱۶ مدارهای هذلولی، مسئله رادرفورد سطح مقطع پراکندگی

مدارهای هذلولی در مورد حرکت ذراتی که ممکن است از فضای خارج به دور خورشید بیایند، و یا از دور خورشید به خارج بروند، و همچنین در مورد برخورد دو ذره باردار اهمیت بسیار دارند. اگر ذره باردار سبکی با بار q_1 با ذره باردار سنگین و ساکنی با بار q_2 برخورد کند، طبق نتایج حاصل در بخش ۳-۱۴ ذره سبک بر روی مداری هذلولی از کنار ذره سنگین حرکت خواهد کرد. در مورد برخورد ذرات اتمی، ناحیه‌ای که ذره از یک خط مجانب به خط مجانب دیگر منحرف می‌شود، بسیار کوچک است (چند \AA و یا کمتر)، و چیزی که مشاهده می‌شود زاویه انحراف $\Theta = \pi - 2\alpha$ ، (شکل ۳-۴۱)، بین مسیر ذره وارد قبل و بعد از برخورد است. شکل ۳-۴۱ برای حالتی رسم شده است که مرکز نیروی دافع در F واقع شده است، ولی شکل را می‌توان برای نمایش حالتی در نظر گرفت که مرکز نیروی جاذب در F' واقع شده باشد. طبق معادلات (۳-۲۴۹) و (۳-۲۶۰) داریم،

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \cot \alpha = (\varepsilon^2 - 1)^{-1/2} = \left(\frac{mK^2}{2EL^2} \right)^{1/2}. \quad (3-268)$$

فرض کنید که سرعت اولیه ذره v_0 باشد، و در جهتی حرکت کند، که اگر منحرف نمی‌شد، از فاصله s مرکز نیروی F می‌گذشت. فاصله s را پارامتر برخورد^۵ می‌نامند. به سادگی می‌توان انرژی و اندازه

1. Mercury

۲. مراجعه کنید به صفحه ۲۵۳ کتاب زیر

A. Einstein and L. Infeld, *The Evolution of Physics*. New York: Simon and Schuster, 1938.

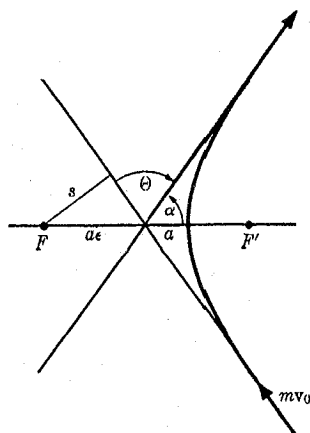
و برای بحث ریاضی به بخش ۸۳ کتاب زیر مراجعه کنید:

R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*, Oxford: Oxford University Press, 1934.

3. Bohr

4. M. Born, *Atomic Physics*, tr. by John Dougall. New York: Stechert, 1936. (Chapter 5.)

5. Impact Parameter



شکل ۳-۴۱ یک مدار هذلولی.

حرکت زاویه‌ای را بر حسب سرعت و پارامتر برخورد حساب کرد:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2, \quad (269-3)$$

$$L = m v_0 s. \quad (270-3)$$

اگر معادله‌های E و L فوق را در معادله (۳-۲۶۸) قرار دهیم، زاویه پراکندگی Θ به دست می‌آید

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{K}{m s v_0^2}. \quad (271-3)$$

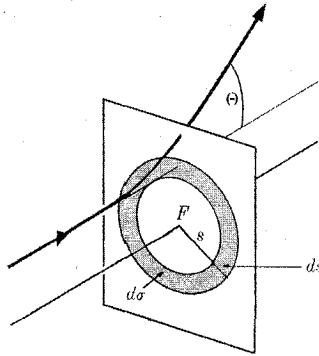
اگر ذره سبک به بار q_1 با ذره سنگینی به بار q_2 برخورد کند، این معادله طبق معادله (۳-۲۳۱) چنین می‌شود:

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{m s v_0^2}. \quad (272-3)$$

در یک آزمایش نمونه برخورد، جریانی از ذرات باردار را می‌توان در جهت معینی بر صفحه نازکی پرتاب کرد و از آن گذراند. بسیاری از ذرات، پس از برخورد با ذرات داخل صفحه، منحرف و یا پراکنده می‌شوند و در جهت دیگری، تحت زاویه Θ خارج می‌گردند. اگر بخواهیم معادله (۳-۲۷۲) را به صورتی در بیاوریم که با آزمایش قابل مقایسه باشد، باید پارامتر برخورد s را، که از طریق آزمایش معین نمی‌شود، حذف کنیم. در آزمایش، تعدادی از ذرات پراکنده شده تحت زوایای مختلف Θ ، مشاهده می‌شوند. رسم بر آن است که نتایج را بر حسب سطح مقطعی که به صورت زیر تعریف می‌شود، بیان کرد. اگر N ذره تابنده به صفحه نازکی، که دارای n مرکز پراکندگی در واحد سطح است برخورد کند، تعداد متوسط dN از ذرات تحت زاویه‌ای بین Θ و $\Theta + d\Theta$ پراکنده می‌شوند. تعداد این ذرات بر حسب مقطع $d\sigma$ به وسیله فرمول زیر داده می‌شود

$$\frac{dN}{N} = n d\sigma. \quad (273-3)$$

$d\sigma$ را سطح مقطع پراکندگی تحت زاویه‌ای بین Θ و $\Theta + d\Theta$ می‌نامند، و می‌توان آن را سطح مقطع مؤثری دانست که در اطراف مرکز پراکندگی قرار گرفته است، و ذره تابنده باید با این سطح



شکل ۳-۴۲ سطح مقطع پراکندگی.

مقطع برخورد کند تا تحت زاویه‌ای بین Θ و $\Theta + d\Theta$ پراکنده شود. زیرا اگر «سطح هدف» حول هر مرکز پراکندگی، $d\sigma$ باشد، در این صورت سطح کل هدف در واحد سطح صفحه، عبارت است از $Nnd\sigma$. اگر N ذره به یک واحد سطح برخورد کنند، تعداد متوسط ذراتی که به سطح هدف برخورد می‌کنند، عبارت است از $Nnd\sigma$ ، که طبق معادله (۳-۲۷۳)، درست همان dN است، یعنی تعداد ذرات پراکنده شده تحت زاویه‌ای بین Θ و $\Theta + d\Theta$.

اکنون ذره تابنده‌ای را در نظر بگیرید که به مرکز پراکندگی F نزدیک می‌شود، (شکل‌های ۳-۴۱ و ۳-۴۲). اگر پارامتر برخورد بین s و $s + ds$ باشد، ذره تحت زاویه‌ای بین Θ و $\Theta + d\Theta$ پراکنده خواهد شد، که در آن Θ به وسیله معادله (۳-۲۷۲) و $d\Theta$ به وسیله مشتق معادله (۳-۲۷۲) داده می‌شود:

$$\frac{1}{2 \cos^2(\Theta/2)} d\Theta = - \frac{q_1 q_2}{m s^2 v^2} ds. \quad (3-274)$$

سطح حلقه‌ای به دور F که شعاع داخلی آن s و شعاع خارجی آن $s + ds$ است و ذره تابنده باید به آن هدف‌گیری شود تا تحت زاویه‌ای بین Θ و $\Theta + d\Theta$ پراکنده گردد، برابر است با

$$d\sigma = 2\pi s ds. \quad (3-275)$$

اگر s را از معادله (۳-۲۷۲) و ds را از معادله (۳-۲۷۴) به دست آوریم و در این معادله جایگزین کنیم (و علامت منفی را حذف کنیم)، خواهیم داشت:

$$d\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{2m v^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \Theta}{\sin^4(\Theta/2)} d\Theta. \quad (3-276)$$

این فرمول را می‌توانیم با $d\sigma$ چنان که از طریق تجربی به وسیله معادله (۳-۲۷۳) داده شده است، مقایسه کنیم. فرمول (۳-۲۷۶) توسط رادرفورد استنتاج شد، و برای توجیه آزمایش او درباره پراکندگی ذرات α به وسیله صفحه نازک فلزی، به کار برده شد. او توانست نشان دهد که اگر $q_1 = 2e$ (بار ذره α) و $q_2 = Ze$ (بار هسته اتم)، فرمول (۳-۲۷۶) تا زمانی که فاصله حوضیض $a + a\epsilon$ در شکل ۳-۴۱ از 10^{-11} سانتی‌متر بزرگتر باشد، با آزمایش او توافق دارد و این نشان می‌دهد که بار

مثبت اتم باید در ناحیه‌ای که شعاعش از 10^{-12} سانتی متر کوچکتر است، متمرکز شده باشد. این منشاء نظریه هسته‌ای اتم بود. فاصله حسیض را می‌توان از فرمول (۳-۲۶۲) و یا با استفاده از قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای به دست آورد:

$$r_1 = \frac{q_1 q_2}{2E} \left[1 + \left(1 + \frac{2EL^2}{m q_1^2 q_2^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (277-3)$$

کوچکترین فاصله حسیض برای ذرات تابنده با انرژی معلوم، هنگامی است که $L = 0$ (یا $s = 0$) و دارای مقدار زیر است

$$r_{1 \min} = \frac{q_1 q_2}{E}. \quad (278-3)$$

بنابراین، اگر انحرافی از قانون نیروی کولن، وقتی ذره α از کنار هسته می‌گذرد یا به داخل آن نفوذ می‌کند، وجود داشته باشد این انحراف ابتدا باید به صورت انحرافی از قانون رادرفورد (معادله ۳-۲۷۶) در زوایای بزرگ Θ ، و در زمانی ظاهر شود، که E به اندازه کافی بزرگ باشد، به طوری که

$$E > \frac{q_1 q_2}{r_0}, \quad (279-3)$$

که در آن r_0 شعاع هسته است. اولین اندازه گیرهای شعاعهای هسته، توسط رادرفورد به همین طریق انجام شد، و اندازه آن در حدود 10^{-12} سانتی متر بود.

چون فرض بر این است که مرکز پراکندگی ثابت باقی می‌ماند، روش فوق برای محاسبه سطح مقطع فقط هنگامی به دقت صحیح است که ذره α با هسته‌ای به مراتب سنگین تر از خودش برخورد کند. این محدودیت را می‌توانیم به وسیله روشهایی که در بخش ۴-۸ مورد بحث قرار خواهیم داد، از بین ببریم. ذرات α با الکترونها نیز برخورد می‌کنند، ولی الکترونها چنان سبک‌اند که نمی‌توانند ذرات α را به اندازه قابل ملاحظه‌ای، منحرف کنند. برخورد ذره α با هسته در واقع باید با روشهای مکانیک کوانتم بررسی گردد. مفهوم مسیر معینی با پارامتر برخورد معین s ، دیگر در مکانیک کوانتم معتبر نیست. ولی مفهوم سطح مقطع، هنوز در مکانیک کوانتم معتبر است، و باید چنین هم باشد، زیرا بر حسب کمیتهایی تعریف می‌شود که از طریق آزمایش به دست می‌آیند. نتیجه نهایی سطح مقطع پراکندگی همان نتیجه فرمول (۳-۲۷۶) می‌شود^۱ و اینکه مکانیک کلاسیک جواب صحیح به این مسئله می‌دهد، تصادف جالبی در تاریخ فیزیک است.

۳-۱۷ حرکت ذره در میدان الکترومغناطیسی

قوانینی که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ناشی از طرق مختلف قرار گرفتن بارها و جریان الکتریکی را معین می‌کنند، موضوع نظریه الکترومغناطیسی است. تعیین حرکات ذرات باردار تحت تأثیر نیروهای الکتریکی و مغناطیسی، مسئله‌ای مکانیکی است. نیروی الکتریکی وارد بر ذره‌ای

۱. به صفحه ۵۳۷ کتاب زیر مراجعه کنید.

به بار q که در نقطه r قرار گرفته است، عبارت است از

$$F = qE(r), \quad (280-3)$$

که در آن $E(r)$ شدت میدان الکتریکی در نقطه r است. شدت میدان الکتریکی ممکن است تابعی از زمان و مکان هر دو باشد. نیروی وارد از میدانی مغناطیسی بر ذره‌ای باردار در نقطه r ، بستگی به سرعت ذره v ، دارد، و بر حسب القای مغناطیسی $B(r)$ به وسیله معادله زیر داده می‌شود.^۱

$$F = \frac{q}{c} v \times B(r), \quad (281-3)$$

که در آن $c = 3 \times 10^{10}$ cm/sec، سرعت نور است، و تمام کمیت‌های دیگر در واحد گاوسی است، یعنی، q در واحدهای الکترواستاتیکی، و B در واحدهای الکترومغناطیسی (گاوس) و v و F در واحدهای cgs اند. معادله (281-3) در دستگاه mks، به صورت زیر است

$$F = qv \times B(r). \quad (282-3)$$

معادله (280-3) برای واحدهای گاوسی و mks هر دو برقرار است. ما بحث خود را بر پایه معادله (281-3) (واحدهای گاوسی) می‌گذاریم، ولی نتایج به سادگی و سهولت با حذف c هر جا که پیش آید، در دستگاه mks بازنویسی می‌شود. نیروی کل الکترومغناطیسی ناشی از شدت میدان الکتریکی E و القای مغناطیسی B بر ذره باردار عبارت است از:

$$F = qE + \frac{q}{c} v \times B. \quad (283-3)$$

اگر باری الکتریکی در نزدیکی قطب شمال یک آهنربا حرکت کند، آهنربا نیرویی بر بار وارد می‌کند که به وسیله معادله (281-3) داده می‌شود، و بنا به قانون سوم نیوتن، ذره باید نیرویی مساوی و مختلف‌الجهت با آن نیرو، بر آهنربا وارد کند. در واقع نشان داده شده است که لاقط در صورتی که سرعت ذره با مقایسه با سرعت نور کوچک باشد، اگر میدان مغناطیسی ناشی از بار متحرک و نیروی وارد بر آهنربا را حساب کنیم، این حالت برقرار است. با این حال، چون القای مغناطیسی B در امتداد شعاع و به طرف خارج از قطب آهنربا است، و نیروی F بر B عمود است، نیروهای وارد بر بار و قطب آهنربا مانند حالت یک نیروی مرکزی در امتداد خط واصل آنها اعمال نمی‌شوند. بعضی اوقات قانون سوم نیوتن به صورت «قوی» بیان می‌شود، به این معنی که نیروهای عمل و عکس‌العمل نه تنها با هم مساوی و مختلف‌الجهت‌اند، بلکه در امتداد خط واصل ذراتی که با هم اندرکنش‌اند مؤثرند. برای نیروهای مغناطیسی، قانون فقط به صورت «ضعیف» برقرار است، یعنی در مورد امتداد و جهت نیروها جز آنکه مختلف‌الجهت‌اند چیزی گفته نمی‌شود. این مطلب نه تنها در مورد نیروهای بین آهنربا و بارهای متحرک صدق می‌کند، بلکه در مورد نیروهای مغناطیسی که ذرات باردار متحرک بر هم وارد می‌کنند، نیز صادق است.

اگر میدان مغناطیسی تابع ثابتی از زمان باشد، می‌توان نشان داد که شدت میدان الکتریکی در

۱. به صفحه ۳۰۲ کتاب زیر مراجعه کنید:

معادله زیر صادق است

$$\nabla \times E = 0, \quad (284-3)$$

اثبات این مطلب مربوط به نظریه الکترومغناطیسی است و احتیاجی نیست که در اینجا مورد بحث قرار گیرد.^۱ با این حال معادله (۲۸۴-۳) متضمن آن است که در مورد میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن، نیروی الکتریکی وارد بر ذره باردار کنسرواتیو است. لذا می توان پتانسیل الکتریکی را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\phi(r) = - \int_{r_s}^r E \cdot dr, \quad (285-3)$$

به طوری که

$$E = - \nabla \phi. \quad (286-3)$$

چون E نیروی وارد بر واحد بار است، ϕ انرژی پتانسیل وابسته به نیروی الکتریکی وارد بر واحد بار خواهد بود:

$$V(r) = q\phi(r). \quad (287-3)$$

از این گذشته چون نیروی مغناطیسی بر سرعت عمود است، نمی تواند کاری بر ذره باردار انجام دهد. در نتیجه، قانون بقای انرژی برای ذره‌ای در میدان الکترومغناطیسی ساکن، برقرار است

$$T + q\phi = E, \quad (288-3)$$

که در آن E مقدار ثابتی است.

مسائل مختلف عملی و نظری بسیاری وجود دارند که شامل حرکت ذرات باردار در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی اند. به طور کلی برای حل هر نوع مسئله باید روشهای خاصی ابداع کرد. در اینجا دو مسئله خاص را که از نظر نتایج به دست آمده و روشهای به دست آوردن این نتایج هر دو، حائز اهمیت اند مورد بحث قرار می دهیم.

ابتدا حرکت ذره‌ای به جرم m و به بار q در میدان مغناطیسی ثابت یکنواختی را در نظر می گیریم. محور z را در جهت میدان اختیار می کنیم.

$$B(r, t) = B\hat{z}, \quad (289-3)$$

که در آن B ثابت است. طبق معادله (۲۸۱-۳)، معادلات حرکت عبارت اند از

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\dot{y}, \quad m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\dot{x}, \quad m\ddot{z} = 0. \quad (290-3)$$

طبق معادله $m\ddot{z} = 0$ ، مؤلفه z سرعت ثابت است، و ما حالتی را در نظر می گیریم که $v_z = 0$ و حرکت به تمامی در صفحه xy باشد. حل دو معادله اول مشکل نیست، ولی ما می توانیم با استفاده از انتگرال انرژی از حل مستقیم آنها اجتناب کنیم. انتگرال مزبور در این حالت عبارت است از

$$\frac{1}{2}mv^2 = E. \quad (291-3)$$

نیرو به وسیله معادله زیر داده می شود:

$$F = \frac{qB}{c} v \times \hat{z}, \quad (292-3)$$

$$F = \frac{qBv}{c}. \quad (293-3)$$

بنابراین نیرو، و در نتیجه شتاب، اندازه‌های ثابتی دارند و بر سرعت عمودند. اگر ذره‌ای با سرعت ثابت v و شتاب ثابت a که بر جهت حرکتش عمود باشد حرکت کند، مسیر آن دایره‌ای به شعاع r است که به وسیله معادله (۳-۸۰) داده می شود:

$$a = r\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r} = \frac{F}{m}. \quad (294-3)$$

F را از معادله (۳-۲۹۳) به دست می آوریم و در معادله فوق جایگزین، و سپس r را از آن استخراج می کنیم

$$r = \frac{cmv}{qB}. \quad (295-3)$$

در این صورت حاصل ضرب Br با اندازه حرکت متناسب است و با بار ذره نسبت معکوس دارد. این نتیجه، کاربردهای عملی بسیار دارد. اگر یک اطاق ابر ویلسون^۱ را در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دهیم، می توانیم اندازه حرکت ذره بارداری را به وسیله اندازه گیری شعاع انحنای مسیر آن اندازه بگیریم. همین اصل در طیف سنج اشعه β برای اندازه گیری اندازه حرکت الکترونهای سریع از طریق سنجش انحنای مسیر آنها در یک میدان مغناطیسی به کار می رود. در یک طیف سنج جرمی^۳ به وسیله اختلاف پتانسیل الکتریکی معلومی به یک ذره شتاب داده می شود، به طوری که طبق معادله (۳-۲۸۸)، انرژی جنبشی آن عبارت است از

$$\frac{1}{2}mv^2 = q(\phi_0 - \phi_1). \quad (296-3)$$

سپس ذره از میدان مغناطیسی یکنواخت B عبور داده می شود. اگر q معلوم و r ، B ، و $(\phi_0 - \phi_1)$ اندازه گیری شوند، با حذف v بین معادلات (۳-۲۹۵) و (۳-۲۹۶) می توان جرم ذره را به دست آورد

$$m = \frac{qB^2 r^2}{2c^2(\phi_0 - \phi_1)} \quad (297-3)$$

این اندیشه بنیادی صورتهای مختلف بسیار دارد. آزمایشهای تاریخی تامسون^۴ که وجود الکترون را ثابت کرده است اساساً از این نوع بودند، و تامسون به وسیله آنها موفق شد نشان دهد که مسیر اشعه کاتود همان مسیری است که به وسیله اشعه‌ای از ذرات باردار که همگی دارای نسبت q/m مساوی باشند طی می شود.

در یک سیکلوترون، ذرات باردار در میدان مغناطیسی یکنواختی در مسیرهای دایره شکلی حرکت می کنند، و انرژی آنها با عبور از میدان الکتریکی متناوبی در هر دور، دو بار افزایش می یابد.

1. Cloud Chamber
3. Mass Spectrometer

2. β -ray Spectrometer
4. J. J. Thomson

لذا طبق معادله (۳-۲۹۵)، شعاع دواير نیز زیاد می شود تا به شعاع ماکزیمم برسد که در آن شعاع، ذرات با انرژی معینی که به وسیله معادله (۳-۲۹۵) داده می شود، از دستگاه خارج گردند. فرکانس میدان الکتریکی متناوب باید همان فرکانس ν دوران ذرات باشد که به وسیله معادله زیر داده می شود:

$$\nu = 2\pi r \nu. \quad (3-298)$$

اگر معادله فوق را با معادله (۳-۲۹۵) ترکیب کنیم، خواهیم داشت

$$\nu = \frac{qB}{2\pi mc}. \quad (3-299)$$

بنابراین اگر B ثابت باشد، ν مستقل از r خواهد بود، این اصل اساسی کار سیکلوترون است.^۱ در بتاترون^۲ الکترونها در مسیره های دایره شکلی حرکت می کنند، و میدان مغناطیسی در داخل دایره افزایش می یابد. چون B با زمان تغییر می کند، $\nabla \times E$ دیگر صفر نیست، شار مغناطیسی متغیر در اطراف دایره ولتاژی القا می کند به طوری که وقتی الکترونها روی دواير حرکت می کنند، میدان مغناطیسی، کار خالصی بر آنها وارد می کند. بتاترون طوری طرح شده است که، افزایش B طی مدار الکترون، متناسب با افزایش $m\nu$ است و در نتیجه r ثابت باقی می ماند.

سرانجام ذره ای به جرم m و به بار q را در نظر می گیریم که در میدان الکتریکی ثابت یکنواختی به شدت E و میدان مغناطیسی ثابت یکنواختی به خود القایی B حرکت می کند. این بار نیز محور z را در جهت B اختیار، و محور y را چنان انتخاب می کنیم که E به موازات صفحه yz باشد.

$$B = B\hat{z}, \quad E = E_y\hat{y} + E_z\hat{z}, \quad (3-300)$$

که در آن B ، E_y ، و E_z ثابت اند. طبق معادله (۳-۲۸۳) معادلات حرکت عبارت اند از

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\dot{y}, \quad (3-301)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\dot{x} + qE_y, \quad (3-302)$$

$$m\ddot{z} = qE_z. \quad (3-303)$$

مؤلفه z حرکت به صورت یکنواخت شتاب خواهد گرفت:

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{1}{2} \frac{qE_z}{m} t^2. \quad (3-304)$$

برای حل معادلات x و y ، از معادله (۳-۳۰۱) مشتق می گیریم و در معادله (۳-۳۰۲) جایگزین

۱. طبق نظریه نسبیت جرم ذره در سرعت های نزدیک به سرعت نور، افزایش می یابد، و در نتیجه سیکلوترون نمی تواند ذرات را تا چنین سرعت های بالایی شتاب دهد، مگر آنکه ν کم شود یا با افزایش سرعت B افزایش یابد. (معلوم می شود که معادله (۳-۲۹۵) هنوز در نظریه نسبیت برقرار است.)

می‌کنیم تا اثر حذف شود

$$\frac{m^{\gamma}c}{qB} \ddot{x} = -\frac{qB}{c} \dot{x} + qE_y. \quad (3-305)$$

با جایگزین کردن معادله‌های

$$\omega = \frac{qB}{mc}, \quad (3-306)$$

$$a = \frac{qE_y}{m}, \quad (3-307)$$

در معادله (۳-۳۰۵)، این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2 \dot{x}}{dt^2} + \omega^2 \dot{x} = a\omega. \quad (3-308)$$

این معادله با معادله حرکت نوسانگر هارمونیک که با سرعت زاویه‌ای ω ، تحت تأثیر «نیروی» ثابت $a\omega$ قرار گرفته باشد هم‌شکل است، با این تفاوت که \dot{x} به جای مختصه ظاهر می‌شود. این نوسانگر هارمونیک در مسئله ۴۵ فصل ۲ بررسی شد. در این حالت، جواب عبارت است از

$$\dot{x} = \frac{a}{\omega} + A_x \cos(\omega t + \theta_x), \quad (3-309)$$

که در آن A_x و θ_x ضرایب ثابت دلخواه‌اند که باید تعیین شوند و به طریقی شبیه همین می‌توان \dot{x} را از معادلات (۳-۳۰۱) و (۳-۳۰۲) حذف کرد تا جواب \dot{y} به دست آید

$$\dot{y} = A_y \cos(\omega t + \theta_y). \quad (3-310)$$

به وسیله انتگرال‌گیری از معادلات (۳-۳۰۹) و (۳-۳۱۰)، می‌توان x و y را به دست آورد

$$x = C_x + \frac{at}{\omega} + \frac{A_x}{\omega} \sin(\omega t + \theta_x), \quad (3-311)$$

$$y = C_y + \frac{A_y}{\omega} \sin(\omega t + \theta_y). \quad (3-312)$$

اکنون مشکلی پیش می‌آید، زیرا شش ضریب ثابت A_x ، A_y ، θ_x ، θ_y ، C_x ، و C_y داریم که باید مقادیرشان را به وسیله چهار شرط اولیه x ، y ، \dot{x} ، و \dot{y} ، معین کنیم. مشکل اینجاست که جوابهای (۳-۳۱۱) و (۳-۳۱۲) را با مشتق‌گیری از معادلات اصلی به دست آوریم، و مشتق‌گیری از یک معادله ممکن است جوابهای جدیدی پدید آورد که در معادله اصلی صادق نباشند. به عنوان مثال، معادله خیلی ساده‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$x = 3.$$

پس از مشتق‌گیری خواهیم داشت،

$$\dot{x} = 0,$$

که انتگرال آن عبارت است از

$$x = C.$$

اما می‌بینیم که فقط برای یک مقدار خاص C ، معادله اصلی برقرار است. اکنون با استفاده از معادلات (۳۰۶-۳) و (۳۰۷-۳)، معادلات (۳۱۱-۳) و (۳۱۲-۳) یا معادلات مشابه آنها یعنی (۳۰۹-۳)، (۳۱۰-۳)، را در معادلات اصلی (۳۰۱-۳) و (۳۰۲-۳) جایگزین می‌کنیم:

$$-\frac{qB}{c} A_x \sin(\omega t + \theta_x) = \frac{qB}{c} A_y \cos(\omega t + \theta_y), \quad (313-3)$$

$$-\frac{qB}{c} A_y \sin(\omega t + \theta_y) = -\frac{qB}{c} A_x \cos(\omega t + \theta_x). \quad (314-3)$$

این دو معادله فقط موقعی برقرارند که A_x ، A_y ، θ_x ، و θ_y چنان اختیار شوند که

$$A_x = A_y, \quad (315-3)$$

$$\sin(\omega t + \theta_x) = -\cos(\omega t + \theta_y), \quad (316-3)$$

$$\cos(\omega t + \theta_x) = \sin(\omega t + \theta_y). \quad (317-3)$$

دو معادله آخر موقعی برقرارند که

$$\theta_y = \theta_x + \frac{\pi}{2}. \quad (318-3)$$

فرض کنید که

$$A_x = A_y = \omega A, \quad (319-3)$$

$$\theta_x = \theta, \quad (320-3)$$

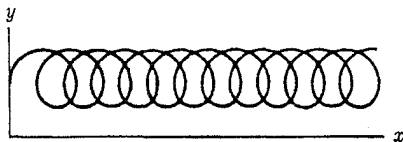
$$\theta_y = \theta + \frac{\pi}{2}. \quad (321-3)$$

در این صورت معادلات (۳۱۱-۳) و (۳۱۲-۳) چنین می‌شوند

$$x = C_x + A \sin(\omega t + \theta) + \frac{at}{\omega}, \quad (322-3)$$

$$y = C_y + A \cos(\omega t + \theta). \quad (323-3)$$

اینک فقط چهار ضریب ثابت A ، θ ، C_x ، و C_y وجود دارند که باید به وسیله شرایط اولیه x ، y ، \dot{x} و \dot{y} معین شوند. البته حرکت z به وسیله معادله (۳۰۴-۳) داده شده است. اگر $E_y = 0$ باشد، حرکت xy به صورت دایره‌ای به شعاع A با سرعت زاویه‌ای ω حول نقطه (C_x, C_y) انجام می‌شود و این حرکتی است که در مثال پیش در نظر گرفته شد. اثر E_y این است که به این حرکت دایره‌ای یکنواخت، حرکت انتقالی یکنواختی در جهت x اضافه کند! مسیر حاصل در صفحه xy ، سیکلوئیدی است که بسته به شرایط اولیه و مقدار E_y دارای حلقه‌های نوک تیز^۲ یا چین^۳ است



شکل ۳-۴۳ مدارهای ذره باردار که در صفحه xy تحت تأثیر میدانی مغناطیسی در جهت z و میدانی الکتریکی در جهت y قرار گرفته است.

(شکل ۳-۴۳). این مسئله در طرح ماگنترون^۱ قابل توجه است. انتقال دارای سرعت زیر است

$$v_D = \frac{a}{\omega} = \frac{E_y c}{B}$$

$$v_D = \frac{cE \times B}{B^2} \quad (۳-۳۲۴)$$

سرعت سوق ذره‌ای باردار در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بهم خورده اهمیت بنیادی در نظریه پلاسما دارد.

مسائل

۱. معادلات زیر را با استفاده از تعاریف هندسی اعمال جبر برداری، ثابت کنید. در بسیاری از حالات ترسیم نمودار کافی است. (الف) معادله (۳-۷)، (ب) معادله (۳-۱۷)، (پ) معادله (۳-۲۶)، (ت) معادله (۳-۲۷) و * (ث) معادله (۳-۳۵).
۲. معادلات زیر را بر پایه تعاریف جبری اعمال جبر برداری بر حسب مؤلفه‌ها ثابت کنید: (الف) معادله (۳-۸)، (ب) معادله (۳-۱۷)، (پ) معادله (۳-۲۷)، (ت) معادله (۳-۳۴)، (ث) معادله (۳-۳۵).
۳. با استفاده از معادله (۳-۱۰) برای نمایش بردارهای A و B ، با استفاده از معادلات (۳-۲۵) تا (۳-۳۱)، معادله (۳-۳۲) را با محاسبه مستقیم به دست آورید.
۴. (الف) ثابت کنید که $A \cdot (B \times C)$ حجم متوازی‌السطوحی است که یالهای آن A ، B ، و C هستند و بسته به آن که پیچ راست‌گردی، وقتی از A به سمت B دوران می‌کند، در امتداد C ، در جهت مثبت و یا منفی پیشروی کند، علامت حجم مثبت و یا منفی است. A ، B ، و C سه بردار دلخواه‌اند که در یک صفحه قرار نگرفته باشند. (ب) با استفاده از این نتیجه معادله (۳-۳۴) را از طریق هندسی ثابت کنید. تحقیق کنید که طرف راست و چپ معادله (۳-۳۴) از حیث علامت و اندازه با هم مساوی‌اند.

۵. نامساویهای زیر را ثابت کنید. هر یک از حالات زیر را با روش هندسی و جبری (بر حسب مؤلفه) ثابت کنید.

$$(الف) |A+B| \leq |A| + |B|$$

$$(ب) |A \cdot B| \leq |A| |B|$$

$$(پ) |A \times B| \leq |A| |B|$$

۶. (الف) برای اندازه حاصل جمع سه نیروی F_1, F_2, F_3 و فرمولی مانند معادله (۳-۴۰) بر حسب F_1, F_2, F_3 و زوایای $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ و بین هر جفت نیرو به دست آورید. [از پیشنهادهایی که بعد از معادله (۳-۴۰) داده شده است، استفاده کنید.] (ب) معادله‌ای به همان کیفیت برای زاویه α_1 بین نیروی کل و نیروی مؤلفه‌ای F_1 ، به دست آورید.

۷. با استفاده از تعریف (۳-۵۲) مشتق‌گیری برداری، معادلات (۳-۵۴) و (۳-۵۵) را ثابت کنید.

۸. با استفاده از تعریف جبری (۳-۵۳)، مشتق‌گیری برداری معادلات (۳-۵۶) و (۳-۵۷) را ثابت کنید.

۹. انتگرال تابع برداری $A(t)$ نسبت به شماره‌واره t را:

$$\int_{t_1}^{t_2} A(t) dt.$$

به‌طور مناسبی همانند معادلات (۳-۵۲) و (۳-۵۳)، تعریف کنید. دستگاه معادلاتی همانند معادلات (۳-۵۴) تا (۳-۵۷)، طوری بنویسید که مبین خواص جبری باشد که برای این انتگرال انتظار داشتید. ثابت کنید که بر اساس هر یک از دو تعریف جبری و هندسی، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{d}{dt} \int_{t_1}^t A(t) dt = A(t).$$

۱۰. وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC [$A=B=45^\circ$] طول $4a$ دارد. ذره‌ای تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد که آن را به طرف نقطه O واقع بر روی وتر به فاصله a از رأس A ، جذب می‌کند. قدر مطلق این نیرو متناسب است با k/r^2 ، که در آن r فاصله ذره از نقطه O است. مطلوب است محاسبه کار انجام شده به وسیله نیرو، وقتی ذره از A به C و از C به B در امتداد دو ساق مثلث حرکت می‌کند. محاسبات خود را به وسیله دو روشی که بر پایه دو معادله (۳-۶۱) و (۳-۶۳) نهاده شده است، انجام دهید.

۱۱. ذره‌ای دور نیم‌دایره‌ای به شعاع R از یک انتهای A از وتر به انتهای دیگر B حرکت می‌کند. ذره توسط نیرویی متناسب با فاصله‌اش از A به سمت نقطه شروع A جذب می‌شود. وقتی ذره در نقطه B است، نیرویی به سمت A برابر F_0 است. کار انجام شده در مقابل این نیرو را وقتی ذره دور نیم‌دایره از A به B می‌رود، حساب کنید.

۱۲. ذره‌ای تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد که مؤلفه‌هایش عبارت‌اند از

$$F_x = ax^3 + bxy^2 + cz$$

$$F_y = ay^3 + bx^2y$$

$$F_z = cx.$$

کار انجام شده به وسیله این نیرو را وقتی ذره در امتداد یک خط مستقیم از مبدأ به نقطه (x_0, y_0, z_0) می‌رود، حساب کنید.

۱۳. (الف) ذره‌ای در صفحه xy به وسیله نیروی $F = k/y$ (متناسب با عکس فاصله ذره تا محور x)، به طرف مبدأ جذب می‌شود. مطلوب است محاسبه کار انجام شده به وسیله نیرو، وقتی که ذره از نقطه $y = a$ و $x = 0$ به نقطه $y = 0$ و $x = 2a$ در امتداد مسیری حرکت می‌کند که از دو ضلع مربع مستطیلی تشکیل شده است که یکی پاره‌خطی است موازی محوری x از نقطه $x = 0$ ، $y = a$ به نقطه $x = 2a$ ، $y = a$ و دیگری پاره‌خطی قائم از نقطه $x = 2a$ ، $y = a$ تا محور x . (ب) مطلوب است محاسبه کار انجام شده به وسیله همین نیرو وقتی که ذره در امتداد یک بیضی به اقطار a و $2a$ حرکت می‌کند. [راهنمایی. از تغییر متغیر $x = 2a \sin \theta$ ، $y = a \cos \theta$ استفاده کنید.]

۱۴. مطلوب است مؤلفه‌های r و θ برای da/dt در مختصات قطبی صفحه‌ای، وقتی a شتاب یک ذره است.

۱۵. مطلوب است محاسبه مؤلفه‌های d^2A/dt^2 در مختصات قطبی استوانه‌ای، وقتی بردار A تابعی از t و در نقطه متحرکی قرار گرفته باشد.

۱۶. مؤلفه‌های d^3r/dt^3 را در مختصات کروی پیدا کنید.

*۱۷. (الف) مختصات سهموی f و h بر حسب مختصات دکارتی x و y به وسیله معادلات زیر تعریف می‌شوند

$$x = f - h, \quad y = 2(fh)^{1/2},$$

که در آن f و h هرگز منفی نمی‌شوند. f و h را بر حسب x و y پیدا کنید. فرض کنید بردارهای \hat{f} و \hat{h} به ترتیب در جهت افزایش f و h تعریف شده‌اند. بدین معنی که \hat{f} بردار یک‌ای است که جهت حرکت نقطه‌ای است که مختصه f آن کمی افزایش یافته، در حالی که مختصه h آن ثابت باقی مانده است. نشان دهید که \hat{h} و \hat{f} در هر نقطه بر هم عمودند.

[راهنمایی. وقتی $df > 0$ و $dh = 0$ ، $[\hat{f} = (\hat{x}dx + \hat{y}dy) [(dx)^2 + (dy)^2]^{-1/2}$ ، چرا؟]

(ب) نشان دهید که \hat{h} و \hat{f} تابعی از f و h اند و مشتق آنها را نسبت به f و h به دست آورید. نشان دهید که $r = f^{1/2}(f+h)^{1/2}\hat{f} + h^{1/2}(f+h)^{1/2}\hat{h}$ مؤلفه‌های سرعت و شتاب را در مختصات سهموی پیدا کنید.

۱۸. ذره‌ای با سرعت ثابت v در امتداد سهمی زیر حرکت می‌کند:

$$y^2 = 4f_0x - 4fx,$$

که در آن f_0 ثابت است. مؤلفه‌های سرعت و شتاب آن را در مختصات دکارتی و قطبی به دست آورید. نشان دهید که معادله سهمی در مختصات قطبی عبارت است از

$$r \cos^2 \frac{\theta}{4} = f_0.$$

معادله این سهمی در مختصات سهموی (مسئله ۱۷) چیست؟

۱۹. ذره‌ای با تبدی متغیری در امتداد منحنی دلخواهی که در صفحه xy قرار گرفته است، حرکت

می‌کند. مکان ذره را باید به وسیله s (یعنی فاصله‌ای که ذره در امتداد منحنی از نقطه ثابتی بر روی منحنی، طی کرده است) مشخص کرد. فرض کنید که $\hat{t}(s)$ یک بردار یکه مماس بر منحنی در نقطه s و در جهت افزایش s باشد. نشان دهید که

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{\hat{v}}{r},$$

که در آن \hat{v} بردار یکه‌ای است که در نقطه s بر منحنی عمود است، و $r(s)$ شعاع انحنا در نقطه s است که به صورت فاصله نقطه برخورد دو قائم نزدیک به هم بر منحنی تعریف شده است. فرمولهای زیر را برای سرعت و شتاب ذره پیدا کنید

$$v = \dot{s}\hat{t}, \quad a = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{r}\hat{v}.$$

۲۰. با استفاده از خواص علامت برداری ∇ ، تساویهای برداری زیر را به دست آورید

$$\text{curl}(\text{curl} A) = \text{grad}(\text{div} A) - \nabla^2 A,$$

$$u \text{ grad } v = \text{grad}(uv) - v \text{ grad } u.$$

سپس مؤلفه‌های x دو طرف معادلات فوق را بنویسید و با محاسبه مستقیم ثابت کنید که در هر یک از حالات با هم مساوی‌اند. (باید در به کار بردن اتحاد اول در مختصات منحنی الخط، دقت بسیار کرد، که بستگی بر ابزارهای بکه به مختصات، به طور صحیح در نظر گرفته شده باشند).

۲۱. کرل A را در مختصات استوانه‌ای حساب کنید.

۲۲. اگر ذره مسئله ۱۲ با سرعت ثابت v حرکت کند، ضربه‌ای که توسط نیروی داده شده به آن وارد می‌شود، چقدر است؟

۲۳. الف) به فرض آنکه ذره مسئله ۱۱ با تندی ثابت v دور نیم‌دایره حرکت کند، مؤلفه‌های قائم $F_x(t)$ و $F_y(t)$ نیروی اضافی، علاوه بر نیروی داده شده در مسئله ۱۱، را که باید بر آن وارد شود، پیدا کنید. ب) مطلوب است ضربه مولد توسط این نیروی اضافی.

۲۴. ذره‌ای به جرم m در لحظه $t = 0$ از نقطه P روی دایره‌ای به شعاع r با سرعت ثابت v شروع به حرکت می‌کند. اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه P در هر زمان t ، نیرو، و گشتاور - نیرو حول P را پیدا کنید و تأیید کنید که قضیه اندازه حرکت زاویه‌ای (۳-۱۴۰) برقرار است.

۲۵. معادلات حرکت ذره‌ای به جرم m عبارت‌اند از

$$x = x_0 + at^2,$$

$$y = bt^3,$$

$$z = ct.$$

مطلوب است اندازه حرکت زاویه‌ای L در هر زمان t . نیروی F را پیدا کنید و از آن گشتاور - نیروی N را که بر ذره عمل می‌کند، به دست آورید. تأیید کنید که قضیه اندازه حرکت زاویه‌ای (۳-۱۴۴) برقرار است.

۲۶. تعریف مناسبی برای اندازه حرکت زاویه‌ای ذره‌ای حول محوری در فضا پیدا کنید. محور مشخص شده را محور z اختیار و اندازه حرکت زاویه‌ای را بر حسب مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

اگر نیروی وارد بر ذره دارای مؤلفه‌های استوانه‌ای F_ρ ، F_ϕ و F_z باشد ثابت کنید که میزان تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای بر حسب زمان حول محور z ، برابر گشتاور - نیرو حول آن محور است.

۲۷. محل ذره متحرکی به جرم m به وسیله مختصات کروی $r(t)$ ، $\theta(t)$ ، و $\varphi(t)$ معین شده است. نیروی وارد بر ذره دارای مؤلفه‌های کروی F_r ، F_θ ، و F_φ است. مؤلفه‌های کروی بردار اندازه حرکت زاویه‌ای و بردار گشتاور - نیرو را حول مبدأ حساب، و با محاسبه مستقیم تحقیق کنید که معادله زیر از معادله حرکت نیوتن نتیجه می‌شود.

$$\frac{dL}{dt} = N$$

۲۸. جوابهایی که در شکل ۳-۲۸ ترسیم شده‌اند، مربوط‌اند به دو معادله اول (۳-۱۵۱). اگر $\theta_x = 0$ باشد، θ_y را برای حالت $\omega_x = 2\omega_y$ همانگونه که ترسیم شده است، تخمین بزنید. شکل مربوطه را برای حالت $\theta_x = \theta_y$ طراحی کنید. شکلی معیار برای حالت $4\omega_x = 3\omega_y$ طرح کنید.

۲۹. با فرض $\sigma \ll 1$ و $1 \gg bv_z/mg$ و قرار دادن $(1-\sigma)(mv_x/b)$ در معادله (۳-۱۷۵) و سپس حل آن بر حسب σ ، پایین‌ترین مرتبه تصحیح به معادله (۳-۱۷۹) را به دست آورید.

۳۰. مطلوب است حداکثر ارتفاع z_{max} حاصله توسط گلوله‌ای که معادله حرکتش معادله (۳-۱۶۹) باشد. نتیجه خود را به صورت یک سری توانی بر حسب b ، با ننگ داشتن جملات تا مرتبه اول بر حسب b در z_{max} ، بسط دهید و جمله پایین‌ترین مرتبه را در مقابله با معادله (۳-۱۶۷) بررسی کنید.

۳۱. گلوله‌ای با سرعت اولیه $v_0 = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$ از مبدأ پرتاب می‌شود. سرعت باد $w = w\hat{y}$ است. معادلات حرکت (۳-۱۸۰) را در صورتی که x ، y ، و z توابعی از t باشند، حل کنید. با در نظر گرفتن فقط جملات مرتبه اول b ، نقطه (x_1, y_1) را که گلوله در آن به سطح افقی بر می‌گردد، پیدا کنید. نشان دهید که اگر در هدف‌گیری اثرات مقاومت هوا و سرعت باد رعایت نشود، مقاومت هوا به تنهایی باعث خواهد شد که گلوله به اندازه $4bv_z/3mg$ از فاصله هدف، جلوتر از هدف فرود آید، و باد باعث انحرافی اضافی به اندازه $2bv_z^2/(mg^2)$ در مختصه y می‌شود.

۳۲. عبارت بعد از عبارات داده شده در معادلات (۳-۱۷۶) و (۳-۱۷۸) را به دست آورید.

۳۳. می‌خواهیم گلوله‌ای را در صفحه xz (محور z قائم فرض می‌شود)، با سرعت دهانه‌ای v_0 از مبدأ به سمت هدفی واقع در نقطه $x = x_0$ ، $z = 0$ پرتاب کنیم. (الف) اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، زاویه صحیح پرتاب باید چقدر باشد تا گلوله به هدف اصابت کند. نشان دهید که به طور کلی دو زاویه برای این کار وجود دارد، مگر آن که هدف در حداکثر برد یا دورتر از آن واقع شده باشد. (ب) تصحیح مرتبه اول زاویه پرتاب ناشی از مقاومت هوا را پیدا کنید.

۳۴. نشان دهید که نیروهای مسائل ۱۱ و ۱۲ بقایایی هستند. انرژی پتانسیل را به دست آورده و با استفاده از آن کار انجام شده در هر یک از حالات را به دست آورید.

۳۵. معین کنید کدام یک از نیروهای زیر کنسرواتیوند، و انرژی پتانسیل برای نیروهای کنسرواتیو را به دست آورید.

(الف) $F_x = \epsilon abz^2y - 2 \cdot bx^2y^2$ ، $F_y = \epsilon abxz^2 - 1 \cdot bx^2y$ ، $F_z = 1 \cdot abxz^2y$.

(ب) $F_x = 1 \cdot abyz^2 - 2 \cdot bx^2y^2$ ، $F_y = 1 \cdot abxz^2 - 1 \cdot bx^2y$ ، $F_z = \epsilon abxyz^2$.

(پ) $F = \hat{x}F_x(x) + \hat{y}F_y(y) + \hat{z}F_z(z)$.

۳۶. انرژی پتانسیل را برای هر یک از نیروهای زیر که کنسرواتیووند، معین کنید

$$F_x = \gamma ax(z^2 + y^2), \quad F_y = \gamma ay(z^2 + y^2) + \gamma ay^2(x^2 + y^2), \quad F_z = \gamma az^2(x^2 + y^2). \quad (\text{الف})$$

$$F_\rho = a\rho^2 \cos \varphi, \quad F_\varphi = a\rho^2 \sin \varphi, \quad F_z = \gamma az^2. \quad (\text{ب})$$

$$F_r = -\gamma ar \sin \theta \cos \varphi, \quad F_\theta = -a r \cos \theta \cos \varphi, \quad f_\varphi = ar \sin \theta \sin \varphi. \quad (\text{ج})$$

۳۷. انرژی پتانسیل را برای هر یک از نیروهای زیر که کنسرواتیووند، معین کنید

$$F_x = axe^{-R}, \quad F_y = bye^{-R}, \quad F_z = cze^{-R} \quad \text{که در آن } R = ax^2 + ay^2 + cz^2. \quad (\text{الف})$$

(ب) $F = Af(A \cdot r)$ ، که در آن برداری ثابت و $f(s)$ تابعی مناسب از $s = A \cdot r$ است.

$$F = (r \times A)f(A \cdot r). \quad (\text{پ})$$

۳۸. ذره‌ای به وسیله نیرویی متناسب با مربع فاصله آن از صفحه (xy) و متناسب با عکس فاصله آن از محور z ، به طرف این محور جذب می‌شود. نیروی دیگری عمود بر آن چنان اضافه کنید که نیروی متوجه کنسرواتیو شود، و سپس انرژی پتانسیل را پیدا کنید. اطمینان حاصل کنید که عباراتی که برای نیروها و انرژی پتانسیل می‌نویسید از نظر ابعاد سازگار باشند.

۳۹. با محاسبه مستقیم نشان دهید که انتگرال $F = \hat{r}F(r)$

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr,$$

در امتداد هر مسیری بین r_1 و r_2 ، فقط به r_1 و r_2 بستگی دارد و از آنجا نشان دهید که F نیرویی پایستار است. [راهنمایی: F و dr را در مختصات کروی بنویسید.]

۴۰. مؤلفه‌های نیروی هر یک از توابع انرژی پتانسیل زیر را پیدا کنید:

$$V = axy^2z^3. \quad (\text{الف})$$

$$V = \frac{1}{4} kr^2. \quad (\text{ب})$$

$$V = \frac{1}{4} k_x x^2 + \frac{1}{4} k_y y^2 + \frac{1}{4} k_z z^2. \quad (\text{پ})$$

۴۱. مطلوب است محاسبه نیروی وارد بر الکترون در یون ملکول ئیدروژن در صورتی که انرژی پتانسیل آن به قرار زیر باشد

$$V = -\frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2},$$

که در آن r_1 فاصله الکترون از نقطه $x = -a, y = z = 0$ ، و r_2 فاصله الکترون از نقطه $x = a, y = z = 0$ است.

۴۲. یک تابع انرژی پتانسیل ابداع کنید که وقتی $r \rightarrow \infty$ تابع به سمت صفر میل کند، و وقتی $r \rightarrow 0$ نیرویی $F = -kr$ تولید کند. مطلوب است نیرو. با به کار بردن انتگرالهای خطی مناسب، تأیید کنید که کار انجام شده توسط این نیرو روی ذره‌ای که از $r = 0$ به $r = r_0$ می‌رود همان است که اگر ذره روی خط مستقیمی حرکت کند و همان است که اگر ذره مسیر نشان داده در شکل ۳-۳۲ را دنبال کند.

۴۳. انرژی پتانسیل برای یک نوسانگر هارمونیک ایزوتروپ عبارت است از

$$V = \frac{1}{4}kr^2.$$

مطلوب است رسم منحنی انرژی پتانسیل مؤثر برای حرکت r ، وقتی ذره‌ای به جرم m با این انرژی پتانسیل و با اندازه حرکت زاویه‌ای L حول مبدأ حرکت می‌کند. روی انواع حرکات ممکن بحث کنید و بی‌آنکه مسئله را حل کنید، حرکات را کاملاً (تا جایی که امکان دارد) توصیف کنید. فرکانس چرخش حرکت دایره‌ای و فرکانس نوسانهای کوچک شعاعی حول این حرکت دایره‌ای را پیدا کنید. و از آنجا چگونگی مدارهایی را که با مدارهای دایره‌ای کمی فرق دارند، توصیف کنید.

۴۴. فرکانس نوسانهای کوچک شعاعی حول حرکت دایره‌ای پاینده را برای انرژی پتانسیل مؤثری که به وسیله معادله (۳-۲۳۲) برای قانون نیروی جاذبه متناسب با $1/r^2$ داده می‌شود، بیابید و نشان دهید که این فرکانس با فرکانس چرخش مساوی است.

۴۵. $r(t)$ و $\theta(t)$ را برای مدار ذره مسئله ۴۳ پیدا کنید، و سپس آن را با مدارهایی که در بخش ۳-۱۰ برای نوسانگر هارمونیک در فضای سه بعدی به دست آمده‌اند، مقایسه کنید.

۴۶. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیرویی مرکزی که دارای پتانسیل زیر است، حرکت می‌کند:

$$V(r) = Kr^4, \quad K > 0.$$

به‌ازای چه مقدار انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای، مدار حرکت دایره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات خواهد بود؟ زمان تناوب این حرکت دایره‌ای چه اندازه خواهد بود؟ اگر این حرکت دایره‌ای ذره کمی تغییر پیدا کند، زمان تناوب نوسانهای شعاعی کوچک حول $r=a$ چه اندازه خواهد بود؟

۴۷. بنا به نظریه نیروهای هسته‌ای یوکاوا^۱، نیروی جاذب بین یک نوترون و یک پروتون دارای پتانسیل زیر است

$$V(r) = \frac{Ke^{-ar}}{r}, \quad K < 0.$$

(الف) نیرو را پیدا کنید و آن را با قانون نیروی متناسب با $1/r^2$ مقایسه کنید. (ب) اگر ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر چنین نیرویی حرکت کند، انواع حرکت ممکن را مورد بحث قرار دهید. (پ) بحث کنید که چگونه حرکات از انواع حرکت متناظر برای قانون نیروی متناسب با $1/r^2$ فرق خواهند داشت. (ت) L و E را برای حرکت روی دایره‌ای به شعاع a بیابید. (ث) زمان تناوب حرکت دایره‌ای و نوسانهای شعاعی کوچک را پیدا کنید. (ج) نشان دهید که وقتی a خیلی کوچک است مدارهای نسبتاً دایره‌ای شکل، تقریباً بسته‌اند.

۴۸. معادله مداری (۳-۲۲۲) را برای حالت $F=0$ حل کنید. نشان دهید که جوابتان با قانون اول نیوتن توافق دارد.

۴۹. در فصل ۶ (مسئله ۷) نشان خواهیم داد که اثر پخش یکنواخت غبار با چگالی ρ ، حول خورشید این است که به نیروی جاذبه ثقلی خورشید به سیاره‌ای به جرم m ، نیروی مرکزی و جاذب

$$F' = -mkr$$

را اضافه می‌کند که در آن

$$k = \frac{4\pi}{3} \rho G$$

(الف) اگر جرم خورشید M باشد، سرعت زاویه‌ای چرخش سیاره را در مداری دایره‌ای به شعاع r پیدا کنید، و فرکانس زاویه‌ای نوسانهای شعاعی کوچک حول r را بیابید و از آنجا نشان دهید که اگر F' از نیروی جاذبهٔ ثقلی خورشید بسیار کمتر باشد، مدار به نسبت دایره‌ای شکل تقریباً یک بیضی خواهد بود که محور بزرگتر آن به آهستگی با سرعت زاویه‌ای

$$\omega_p = 2\pi\rho \left(\frac{r^2 G}{M} \right)^{1/2}$$

در تقدیم است. (ب) آیا تقدیم محور در جهت و یا مخالف جهت سرعت زاویه‌ای مداری است؟ جرم M خورشید و شعاع مدار سیارهٔ تیر را در مراجع پیدا کنید و سپس چگالی لازم غبار را برای پدید آمدن تقدیمی برابر ۴۱ ثانیهٔ کمائی در قرن حساب کنید.

۵۰. (الف) با استفاده از روش انرژی پتانسیل مؤثر، انواع حرکتی را که می‌توان برای نیروی مرکزی جاذبی متناسب با عکس مکعب شعاع به صورت

$$F(r) = -\frac{K}{r^3}, \quad K > 0$$

انتظار داشت، مورد بحث قرار دهید. (ب) دامنه‌های انرژی و اندازهٔ حرکت زاویه‌ای را برای هر یک از حرکات ممکن پیدا کنید. (پ) معادلهٔ مداری (۳-۲۲۲) را حل کنید، و نشان دهید که جواب آن به شکل یکی از معادلات زیر است:

$$\frac{1}{r} = A \cos [\beta (\theta - \theta_0)] \quad (۱)$$

$$\frac{1}{r} = A \cosh [\beta (\theta - \theta_0)] \quad (۲)$$

$$\frac{1}{r} = A \sinh [\beta (\theta - \theta_0)] \quad (۳)$$

$$\frac{1}{r} = A (\theta - \theta_0) \quad (۴)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} e^{\pm \beta \theta} \quad (۵)$$

(ت) هر یک از انواع حرکت فوق به‌ازای چه مقادیری از E و L رخ می‌دهد؟ ضرایب A و β بر حسب E و L ، در هر یک از حالات فوق حساب کنید. (ث) شکل عمومی مدار را در هر یک از حالات فوق رسم کنید.

۵۱. (الف) مطلوب است بحث بر انواع حرکت ممکن برای نیروی مرکزی زیر:

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} + \frac{K'}{r^3}$$

که در آن $K > 0$ فرض می‌شود و برای K' هر دو علامت (مثبت و منفی) را در نظر بگیرید. (ب) معادلهٔ مداری را حل کنید، و نشان دهید که اگر $L^2 > -mK'$ مدارهای کراندار به صورت زیر خواهند

بود

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \alpha \theta}$$

(پ) نشان دهید که این مسیر، یک بیضی تقدیمی است و سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی را پیدا کنید و بیان کنید که آیا حرکت تقدیمی با سرعت زاویه‌ای مداری هم‌جهت و یا مختلف‌الجهت است؟

۵۲. ماهواره اسپاتنیک I یک نقطه حضيض (نقطه نزدیکترین فاصله به زمین) ۲۲۷ کیلومتر بالای سطح زمین داشت که در آن نقطه سرعتش ۲۸۷۱۰ کیلومتر در ساعت بود. مطلوب است فاصله (حداکثر) اوچش از سطح زمین و زمان تناوب دورانش. (فرض کنید که زمین کروی است و از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید. برای حل این مسئله فقط لازم است که g و شعاع زمین را پیدا کنید.)

۵۳. ماهواره اکسپلورر I یک نقطه حضيض ۳۶۰ کیلومتر و یک نقطه اوج ۲۵۴۹ کیلومتر بالای سطح زمین داشت. مطلوب است فاصله ماهواره بالای سطح زمین وقتی ماهواره از نقطه‌ای که 90° (دور زمین) از نقطه حضيضش فاصله دارد، گذر کرده است.

۵۴. ستاره دنباله‌داری در فاصله $1/0 \times 10^8$ کیلومتری خورشید رصد شده است، که با سرعت $51/6$ کیلومتر در ثانیه در امتدادی که با شعاع رسم شده از خورشید زاویه 45° می‌سازد، به سمت خورشید حرکت می‌کند. معادله‌ای برای مدار ستاره دنباله‌دار در مختصات قطبی طوری بنویسید که خورشید در کانون قرار داشته باشد و محور x از مکان ستاره دنباله‌دار در هنگام رصد بگذرد، (جرم خورشید $2/0 \times 10^{30}$ کیلوگرم است).

۵۵. می‌توان نشان داد (مسائل ۱۷ و ۲۱ از فصل ۶) که به سبب پختی شکل زمین تصحیح انرژی پتانسیل جرم m واقع در میدان ثقل زمین، در مختصات کروی نسبت به محور قطبی زمین، تقریباً عبارت است از

$$V' = -\frac{\eta m M G R^2}{5r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta),$$

که در آن M جرم زمین و $2R$ (به ترتیب قطرهای استوایی و قطبی زمین‌اند. مطلوب است محاسبه میزان حرکت تقدیمی نقطه حضيض زمینی (نزدیکترین نقطه) یک ماهواره زمینی که در مداری نسبتاً مدور در صفحه استوا حرکت می‌کند. جرم زمین و طول قطرهای استوایی و قطبی زمین را از مراجع پیدا کنید، و میزان حرکت تقدیمی ماهواره‌ای را که ۴۰۰ میل بالای زمین قرار دارد، بر حسب درجه به‌ازای هر دور چرخش حساب کنید.

*۵۶. گشتاور - نیروی ناشی از تصحیح انرژی پتانسیل به سبب پختی زمین را که در مسئله ۵۵ داده شده است، بر یک ماهواره زمین حساب کنید. ماهواره‌ای در مداری مدور به شعاع r در صفحه‌ای حرکت می‌کند که عمود بر آن، با محور قطبی زاویه α می‌سازد. فرض کنید که تغییر مدار در یک چرخش ناچیز باشد، گشتاور - نیروی میانگین طی یک چرخش را حساب کنید. نشان دهید که تأثیر چنین گشتاور - نیرویی این است که باعث می‌شود، قائم بر صفحه مدار روی مخروطی به زاویه رأس 2α حول محور قطبی حرکت تقدیمی انجام دهد، و فرمولی برای میزان حرکت تقدیمی بر حسب درجه بر دور پیدا کنید. با به‌کار بردن مقادیر مناسب M ، η ، و R میزان حرکت تقدیمی را برای ماهواره‌ای در فاصله ۶۰۰ کیلومتری زمین حساب کنید.

۵۷. می‌توان نشان داد که مدار ذره‌ای به جرم m که تحت تأثیر انرژی پتانسیل $V(r)$ حرکت می‌کند و به وسیله نظریه نسبیت خاص معین می‌شود، همان مداری است که ذره بنا به مکانیک نیوتنی روی

آن حرکت می‌کند، به شرط آنکه انرژی پتانسیل چنین باشد:

$$V(r) = \frac{[E - V(r)]^2}{2mc^2}$$

که در آن E انرژی (جنبشی به اضافه پتانسیل)، و c سرعت نور است. اکنون درباره نوع مدارهایی که طبق نظریه نسبیت برای نیروی متناسب با $1/r^2$ ایجاد می‌شود، بحث کنید. از مقایسه سرعت زاویه‌ای مدار با فرکانس نوسانهای شعاعی، برای حرکت به نسبت دایره‌ای شکل، نشان دهید که مدار آنها وقتی تصحیح مربوط به نظریه نسبیت کوچک باشد، بیضیهای تقدیمی‌اند و سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی را حساب کنید. (معادله ۱۴-۱۰۱ را ببینید.)

۵۸. مارس دارای یک نقطه (حضيض) نزدیکترین فاصله به خورشید $2/06 \times 10^8$ کیلومتر و یک نقطه حداکثر فاصله (متنهای اوج) $2/485 \times 10^8$ کیلومتر است. فرض کنید که زمین در همان صفحه روی دایره‌ای به شعاع $1/49 \times 10^8$ کیلومتر با زمان تناوب یک سال حرکت می‌کند. فقط با استفاده از این داده‌ها، تندی مارس را در نقطه نزدیکترین فاصله به دست آورید. فرض کنید که یک سفینه فضایی فرستاده شده است به طوری که نقطه نزدیکترین فاصله‌اش در مدار زمین و نقطه حداکثر فاصله‌اش در نقطه نزدیکترین فاصله مارس است. مطلوب است سرعت سفینه نسبت به مارس در نقطه‌ای که به یکدیگر می‌رسند. کدام یک سرعت بالاتری دارد؟ کدام یک سرعت زاویه‌ای متوسط بالاتر در طول دوره تناوب پرواز دارد؟

۵۹. سفینه فضایی ۴ روی مداری از زمین جدا شد که فاصله نزدیکترین‌اش از خورشید به طور تقریب برابر فاصله‌اش از زمین ($1/49 \times 10^8$ کیلومتر) و حداکثر فاصله‌اش به طور تقریب برابر فاصله مارس از خورشید ($2/2 \times 10^8$ کیلومتر) بود. با چه سرعتی نسبت به زمین سفینه خارج شده است؟ با چه سرعتی (نسبت به زمین) باید زمین را ترک کند تا اینکه به طور کلی از کشش ثقلی خورشید بری باشد؟ (برای جواب به این مسئله احتیاج به داده اضافی نیست بجز طول سال، اگر فرض کنید که زمین روی دایره‌ای حرکت می‌کند.)

۶۰. الف) ماهواره‌ای باید از سطح زمین پرتاب شود. فرض کنید که زمین کره‌ای است به شعاع R ، و اصطکاک جوی آن ناچیز است. ماهواره با سرعت v تحت زاویه α نسبت به قائم طوری پرتاب می‌شود، که بی‌صرف توان در ارتفاع h_1 از سطح زمین سرعتش افقی شود، سپس به وسیله موشک طبقه آخر، پیشرانی افقی به آن وارد می‌گردد، به طوری که سرعت ماهواره به اندازه Δv_1 افزایش می‌یابد. مدار نهایی یک بیضی خواهد بود که ارتفاع نقاط حضيض (نزدیکترین نقطه) و اوج (دورترین نقطه) آن از سطح زمین به ترتیب h_1 و h_2 است. سرعت اولیه لازم v و سرعت اضافی Δv_1 را بر حسب R ، α ، h_1 ، h_2 ، و g (شتاب ثقل در سطح زمین) پیدا کنید. (ب) فرمولی برای تغییر dh_1 در نقطه حضيض ناشی از خطای $\delta\beta$ در امتداد پیشران نهایی تا مرتبه $(\delta\beta)^2$ بنویسید.

۶۱. دو سیاره در یک صفحه بر دوایری به شعاعهای r_1 و r_2 حول خورشید حرکت می‌کنند. یک دستگاه تحقیقاتی فضایی از سیاره یک با سرعت v_1 نسبت به سیاره طوری پرتاب می‌شود که به مدار سیاره ۲ برسد. (سرعت v_1 ، سرعت نسبی دستگاه فضایی، پس از فرار از میدان ثقل سیاره است.) نشان دهید که v_1 برای مداری بیضی شکل که اوج و حضيض آن r_1 و r_2 است، کمترین

مقدار را دارد. در این صورت اگر دستگاه فضایی در زمانی به شعاع r_2 برسد که با سیاره ۲ برخورد کند، سرعت v_1 و سرعت نسبی v_2 بین دستگاه فضایی و سیاره ۲ را پیدا کنید. نتایج خود را بر حسب r_1, r_2, Y_1 (طول سال سیاره ۱) بیان کنید. مقادیر مربوط r_1 و r_2 را از جدول پیدا کنید و v_1 را برای سفر از زمین به ناهید و بهرام تخمین بزنید.^۱

۶۲. موشکی در مداری بیضی شکل با فاصله حضیض r_1 و فاصله اوج r_2 (از مرکز زمین) به دور زمین می چرخد. در نقطه معینی از مدار، موتور آن به مدت کوتاهی روشن می شود، تا سرعتش به اندازه Δv افزایش یابد و موشک بر مداری قرار گیرد که با سرعت نهایی v نسبت به زمین از حوزه جاذبه ثقلی فرار کند. (از هر گونه اثر ناشی از خورشید و ماه صرف نظر کنید). نشان دهید که اگر پیشران در نقطه حضیض به موازات سرعت مداری، وارد شود، Δv کمترین مقدار را خواهد داشت. در آن حالت Δv را بر حسب پارامترهای مدار بیضی شکل e و a و شتاب g در فاصله R از مرکز زمین و سرعت نهایی v پیدا کنید. آیا می توانید از نظر فیزیکی توضیح دهید که چرا Δv هر قدر e بزرگتر باشد کوچکتر است؟

۶۳. ماهواره ای در مداری که از قطبها می گذرد، به دور زمین حرکت می کند. زمانی که ماهواره از روی مدارهای جغرافیایی زمین می گذرد، اندازه گیری می شود تا تابع $\theta(t)$ معلوم شود. نشان دهید که چگونه می توان نقطه حضیض، و نیم محور بزرگتر و ضریب خروج از مرکز را بر حسب $\theta(t)$ و مقدار g در سطح زمین، پیدا کرد. فرض کنید که زمین کره ای به شعاع R باشد.

۶۴. ذره ای به جرم m در مداری بیضی شکل با محور بزرگتر $2a$ ، و ضریب خروج از مرکز e ، چنان حرکت می کند که شعاع ذره از مرکز بیضی، سطحی را با میزان ثابت

$$\frac{dS}{dt} = C$$

و زمان تناوب τ که از a و e مستقل است، می رويد. (الف) معادله بیضی را در مختصات قطبی که مبدأ آن در مرکز بیضی باشد، بنویسید. (ب) نشان دهید که نیروی وارد بر ذره نیروی مرکزی است، و $F(r)$ را بر حسب m و τ پیدا کنید.

۶۵. نشان دهید که فرمول سطح مقطع عرضی رادرفورد (۳-۲۷۶) وقتی یکی از بارها منفی است نیز برقرار است.

۶۶. ذره ای از سطح یک کره سفت به شعاع R طوری بازتاب شده است که نقطه برخورد و خطوط انعکاس حرکت در همان صفحه ای قرار می گیرند که شعاع به نقطه برخورد قرار دارد و زوایای مساوی با شعاع می سازند. مطلوب است سطح مقطع عرضی $d\sigma$ برای پراکندگی درون زاویه ای بین Θ و $\Theta+d\Theta$ از $d\sigma$ روی تمام زوایا انتگرال گیری کنید و نشان دهید که سطح مقطع عرضی تمامی دارای مقدار متوسط πR^2 است.

۱. در این مسئله از نیروی ثقل دو سیاره که بر دستگاه فضایی وارد می شود، صرف نظر کنید. به عبارت دیگر بعد از جدا شدن دستگاه فضایی از سیاره ۱ فقط نیروی ثقل خورشید بر دستگاه فضایی را در نظر بگیرید. همچنین جهت سرعت v_1 نسبت به سیاره ۱ را چنان اختیار کنید که v_1 کمترین مقدار را داشته باشد.

۶۷. بررسی کنید تشابه $u, x \rightarrow \theta, t$ بین معادلات (۳-۲۲۲) و (۲-۳۹) تا اینکه جوابی برای معادله (۳-۲۲۲) مشابه جواب (۲-۴۶) معادله (۲-۳۹) به دست آورید. با استفاده از جواب خود، نشان دهید که زاویه پراکندگی Θ (شکل ۳-۴۲) برای ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی $F(r)$ قرار می‌گیرد، توسط فرمول زیر داده می‌شود

$$\Theta = \left| \pi - 2s \int_{r_0}^{u_0} \left[1 - s^2 u^2 - V(u^{-1}) / \left(\frac{1}{4} m v^2 \right) \right]^{-1/2} du \right|$$

که در آن $V(r = u^{-1})$ انرژی پتانسیل است

$$V(r) = \int_r^\infty F(r) dr$$

s پارامتر برخورد و u_0 مقدار u است که به ازای آن کمیت داخل براکت صفر می‌شود. [این مسئله مشکل نیست اگر به‌طور روشن اهمیت فیزیکی و هندسی کمیت‌های گوناگون درگیر شده در هر قدم از جواب را به‌خاطر داشته باشید.]

۶۸. نشان دهید یک کره سفت، همانگونه که در مسئله ۶۶ تعریف شده است، می‌تواند به‌عنوان حالت حدی نیرویی مرکزی ارائه شود که در آن

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r > R \\ \infty, & r < R \end{cases}$$

یعنی نشان دهید که چنین پتانسیلی همان قانون بازتاب را عرضه می‌کند که مسئله ۶۶ مشخص کرده است. بنابراین با استفاده از نتیجه مسئله ۶۷ مسئله ۶۶ را حل کنید.

۶۹. با استفاده از نتیجه مسئله ۶۷ فرمول سطح مقطع عرضی رادرفورد را به دست آورید.

۷۰. موشکی با سرعت اولیه v_0 به سمت ماه که دارای جرم M و شعاع r_0 است، حرکت می‌کند. سطح مقطع برخورد با ماه را پیدا کنید. ماه را ساکن بگیرید و از اثرات ناشی از اجسام دیگر صرف‌نظر کنید.

۷۱. نیروی مرکزی دافع

$$F(r) = \frac{K}{r^4}, \quad K > 0,$$

که با عکس مکعب شعاع متناسب است مفروض است، نشان دهید که مدارها به‌صورت مدار (۱) در مسئله ۵۰ است و عدد ثابت β را بر حسب E, K ، و L و جرم m ذره تابنده بیان کنید. نشان دهید که اگر ذره‌ای تحت تأثیر چنین نیرویی قرار گیرد، سطح مقطع پراکندگی $d\sigma$ ، بین زاویه Θ و $\Theta + d\Theta$ عبارت است از

$$d\sigma = \frac{2\pi^2 K}{m v^2} \frac{\pi - \Theta}{\Theta^2 (\pi - \Theta)^2} d\Theta.$$

۷۲. ذره‌ای با بار q و جرم m در حالت سکون در یک میدان مغناطیسی یکنواخت ثابت \hat{z} $B = B_0 \hat{z}$ از لحظه t تحت تأثیر میدان الکتریکی تناوبی $E = E_0 \hat{x} \sin \omega t$ قرار می‌گیرد. حرکت ذره را پیدا کنید.

۷۳. مسئله ۷۲ را برای حالت $\omega = qB_0/mc$ حل کنید.

۷۴. ذره‌ای باردار در یک میدان مغناطیسی و الکتریکی یکنواخت ثابت حرکت می‌کند. نشان دهید که اگر متغیر جدید زیر را معرفی کنیم

$$r' = r - \frac{E \times B}{B^2} ct,$$

معادله حرکت برای r' همان معادله حرکت برای r است با این تفاوت که مؤلفه E عمود بر B حذف شده است.

۷۵. ذره‌ای به بار q در یک ماگنترون استوانه‌ای تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت

$$B = B\hat{z}$$

و میدان الکتریکی ناشی از سیمی واقع در مرکز و در امتداد z ، قرار گرفته است. جهت و اندازه میدان الکتریکی شعاعی (به سمت داخل و یا به سمت خارج) برابر است با

$$E = \frac{a}{\rho} \hat{\rho},$$

که در آن ρ فاصله ذره از محور z و $\hat{\rho}$ بردار یکه‌ای است که به‌طور شعاعی به سمت خارج از محور z متوجه است. ضرایب ثابت a و B ممکن است مثبت و یا منفی باشند. (الف) معادلات حرکت را در مختصات استوانه‌ای بنویسید. (ب) نشان دهید که کمیت

$$m\rho^2 \dot{\phi} + \frac{qB}{2c} \rho^2 = K$$

یک ثابت حرکت است. (پ) با به‌کار بردن این نتیجه و بر اساس انتگرال انرژی، به‌طور کیفی درباره انواع حرکت ممکن بحث کنید. تمام حالتها را با تمام مقادیر ممکن a, B, K ، و E در نظر بگیرید. (ت) تحت چه شرایطی ممکن است حرکت ذره حول محور، حرکت دایره‌ای باشد؟ (ث) فرکانس نوسانهای شعاعی کوچک حول این حرکت دایره‌ای چیست؟

۷۶. یک دستگاه انتخاب‌کننده سرعت برای پرتوی از ذرات باردار که جرم هر یک m و بارشان e است باید طوری طرح شود که تنها ذراتی به سرعت v را از خود عبور دهد. در این دستگاه از میدان الکتریکی یکنواخت E ، در جهت محور x ها و میدان مغناطیسی یکنواخت B ، در جهت محور y ها استفاده می‌شود. ذرات از شکافی باریک، که در جهت محور y ها است بیرون می‌آیند و در امتداد محور z ها حرکت می‌کنند و پس از آنکه در مسافتی به طول l تحت تأثیر میدانهای متعامد قرار گرفتند، از میان شکاف دیگری که آن هم در صفحه yz و موازی با شکاف نخستین است می‌گذرند. اندازه میدانهای E و B طوری انتخاب شده است که برآیند نیروهای وارد بر ذراتی که در جهت z با سرعت v حرکت می‌کنند، صفر باشد. (الف) اگر ذره‌ای از مبدأ با سرعت v در جهتی که با محور z ها زاویه کوچکی می‌سازد، حرکت کند نقطه‌ای را که به صفحه $z=l$ می‌رسد پیدا کنید. فرض کنید که زاویه جهش ذره آنقدر کوچک است که می‌توان از توانهای دوم به بالای آن، چشم‌پوشی کرد. (ب) مناسب‌ترین مقادیر B و E چه باید باشد تا ذراتی که با سرعت v به شکاف دوم می‌رسند بیشترین، و ذراتی که با سرعتهای دیگری به این شکاف می‌رسند کمترین مقدار ممکن را داشته باشند. (پ) اگر عرض شکاف h باشد، حداکثر اختلاف سرعت δv از v را چنان پیدا کنید که ذره‌ای که از ابتدا با سرعت $v + \delta v$ در امتداد محور z حرکت می‌کرد، هنوز بتواند از شکاف دوم بگذرد. فرض کنید که E و B مقادیر انتخاب شده در قسمت (ب) را داشته باشند.

حرکت دستگاهی از ذرات

۴-۱ بقای اندازه حرکت خطی. مرکز جرم

در این فصل رفتار دستگاههای مکانیکی را در نظر می‌گیریم که شامل دو یا چند ذره‌اند که تحت تأثیر نیروهای داخلی که ذرات بر یکدیگر اعمال می‌کنند، و نیروهای خارجی یعنی نیروهای وارد بر ذرات دستگاه از عوامل خارجی، قرار گرفته باشند. فرض می‌کنیم که ذرات جرمهایی نقطه‌ای باشند که هر یک توسط مکان خود (x, y, z) ، در فضا مشخص شده‌اند، مانند تک‌ذره‌ای که حرکتش در فصل قبل بررسی شد.

فرض کنید که دستگاه مورد نظر شامل N ذره است که به وسیله اعداد $۱, ۲, \dots, N$ شماره گذاری شده‌اند. اجرام ذرات را به وسیله m_1, m_2, \dots, m_N مشخص می‌کنیم. نیروی کل وارد بر k امین ذره عبارت است از حاصل جمع منتجه نیروهای داخلی وارد بر ذره k ام به وسیله $(N-1)$ ذره دیگر دستگاه و هر نیروی خارجی که به ذره k ام وارد شود. فرض کنید که F_k^i مجموع نیروهای داخلی وارد بر ذره k ام و F_k^e نیروی کل خارجی وارد بر آن باشند. در این صورت، معادله حرکت k امین ذره عبارت خواهد بود از:

$$m_k \ddot{r}_k = F_k^e + F_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1-4)$$

N معادله‌ای که به ازای مقادیر مختلف k به دست می‌آیند، معادلات حرکت دستگاه‌اند. چون هر یک از این N معادله، خود یک معادله برداری است، به طور کلی $3N$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همزمان داریم که باید حل کنیم. جواب، مجموعه‌ای از توابع $r_k(t)$ خواهد بود که حرکت هر ذره در دستگاه را مشخص می‌کند. جواب بستگی به $6N$ ضریب ثابت «دلخواه» خواهد داشت که مکان و سرعت زاویه هر یک از ذرات را معین می‌کنند. حل مجموعه معادلات (۴-۱) مگر در پاره‌ای حالات خاص بسیار دشوار است، و هیچ روش کلی برای حل مسئله N جسمی، حتی در حالتی که نیروهای بین اجسام، مرکزی باشند، در دست نیست. به طوری که مشاهده خواهیم کرد، مسئله دوجسمی اغلب حل شدنی است و هرگاه نیروهای داخلی واجد شرایط معینی باشند، چند قضیه کلی وجود دارد. اگر $p_k = m_k v_k$ اندازه حرکت خطی k امین ذره باشد، معادلات (۴-۱) را می‌توان به صورت زیر

نوشت:

$$\frac{dp_k}{dt} = F_k^e + F_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2-4)$$

هرگاه عبارات طرفین این تساوی را برای کلیه ذرات جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^N \frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N p_k = \sum_{k=1}^N F_k^e + \sum_{k=1}^N F_k^i. \quad (3-4)$$

اندازه حرکت خطی کل ذرات را با P ، و نیروی خارجی کل را با F نشان می‌دهیم:

$$P = \sum_{k=1}^N p_k = \sum_{k=1}^N m_k v_k, \quad (۴-۴)$$

$$F = \sum_{k=1}^N F_k^e. \quad (۵-۴)$$

اکنون فرض می‌کنیم که حاصل جمع نیروهای داخلی وارد بر تمام ذرات صفر است (این فرض در زیر توجیه خواهد شد):

$$\sum_{k=1}^N F_k^i = 0. \quad (۶-۴)$$

اگر معادلات (۴-۴)، (۵-۴)، و (۶-۴) را در معادله (۳-۴) جایگزین کنیم، این معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dP}{dt} = F. \quad (۷-۴)$$

و این عبارت است از قضیه اندازه حرکت برای دستگاهی از ذرات. بنابراین قضیه میزان تغییر اندازه حرکت خطی کل نسبت به زمان، برابر است با نیروی خارجی کل. یک نتیجه فوری از این قضیه، قضیه بقای اندازه حرکت خطی است. بنابراین قضیه، اگر نیروی خارجی مؤثر نباشد، اندازه حرکت کل P ثابت است.

اکنون سعی می‌کنیم فرض (۶-۴) را توجیه کنیم. استدلال اول ما براساس قانون سوم نیوتن است. فرض می‌کنیم که نیروی F_k^i وارد بر ذره k ام بر اثر وجود سایر ذرات، را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از نیروهای جدا ناشی از هریک از ذرات دیگر دانست:

$$F_k^i = \sum_{l \neq k} F_{l \rightarrow k}^i, \quad (۸-۴)$$

که در آن نیرویی $F_{l \rightarrow k}^i$ نیرویی است که به وسیله ذره l بر ذره k وارد می‌شود. طبق قانون سوم نیوتن، نیروی وارد بر ذره k ، به وسیله ذره l با نیروی وارد بر ذره l به وسیله ذره k مساوی و مختلف‌الجهت است:

$$F_{k \rightarrow l}^i = -F_{l \rightarrow k}^i. \quad (۹-۴)$$

معادله (۹-۴) قانون سوم نیوتن را به صورتی بیان می‌کند که می‌توان آن را ضعیف نامید. یعنی می‌گوید نیروها با هم مساوی و مختلف‌الجهت‌اند، و متضمن آن نیست که در امتداد خط واصل دو ذره عمل کنند. حال اگر مجموع معادله (۶-۴) را در نظر بگیریم، داریم

$$\sum_{k=1}^N F_k^i = \sum_{k=1}^N \sum_{l \neq k} F_{l \rightarrow k}^i. \quad (۱۰-۴)$$

عبارت طرف راست، مجموع تمام نیروهایی است که بین هر دو ذره در دستگاه اعمال می‌شود. چون به ازای هر دو ذره k و l ، دو نیروی $F_{l \rightarrow k}^i$ و $F_{k \rightarrow l}^i$ در حاصل جمع کل ظاهر می‌شود، و چون طبق معادله (۹-۴)، حاصل جمع این دو نیرو صفر است، حاصل جمع کل طرف راست معادله (۱۰-۴) صفر می‌شود، در نتیجه معادله (۶-۴) ثابت می‌گردد.

بنابراین قانون سوم نیوتن، به صورت (۴-۹)، برای تضمین بقای اندازه حرکت خطی برای دستگاهی از ذرات کافی است، و به همین منظور بود که این قانون به وجود آمد. مع هذا، به طوری که در آینده خواهیم دید، قانون بقای اندازه حرکت اعتباری کلی تر از قانون سوم نیوتن دارد. می توان فرض (۴-۶) را براساس فرضی به دست آورد که تا حدودی از قانون سوم نیوتن اجمالی تر است. احتیاج نداریم فرض کنیم که ذرات دوه دو بر یکدیگر کنش دارند. فقط فرض می کنیم که نیروهای داخلی چنان اند که اگر هر یک از ذرات دستگاه به اندازه فاصله مساوی کوچک δr در هر لحظه خاص، تغییر مکان پیدا کنند، کار خالص انجام شده به وسیله این نیروها صفر خواهد بود. حرکت فرضی تمام ذرات دستگاه را تغییر مکان مجازی^۱ گویند. حرکت توصیف شده را، که در آن تمام ذرات به اندازه مساوی δr تغییر مکان پیدا می کنند، انتقال مجازی کوچک دستگاه نامند. لذا، فرض می کنیم که در هر انتقال مجازی کوچک δr تمام دستگاه، نیروهای داخلی کار خالصی انجام نمی دهند. این فرض از نظر کلی بقای انرژی، با فرض همگن بودن فضا اختلاف بسیاری ندارد. اگر دستگاه را به مکانی در فضا که با مکان اولیه اش کمی متفاوت است حرکت دهیم، بی آنکه اختلال دیگری در آن به وجود آید، در حالت داخلی دستگاه نباید تأثیری داشته باشد، به این دلیل به ویژه توزیع انواع مختلف انرژی در داخل آن نباید تغییر بکند و هیچ گونه کار خالصی نمی تواند به وسیله نیروهای داخلی انجام شده باشد. اکنون می توان از این فکر برای اثبات معادله (۴-۶) استفاده کرد. کار انجام شده به وسیله نیروی F_k^i در انتقال مجازی کوچک δr عبارت است از

$$\delta W_k = F_k^i \cdot \delta r. \quad (11-4)$$

کار کل انجام شده به وسیله تمام نیروهای داخلی عبارت است از

$$\delta W = \sum_{k=1}^N \delta W_k = \delta r \cdot \left(\sum_{k=1}^N F_k^i \right), \quad (12-4)$$

که در آن از δr فاکتور گرفته ایم، زیرا برای تمام ذرات یکسان است. اگر فرض کنیم $\delta W = 0$ ، خواهیم داشت:

$$\delta r \cdot \left(\sum_{k=1}^N F_k^i \right) = 0. \quad (13-4)$$

چون معادله (۴-۱۳) باید برای هر انتقال مجازی δr برقرار باشد، معادله (۴-۶) نتیجه می شود. اگر مفهوم مرکز جرم دستگاهی از ذرات را در کار وارد کنیم، می توانیم معادله (۴-۷) را به صورت روشن تری درآوریم. بردار R که مرکز جرم ذره را معین می کند، به وسیله معادله زیر تعریف می شود

$$MR = \sum_{k=1}^N m_k r_k, \quad (14-4)$$

که در آن M جرم کل است:

$$M = \sum_{k=1}^N m_k. \quad (15-4)$$

مختصات مرکز جرم به وسیله مؤلفه‌های معادله (۴-۱۴) داده می‌شوند:

$$X = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k x_k, \quad Y = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k y_k, \quad Z = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k z_k. \quad (۱۶-۴)$$

اندازه حرکت کل [که به وسیله معادله (۴-۴) تعریف شده است] بر حسب مرکز جرم عبارت است از:

$$P = \sum_{k=1}^N m_k \dot{r}_k = M\dot{R}, \quad (۱۷-۴)$$

چنانکه معادله (۷-۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$M\ddot{R} = F. \quad (۱۸-۴)$$

معادله فوق با معادله حرکت یک ذره به جرم M که تحت تأثیر نیروی F قرار گرفته است، یکسان است. بنابراین، وقتی معادله (۴-۶) برقرار باشد، قضیه مهمی بدین صورت داریم: مرکز جرم دستگاهی از ذرات مانند هر تک ذره‌ای حرکت می‌کند، که جرمش، جرم کل دستگاه باشد، و تحت تأثیر نیرویی مساوی با نیروی خارجی کل وارد بر دستگاه قرار گرفته باشد.

۲-۴ بقای اندازه حرکت زاویه‌ای

اکنون میزان تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای کل یک دستگاه از N ذره نسبت به زمان را نسبت به یک نقطه Q که لزومی ندارد ثابت باشد، حساب می‌کنیم. طبق معادله (۳-۱۴۲)، بردار اندازه حرکت زاویه‌ای ذره k حول نقطه Q ، که لازم نیست مبدأ باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_{kQ} = m_k (r_k - r_Q) \times (\dot{r}_k - \dot{r}_Q), \quad (۱۹-۴)$$

که در آن r_Q بردار مکان نقطه Q ، و $(r_k - r_Q)$ برداری از نقطه Q تا ذره k است. توجه کنید که به جای سرعت \dot{r}_k ، سرعت $(\dot{r}_k - \dot{r}_Q)$ نسبت به نقطه Q را که به عنوان مبدأ در نظر گرفته شده است، نوشته‌ایم، به طوری که L_{kQ} اندازه حرکت زاویه‌ای m_k است که در محاسبه آن Q مبدأ ثابتی فرض شده است. این مفیدترین روش تعریف اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه متحرک Q است. اگر حاصل ضرب خارجی $(r_k - r_Q)$ را با معادله حرکت (۴-۲) ذره k در نظر بگیریم، همان طور که در به دست آوردن معادله (۳-۱۴۴) داشتیم، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$(r_k - r_Q) \times \frac{dp_k}{dt} = (r_k - r_Q) \times F_k^e + (r_k - r_Q) \times F_k^i. \quad (۲۰-۴)$$

اکنون از معادله (۱۹-۴) مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dL_{kQ}}{dt} = (r_k - r_Q) \times \frac{dp_k}{dt} + m_k (\dot{r}_k - \dot{r}_Q) \times (\dot{r}_k - \dot{r}_Q) - m_k (r_k - r_Q) \times \ddot{r}_Q. \quad (۲۱-۴)$$

عبارت دوم طرف راست صفر است، لذا طبق معادله (۴-۲۰) داریم،

$$\frac{dL_{kQ}}{dt} = (r_k - r_Q) \times F_k^e + (r_k - r_Q) \times F_k^i - m_k (r_k - r_Q) \times \ddot{r}_Q. \quad (۲۲-۴)$$

اندازه حرکت زاویه‌ای کل و گشتاور - نیروی خارجی کل حول نقطه Q به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L_Q = \sum_{k=1}^N L_{kQ}, \quad (23-4)$$

$$N_Q = \sum_{k=1}^N (r_k - r_Q) \times F_k^e. \quad (24-4)$$

اگر این جمع را برای کلیه ذرات به دست آوریم معادله (۲۲-۴) با استفاده از معادله (۱۴-۴)، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dL_Q}{dt} = N_Q + \sum_{k=1}^N (r_k - r_Q) \times F_k^i - M(R - r_Q) \times \ddot{r}_Q. \quad (25-4)$$

اگر شتاب نقطه Q صفر و یا در امتداد خطی باشد که Q را به مرکز جرم وصل می‌کند، عبارت آخر صفر خواهد شد. ما بحث را به گشتاورهای حول یک نقطه Q که شرط زیر را برقرار می‌کنند، محدود می‌کنیم:

$$(R - r_Q) \times \ddot{r}_Q = 0. \quad (26-4)$$

مهمترین کاربردها در مورد حالاتی است که Q ساکن، و یا مرکز جرم است. اگر همچنین فرض کنیم که گشتاور - نیروی داخلی کل از بین می‌رود:

$$\sum_{k=1}^N (r_k - r_Q) \times F_k^i = 0, \quad (27-4)$$

در این صورت معادله (۲۵-۴) چنین می‌شود:

$$\frac{dL_Q}{dt} = N_Q. \quad (28-4)$$

و این، قضیه اندازه حرکت زاویه‌ای برای دستگاهی از ذرات است. یکی از فروع این قضیه، قضیه بقای اندازه حرکت زاویه‌ای است، که بنابر آن اگر گشتاور - نیروی خارجی وارد بر دستگاه صفر باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای کل دستگاه ثابت خواهد بود.

برای اثبات معادله (۲۷-۴) با استفاده از قانون سوم نیوتن، لازم است که این قانون را به صورتی «قویتر» از آنچه که در فصل پیشین آمد به کار بریم. یعنی نه تنها نیروهای $F_{k \rightarrow l}^i$ و $F_{l \rightarrow k}^i$ مساوی و مختلف‌الجهت باشند، بلکه در امتداد خط واصل دو ذره وارد شوند، یعنی دو ذره فقط بتوانند یکدیگر را جذب یا دفع کنند. مانند بخش قبلی، فرض خواهیم کرد که F_k^i مجموع نیروهای ناشی از سایر ذرات باشد:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (r_k - r_Q) \times F_k^i &= \sum_{k=1}^N \sum_{l \neq k} (r_k - r_Q) \times F_{l \rightarrow k}^i \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} [(r_k - r_Q) \times F_{l \rightarrow k}^i + (r_l - r_Q) \times F_{k \rightarrow l}^i]. \end{aligned} \quad (29-4)$$

در مرحله دوم معادله فوق، مجموع گشتاور - نیروها به صورت مجموع زوج‌هایی گشتاور، ناشی از جفت نیروهایی که بنابه قانون سوم نیوتن مساوی و مختلف‌الجهت‌اند، [معادله (۴-۹)] مرتب شده است، به طوری که:

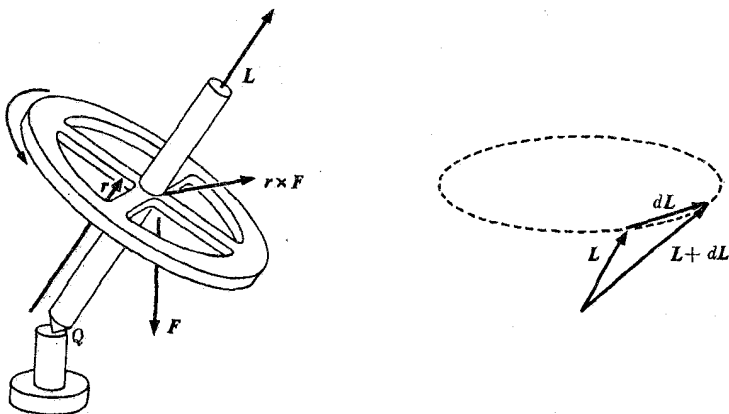
$$\sum_{k=1}^N (r_k - r_Q) \times F_k^i = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} [(r_k - r_Q) - (r_l - r_Q)] \times F_{l \rightarrow k}^i$$

$$= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} (r_k - r_l) \times F_{l \rightarrow k}^i. \quad (۴-۳۰)$$

بردار $(r_k - r_l)$ در امتداد خط واصل ذره l و k است. اگر $F_{l \rightarrow k}^i$ در امتداد این خط وارد شود، حاصل ضرب خارجی معادله (۴-۳۰) از بین می‌رود. لذا اگر قانون سوم نیوتن را به صورت «قوی» در نظر بگیریم، فرض (۴-۲۷) را می‌توانیم ثابت کنیم.

روش دیگر این است که اگر فرض کنیم نیروهای داخلی، در دوران مجازی کوچک حول هر محوری که از نقطه Q بگذرد هیچ‌گونه کار خالصی انجام نمی‌دهند، می‌توانیم نشان دهیم که مؤلفه گشتاور - نیروی داخلی کل در هر جهتی صفر است، و از اینجا معادله (۴-۲۷) را توجیه کنیم.

به عنوان کاربرد معادله (۴-۲۸)، عمل ژيروسکوپ با فرفره‌ای را در نظر می‌گیریم. ژيروسکوپ دستگاه صلبی از ذرات است که نسبت به یک محور متقارن است و حول آن دوران می‌کند. خواننده می‌تواند خود را متقاعد کند که وقتی ژيروسکوپ حول محور ثابتی دوران می‌کند، بردار اندازه حرکت زاویه‌ای آن حول یک نقطه Q واقع بر محور دوران چنانکه در شکل ۴-۱ نشان داده شده است، در امتداد محور است. تقارن جسم نسبت به محور، باعث می‌شود که اثر هر مؤلفه اندازه حرکت زاویه‌ای ذره k ، L_k که عمود بر محور است، با یک مؤلفه مساوی و مختلف‌الجهت ذره قرینه k نسبت به مرکز خنثی می‌گردد. نقطه Q را در محل اتکای ژيروسکوپ روی پایه خود اختیار می‌کنیم. اکنون اگر نیروی F بر روی محور ژيروسکوپ به سمت پایین وارد شود (مانند نیروی ثقل)، گشتاور ($r \times F$) ناشی از F چنانکه در شکل ۴-۱ نشان داده شده است، در امتداد عمود بر L خواهد بود. طبق معادله (۴-۲۸)، بردار در dL/dt در همان جهتی است که در شکل نشان داده شده است، و



شکل ۴-۱ حرکت یک ژيروسکوپ ساده.

بردار L متمایل است به این که تحت تأثیر نیروی F در اطراف شکل بر روی مخروطی، حرکتی تقدیمی انجام دهد. بردار L فقط هنگامی در امتداد محور ژيروسکوپ قرار می‌گیرد که ژيروسکوپ فقط حول همین محور دوران کند. اگر امتداد محور ژيروسکوپ خود نیز تغییر کند، این حرکت آخری نیز مؤلفه‌ای اضافی به اندازه حرکت زاویه‌ای اضافه خواهد کرد. اما اگر ژيروسکوپ به تندی بسیار بچرخد، مؤلفه اندازه حرکت زاویه‌ای در امتداد محورش از مؤلفه ناشی از حرکت محور بسیار بزرگتر خواهد بود، و امتداد L به امتداد محور ژيروسکوپ بسیار نزدیک خواهد شد. بنابراین محور ژيروسکوپ نیز باید حول محور قائم حرکت تقدیمی انجام دهد و نسبت به L در توازی بسیار باقی بماند. تجزیه و تحلیلی دقیق از مؤلفه‌های غیرمحوری L نشان می‌دهد که اگر محور ژيروسکوپ ابتدا در جهت معینی قرار گرفته و بعد رها شده باشد، ضمن حرکت تقدیمی حول محور قائم اندکی نیز به طرف بالا و پایین خواهد لنگید. این مطلب را در فصل ۱۱ نشان خواهیم داد. چنانکه گاه تأیید می‌شود، ژيروسکوپ «در برابر هیچ‌گونه تغییری در جهت چرخش خود مقاومت نمی‌کند»، زیرا میزان تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای ژيروسکوپ همیشه با گشتاور - نیروی وارد بر آن مساوی است، درست همان‌طور که میزان تغییر اندازه حرکت خطی همیشه با نیروی وارد بر آن مساوی است. می‌توان با اعمال گشتاور - نیروی مناسب، ژيروسکوپ را در هر جهت دلخواه چرخاند. اهمیت ژيروسکوپ به‌عنوان ثابت نگهدارنده امتداد، از این واقعیت ناشی می‌شود که وقتی هیچ‌گونه گشتاوری وارد نشود، اندازه حرکت زاویه‌ای یعنی بردار L ثابت باقی می‌ماند. تغییرات ایجاد شده در امتداد محور ژيروسکوپی که خوب ساخته شده است، کوچک است. زیرا گشتاورهای وارد کوچک و L بسیار بزرگ است. به‌طوری که یک dL کوچک نمی‌تواند تغییر قابل‌ملاحظه‌ای در امتداد یک ژيروسکوپ ایجاد کند. به‌علاوه، ژيروسکوپ فقط هنگامی تغییر امتداد می‌دهد که گشتاور نیرویی بر آن وارد شود. اگر ژيروسکوپ بر اثر گشتاور نیروهای اصطکاکی گاه‌گاهی کوچک وارد بر پایه‌هایش کمی جابه‌جا شود، وقتی گشتاور - نیرو حذف شود جابه‌جا شدن ژيروسکوپ نیز متوقف می‌گردد. اگر جرم بزرگ غیردواری مانند ژيروسکوپ سوار شده باشد، بر اثر گشتاور - نیروهای اصطکاکی فقط سرعت‌های زاویه‌ای کوچکی به دست می‌آورد، ولی همین که به‌وسیله گشتاور - نیروی کوچکی به حرکت درآید، به دوران خود ادامه خواهد داد و تغییر مکان آن ممکن است سرانجام بزرگ شود.

۴-۳ بقای انرژی

در حالات بسیاری، نیروی کل وارد بر ذرات دستگاهی از ذرات، فقط به مکان ذرات آن دستگاه بستگی دارد:

$$F_k = F_k(r_1, r_2, \dots, r_N), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (31-4)$$

به‌عنوان مثال، نیروی خارجی F_k^e ممکن است به مکان ذره k یعنی به r_k بستگی داشته باشد، و نیروی داخلی F_k^i ممکن است به مکان سایر ذرات نسبت به ذره k بستگی داشته باشد. ممکن است تابع پتانسیل $V(r_1, r_2, \dots, r_N)$ موجود باشد به‌طوری که

$$F_{kx} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial V}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial V}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (32-4)$$

می‌توان شرایطی را که باید توسط توابع نیرو $F_k(r_1, \dots, r_N)$ برقرار گردد، تا پتانسیل V موجود باشد، به دست آورد. همان‌طور که شرط (۳-۱۸۹) را برای یک ذره تنها به دست آوردیم. اما چون نتیجه تقریباً غیرقابل استفاده است و اهمیت عملی کمی دارد، از به دست آوردن آن در اینجا خودداری می‌کنیم. اگر انرژی پتانسیلی موجود باشد، می‌توان یک قضیه بقای انرژی به صورت زیر به دست آورد. طبق معادله (۴-۳۲)، معادلات حرکت k امین ذره عبارت است از:

$$m_k \frac{dv_{kx}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad m_k \frac{dv_{ky}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial y_k}, \quad m_k \frac{dv_{kz}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial z_k}. \quad (۴-۳۳)$$

اگر معادلات فوق را به ترتیب در v_{kx} ، v_{ky} و v_{kz} ضرب، و سپس با هم جمع کنیم، برای هر ذره k خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) + \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (۴-۳۴)$$

و اگر مجموع آن را برای کلیه مقادیر k حساب کنیم:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right) = 0. \quad (۴-۳۵)$$

عبارت دوم معادله (۴-۳۵) عبارت است از dV/dt :

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right), \quad (۴-۳۶)$$

و عبارت اول عبارت است از مشتق انرژی جنبشی کل نسبت به زمان

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2. \quad (۴-۳۷)$$

لذا معادله (۴-۳۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} (T + V) = 0. \quad (۴-۳۸)$$

بنابراین دوباره قضیه بقای انرژی نتیجه می‌شود:

$$T + V = E, \quad (۴-۳۹)$$

که در آن E ثابت است. اگر نیروهای داخلی را بتوانیم از یک تابع انرژی پتانسیل V به دست آوریم [مانند معادله (۴-۳۲)]، ولی نیروهای خارجی را نتوانیم از این راه پیدا کنیم، قضیه انرژی چنین خواهد بود:

$$\frac{d}{dt} (T + V) = \sum_{k=1}^N F_k^e \cdot v_k. \quad (۴-۴۰)$$

فرض کنید که نیروی خارجی وارد بر هر ذره k را بتوان به صورت مجموع نیروهای ناشی از سایر ذرات دانست، که در آن نیروی $F_{l \rightarrow k}^e$ وارد بر ذره k بر اثر ذره l فقط به مکان نسبی $(r_k - r_l)$ ذره k

نسبت به ذره l بستگی داشته باشد:

$$F_k^i = \sum_{l \neq k} F_{l \rightarrow k}^i(r_k - r_l). \quad (41-4)$$

ممکن است تابع برداری $F_{l \rightarrow k}^i(r_k - r_l)$ چنان باشد که بتوان تابع انرژی پتانسیلی را به صورت زیر تعریف کرد.

$$V_{kl}(r_{kl}) = - \int_{r_s}^{r_{kl}} F_{l \rightarrow k}^i(r_{kl}) \cdot dr_{kl}, \quad (42-4)$$

که در آن:

$$r_{kl} = r_k - r_l. \quad (43-4)$$

معادله (۴۲-۴) هنگامی صحیح است که نیروی $F_{l \rightarrow k}^i$ به معنی فصل ۳ کنسرواتيو باشد، به عبارت دیگر، زمانی که رابطه زیر برقرار باشد،

$$\text{curl } F_{l \rightarrow k}^i = 0, \quad (44-4)$$

که در آن مشتقها نسبت به x_{kl} ، y_{kl} و z_{kl} اند. نیروهای ثقل و الکترواستاتیکی بین جفتهای ذرات نمونه‌هایی از نیروهای کنسرواتيو هستند. اگر نیروی $F_{l \rightarrow k}^i$ کنسرواتيو باشد. به طوری که تابع V_{kl} معین باشد، در این صورت^۱

$$F_{l \rightarrow k}^i = -\hat{x} \frac{\partial V_{kl}}{\partial x_{kl}} - \hat{y} \frac{\partial V_{kl}}{\partial y_{kl}} - \hat{z} \frac{\partial V_{kl}}{\partial z_{kl}} = -\hat{x} \frac{\partial V_{kl}}{\partial x_k} - \hat{y} \frac{\partial V_{kl}}{\partial y_k} - \hat{z} \frac{\partial V_{kl}}{\partial z_k}. \quad (45-4)$$

اگر قانون سوم نیوتن (به صورت ضعیف) برقرار باشد، در این صورت:

$$F_{k \rightarrow l}^i = -F_{l \rightarrow k}^i = \hat{x} \frac{\partial V_{kl}}{\partial x_{kl}} + \hat{y} \frac{\partial V_{kl}}{\partial y_{kl}} + \hat{z} \frac{\partial V_{kl}}{\partial z_{kl}} = -\hat{x} \frac{\partial V_{kl}}{\partial x_l} - \hat{y} \frac{\partial V_{kl}}{\partial y_l} - \hat{z} \frac{\partial V_{kl}}{\partial z_l}. \quad (46-4)$$

بنابراین V_{kl} به صورت تابع انرژی پتانسیل برای نیروی $F_{k \rightarrow l}^i$ نیز به کار خواهد رفت. اکنون می‌توان انرژی پتانسیل داخلی کل V^i دستگاه ذرات را به صورت جمع توابع پتانسیل برای کلیه زوجهای ذرات دانست:

$$V^i(r_1, \dots, r_N) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} V_{kl}(r_k - r_l). \quad (47-4)$$

از معادلات (۴۱-۴)، (۴۵-۴) و (۴۶-۴) نتیجه می‌گردد که نیروهای داخلی به وسیله روابط زیر داده می‌شوند:

$$F_k^i = -\hat{x} \frac{\partial V^i}{\partial x_k} - \hat{y} \frac{\partial V^i}{\partial y_k} - \hat{z} \frac{\partial V^i}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (48-4)$$

۱. توجه کنید که: $V(r_{kl}) = V(x_{kl}, y_{kl}, z_{kl}) = V(x_k - x_l, y_k - y_l, z_k - z_l)$ به طوری که: $\partial V / \partial x_k = \partial V / \partial x_{kl} = -\partial V / \partial x_l$ و غیره.

به خصوص اگر نیروهای بین زوجهای ذرات، مرکزی باشند، انرژی پتانسیل $V_{kl}(r_{kl})$ برای هر جفت ذره فقط به فاصله r_{kl} بین آنها بستگی خواهد داشت، و به وسیله معادله (۳-۲۰۰) داده می شود، در این صورت نیروهای داخلی دستگاه کنسرواتیونند، و معادله (۴-۴۸) برقرار است. قضیه انرژی (۴-۴۰) برای چنین دستگاهی از ذرات معتبر خواهد بود. اگر نیروهای خارجی نیز کنسرواتیو باشند، انرژی پتانسیل آنها را می توان به V^2 اضافه کرد، و انرژی کل ثابت است.

اگر اصطکاک داخلی موجود باشد (همان طور که اغلب چنین است) نیروهای اصطکاک داخلی به سرعتهای نسبی ذرات بستگی خواهند داشت، و قانون بقای مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل دیگر معتبر نخواهد بود.

۴-۴ نقد قوانین بقا

می توان پدیده هایی را که قوانین مکانیکی در مورد آنها به کار برده شده اند، به سه دسته اصلی تقسیم کرد. حرکات اجسام سماوی (ستاره ها، ماهواره ها، و سیارات) با دقت بی نهایت بسیار به وسیله قوانین مکانیک کلاسیک توصیف می شوند. در همین زمینه بود که نظریه مکانیک کلاسیک بسیاری از موفقیت های مهم اولیه خود را به دست آورد. حرکت اجسام در منظومه شمسی را می توان برای چندین هزار سال با دقت بسیار پیش بینی کرد. نظریه نسبیت، از چند مورد انحراف مختصر از آنچه به طور کلاسیک پیش بینی شده است، حکایت می کند، ولی این انحرافات آنقدر کوچک اند که نمی توان آنها را مشاهده کرد، بجز در مورد مدار تیر که نظریه نسبیت و رصد های انجام شده به اتفاق، حرکت تقدیمی کند محور مدار بیضی شکل سیاره را به دور خورشید با سرعت زاویه ای $0/01$ درجه در قرن نشان می دهند.

حرکت اجسام زمینی به اندازه های خرد و کلان، دومین دسته اصلی پدیده ها را تشکیل می دهد. حرکات این دسته از پدیده ها، به درستی به وسیله مکانیک نیوتنی، بی هیچ گونه اصلاح قابل ملاحظه ای، توصیف می شوند، ولی قوانین نیرو معمولاً بسیار پیچیده اند، و اغلب به طور دقیق شناخته شده نیستند، به طوری که محاسبات دقیق موفق مکانیک سماوی را نمی توان در اینجا تکرار کرد.

سومین دسته از پدیده ها، حرکت ذرات «اتمی» مثل ملکولها، اتمها، الکترونها، هسته ها، پروتونها، نوترونها و غیره اند. کوششهای اولیه برای توصیف حرکت این ذرات بر اساس مکانیک کلاسیک بود، و پدیده های بسیاری از این دسته را می توان بر این پایه درک و پیش بینی کرد. مع هذا، جزئیات دقیق رفتار ذرات اتمی را فقط می توان بر حسب مکانیک کوانتم به درستی توصیف کرد، و برای سرعت های زیاد، مکانیک کوانتم نسبیتی را باید به کار برد. می توان دسته چهارمی به این پدیده ها اضافه کرد، که مربوط به ساختمان داخلی ذرات بنیادی (پروتونها، نوترونها، الکترونها، و غیره) است. حتی مکانیک کوانتم از توصیف چنین پدیده هایی به درستی عاجز است و امروز کوشش فیزیکدانها بر آن است که نظریه جدیدی برای توصیف این دسته از پدیده ها، به وجود آورند.

قانون بقای اندازه حرکت خطی برای دستگاههایی از اجسام سماوی و نیز اجسام خرد و کلان برقرار است. نیروهای ثقلی و مکانیکی بین چنین اجسامی لااقل با دقت بسیار زیاد تابع قانون سوم نیوتن اند. اندازه حرکت خطی نیز در بیشتر برهم کنشهای ذرات اتمی ثابت است، مگر هنگامی که

سرعت‌های زیاد یا شتاب‌های تندی در کار باشند. نیروهای الکترواستاتیکی بین ذرات باردار ساکن، تابع قانون سوم نیوتن‌اند، ولی وقتی ذرات در حرکت باشند، میدان‌های الکتریکی آنها با سرعت نور انتشار می‌یابد، به طوری که اگر دو ذره باردار نسبت به یکدیگر به تندی حرکت کنند، نیروهای بین آنها در هر لحظه، ممکن است کاملاً مساوی و مختلف‌الجهت نباشند. اگر الکترون سریعی از کنار پروتون ساکنی بگذرد، پروتون همواره الکترون را کمی عقب‌تر از مکان واقعی آن در هر لحظه «می‌بیند» و نیروی وارد بر پروتون نه به وسیله مکان الکترون، بلکه به وسیله مکان لحظه‌ای قبل آن تعیین می‌شود. وقتی بارهای الکتریکی شتاب می‌گیرند، تشعشع الکترومغناطیسی از خود صادر می‌کنند، و در نتیجه از اندازه حرکتشان کاسته می‌شود. اینجا درمی‌یابیم که قانون بقای اندازه حرکت در این حالات نیز ممکن است معتبر باشد اما فقط در صورتی که اندازه حرکت را به میدان الکترومغناطیسی و ذرات متحرک هر دو نسبت دهیم. چنین تعریف مجددی از اندازه حرکت، خارج از حدود اولیه مکانیک نیوتنی است.

بدیهی است که اجسام سماوی و اجسام خرد و کلان، در واقع ذره نیستند، زیرا ساختمانی دارند که برای بسیاری از مقاصد، فقط به وسیله سه مختصه مکانی (x, y, z) به قدر کافی مشخص نمی‌شوند. با این حال حرکتشان در مسائلی که بتوان از ساختمان آنها چشم پوشید، به وسیله قانون حرکت یک تک‌ذره، به درستی بیان می‌شود.

$$m\ddot{r} = F. \quad (4-49)$$

این مطلب اغلب از این طریق موجه است که جسم کلان، را به صورت دستگاهی از ذرات کوچکتری که تابع قانون سوم نیوتن‌اند در نظر بگیریم. برای چنین دستگاهی، قضیه اندازه حرکت خطی برقرار است، و می‌توان آن را به صورت معادله $(4-49)$ که با معادله $(4-49)$ هم‌شکل است نوشت. این روش بسیار مناسبی برای توجیه کاربرد معادله $(4-49)$ برای اجسام کلان یا نجومی است. به شرط آنکه آگاهی ما در اثر این که این مطلب بنا به اندیشه‌های نوبی معنی است، مغشوش نگردد. اگر ذرات یک جسم بزرگتر را به صورت اتمها و ملکولها در نظر بگیریم، در این صورت اولاً قانون سوم نیوتن به هیچ روی برای چنین ذراتی معتبر نیست، و دوم آن که برای حرکت آنها باید مکانیک کوانتم و نه مکانیک کلاسیک را به کار برد. قضیه اندازه حرکت $(4-49)$ را می‌توان با استفاده از قوانین الکترودینامیک و مکانیک کوانتم، برای اجسامی که از اتم ساخته شده‌اند، به دست آورد، ولی این کار از حدود مکانیک نیوتنی خارج است. بنابراین، فعلاً قانون حرکت $(4-49)$ را چنانکه در مورد اجسام نجومی و کلان به کار بردیم باید خود به صورت یک اصل موضوع بنیادی دانست که توجیه‌اش براساس تجربه و یا نتایج نظریه‌های عمیق‌تر استوار است. قضایایی که در بخش ۴-۱ ثابت شد نشان می‌دهد که این اصل به نظریه مکانیکی سازگاری به این معنی منجر می‌گردد که اگر از اجسامی که تابع این اصل‌اند جسم مرکبی بسازیم، آن جسم مرکب نیز از این اصل تبعیت خواهد کرد.

قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای که در بخش ۴-۲ برای دستگاهی از ذرات بیان شد، برای دستگاه‌های اجسام سماوی (که ذره فرض می‌شوند) و برای دستگاههایی از اجسام کلان، هرگاه اثرات ناشی از حرکت دورانی یک‌یک آنها قابل اغماض باشد، معتبر است، وقتی دوران یک‌یک اجسام، در حرکت منظور می‌شود، قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای هنوز برقرار است، به شرط آن که

اندازه حرکت زاویه‌ای مربوط به چنین دورانها را نیز در نظر بگیریم. اجسام، در این صورت دیگر به صورت ذرات ساده‌ای نیستند که در بخشهای پیشین بررسی کردیم و حرکاتشان به سادگی با مشخص کردن تابع $r(t)$ برای تمام ذرات به طور کامل توصیف می‌شود. اندازه حرکت زاویه‌ای کل منظومه شمسی، حتی اگر خورشید و سیارات، و ماهواره‌ها را بتوان به صورت ذرات ساده‌ای دانست که دورانشان قابل اغماض باشد، تقریباً ثابت است. لکن نیروهای جذر و مد، مقداری از اندازه‌های حرکت زاویه‌ای دورانی را به اندازه حرکت زاویه‌ای مداری سیارات و ماهواره‌ها تبدیل می‌کنند. لذا باید اندازه حرکت زاویه‌ای دورانی را نیز در نظر گرفت تا قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای به طور دقیق برقرار باشد، تغییراتی در اندازه حرکت زاویه‌ای رخ می‌دهد که ناشی از اصطکاک با غبار و سنگهای بین سیارات است، ولی اثر آن بسیار ناچیز است و در همه حال ممکن است به وسیله اضافه کردن اندازه حرکت زاویه‌ای ماده بین سیارات به مجموع کل، در نظر گرفته شود.

قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای کل، از جمله دوران اجسام سماوی و زمینی را می‌توان با در نظر گرفتن هریک از اجسام به صورت دستگاهی از ذرات کوچکتر که نیروهای متقابل آنها از قانون سوم نیوتن (به صورت «قوی») تبعیت می‌کنند، توجیه کرد. در این صورت قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای کل و اندازه حرکت زاویه‌ای دورانی یک جسم که به صورت اندازه حرکت زاویه‌ای مداری معمولی ($r \times p$) ذرات آن ظاهر می‌شود، از استدلال بخش ۴-۲ نتیجه می‌گردند. انتقاد فوق در مورد اندازه حرکت خطی، بر این استدلال نیز وارد است. اگر «ذرات» ترکیب‌کننده جسمی، اتمها و ملکولها باشند، در این صورت قانون سوم نیوتن، به‌ویژه به صورت قوی، همیشه برقرار نیست. از این گذشته قوانین مکانیک کوانتم بر چنین ذراتی حاکم‌اند، به‌علاوه اتمها و ملکولها دارای اندازه حرکت زاویه‌ای دورانی‌اند که باید منظور گردد. حتی ذرات بنیادی (الکترونها، پروتونها، نوترونها، و غیره) دارای اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی‌اند که مربوط به حرکت مداری آنها نیست و به علت تشابه آن با اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی دوران اجسام کلان، آن را اندازه حرکت زاویه‌ای اسپین می‌گویند و باید منظور گردد تا قانون بقا بر مجموع حاکم باشد. به این ترتیب ما هرگز به ذره ساده و آرمانی مکانیک نیوتنی، که آن را بتوان فقط با بردار مکانیش $r(t)$ توصیف کرد، نمی‌رسیم. لذا ناچاریم قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای را به صورت اصلی مسلم قبول کنیم، یا برای توجیه آن به نظریه‌هایی که از مکانیک کلاسیک تجاوز می‌کند، متوسل شویم.

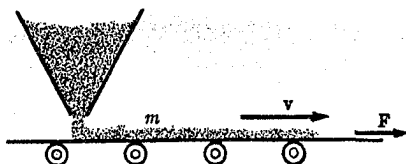
نیروهای ثقل بین اجسام نجومی، کنسرواتیوند، به طوری که اصل بقای انرژی مکانیکی با دقت بسیار در نجوم برقرار است. در اصل اصطکاک گردوغبار و سنگهای بین سیاره‌ای، انرژی مکانیکی منظومه شمسی را به اندازه بسیار ناچیزی تلف می‌کنند، ولی تأثیر آن کوچکتر از آن است که حتی با وجود دقت بسیاری که برای مشاهده و پیش‌بینی وقایع نجومی به کار می‌رود، اثرات قابل مشاهده‌ای در حرکت سیارات، به وجود آورد. همچنین بر اثر اصطکاک جذرومدی، انرژی دورانی سیارات و ماهواره‌ها به تدریج ولی به اندازه قابل محاسبه‌ای، تلف می‌شود. اصطکاک معمولاً برای اجسام زمینی خرد یا کلان نقش مهمی بازی می‌کند و فقط در برخی حالات خاص که اصطکاک قابل اغماض است، می‌توان از اصل بقای انرژی به صورت معادله (۴-۳۹) یا حتی (۴-۴۰) استفاده کرد. اما ژول نشان داد که می‌توان انرژی را طوری به گرما نسبت داد که قانون بقای انرژی یک دستگاه

از اجسام همچنان در مورد مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل و گرما به کار رود. اگر جسم را متشکل از اتمها و ملکولها بدانیم، انرژی گرمایی آن همان انرژی پتانسیل و جنبشی حرکت نامنظم اتمها و ملکولهای آن خواهد بود. نیروهای الکترومغناطیسی وارد بر ذرات باردار متحرک، کنسرواتيو نیستند و باید یک انرژی الکترومغناطیسی به میدان الکترومغناطیسی نسبت دهیم تا قانون بقای انرژی به اعتبار خود باقی بماند. البته این گسترش مفهوم انرژی چنانکه گرما و انرژی الکترومغناطیسی را نیز دربرگیرد، خارج از قلمرو مکانیک است. وقتی تعریف انرژی طوری گسترش یابد تا نه تنها انرژی جنبشی، بلکه انرژی وابسته به میدانهای الکترومغناطیسی یا هر میدان نیروی دیگر را شامل شود، در این صورت یک قانون بقای انرژی، به طور کلی در فیزیک کلاسیک، نسبت و کوانتم برقرار خواهد بود.

قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت، و اندازه حرکت زاویه‌ای، سنگ بنای فیزیک امروزند، زیرا در تمام نظریه‌های فیزیکی به طور کلی معتبرند. در حال حاضر، کوشش در اثبات آنها برای اجسام مادی در چهارچوب مکانیک کلاسیک، از طریق توسل به تصویر قدیمی که ماده در آن ذرات نیوتنی ساده‌ای بود که نیروهای مرکزی برهم وارد می‌کردند، تمرینی بیهوده است. قوانین بقا به تعبیری، اصلاً قانون نیستند، بلکه اصولی موضوعی‌اند که ما اصرار داریم در همه نظریات فیزیکی معتبر باشند. به عنوان مثال، اگر برای ذرات باردار متحرک در یافتیم که انرژی کل $(T + V)$ ثابت نیست، قانون را رها نمی‌کنیم، بلکه معنی آن را از طریق اصلاح تعریف انرژی چنان تغییر می‌دهیم که شامل انرژی الکترومغناطیسی نیز بشود و اعتبار قانون حفظ گردد. ما غالباً ترجیح می‌دهیم در جستجوی کمیت‌هایی باشیم که باقی می‌مانند و نامهای «انرژی کل»، «اندازه حرکت کل»، و «اندازه حرکت زاویه‌ای کل» را برای آنها می‌پذیریم. در این صورت بقای چنین کمیت‌هایی واقعیتی فیزیکی نیست، بلکه نتیجه تصمیم ما است به این که آنها را بدین طریق تعریف کنیم. البته این بیان واقعیتی فیزیکی است (که ممکن است درست یا غلط باشد) که حکم کنیم چنین تعاریفی برای انرژی، اندازه حرکت، و اندازه حرکت زاویه‌ای همواره پیدا می‌شود. این حکم تاکنون درست بوده است، و در آخر بخش ۹-۶ توجیه عمیق‌تری برای آن ارائه خواهیم داد.

۴-۵ تسمه‌های انتقال، موشکها، و سیارات

مسائل بسیاری را می‌توان به وسیله کاربردهای مناسب قوانین بقای اندازه حرکت خطی، اندازه حرکت زاویه‌ای، و انرژی حل کرد. برای حل چنین مسائلی، لازم است تمیز دهیم که کدام یک از قوانین بقا مناسب است. قوانین بقای اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای و یا در واقع قضایای (۴-۷) و (۴-۲۸) را که فرع آنها هستند همواره می‌توان برای هر دستگاه فیزیکی به کار برد مشروط بر آن که تمام نیروهای خارجی و گشتاور - نیروهای وارد بر آن دستگاه را در نظر بگیریم. وقتی گشتاور - نیروها یا نیروهای خارجی معلوم باشند، به کار بردن هر یک از آنها مناسب است. قانون بقای مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل را تنها زمانی می‌توان به کار برد که هیچ‌گونه تبدیل انرژی مکانیکی به صورتهای دیگر انرژی انجام نشود. به عنوان مثال، وقتی اصطکاک موجود است، نمی‌توان از قانون بقای انرژی استفاده کرد، مگر آن که روشی برای تعیین مقدار انرژی گرمایی تولید شده، وجود داشته باشد.



شکل ۴-۲ تسمه انتقال.

قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای همیشه برای دستگاه ثابت معینی از ذرات صادق است. به هنگام کاربرد قوانین بقا باید با دقت تشخیص داد که دستگاهی که این قوانین برای آن به کار می‌روند، شامل چه مقدار انرژی و اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای است و در هنگام نوشتن معادلات تمام انرژی و اندازه حرکت دستگاه را منظور کرد. می‌توان دستگاه را به‌طور دلخواه اختیار کرد، و هر مقدار از ذرات را که لازم باشد به آن داخل یا از آن خارج کرد. ولی هرگاه نیروهایی از خارج به ذرات داخل دستگاه وارد شوند باید آنها را به حساب آورد.

یکی از مسائل نمونه‌ای که قانون بقای اندازه حرکت خطی را می‌توان برای آنها به کار برد، مسئله تسمه انتقال است. ماده پیوسته از داخل قیفی بر تسمه متحرکی ریخته می‌شود، خواسته می‌شود که نیروی F لازم برای آن که تسمه با سرعت ثابت v به حرکت خود ادامه دهد، پیدا کنیم، (شکل ۴-۲). فرض کنید میزان ریزش ماده بر روی تسمه بر حسب زمان، dm/dt باشد. اگر m جرم ماده روی تسمه، و M جرم تسمه (که در واقع در مسئله هم ظاهر نمی‌شود) باشد، اندازه حرکت کل دستگاه، یعنی اندازه حرکت تسمه به‌علاوه ماده روی آن و ماده داخل قیف، عبارت است از:

$$P = (m + M)v. \quad (50-4)$$

فرض می‌کنیم که قیف ساکن باشد، در غیر این صورت اندازه حرکت قیف و ماده داخل آن را هم باید در معادله فوق منظور کرد. بنا به قضیه اندازه حرکت خطی،

$$F = \frac{dP}{dt} = v \frac{dm}{dt}. \quad (51-4)$$

نیروی وارد بر تسمه از معادله فوق، حاصل می‌شود. توان تولید شده به وسیله نیروی فوق عبارت است از

$$Fv = v^2 \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(mv^2) = \frac{d}{dt}[(m + M)v^2]. \quad (52-4)$$

توان فوق دو برابر میزان افزایش انرژی جنبشی است، به طوری که قانون بقای مکانیکی (۴-۴۰) در اینجا صادق نیست. نصف اضافی توان چه می‌شود؟

معادله حرکت یک موشک را می‌توان از قانون بقای اندازه حرکت به دست آورد. فرض کنید که جرم موشک در هر لحظه معین، M و سرعت آن نسبت به دستگاه مختصات ثابتی، v باشد. اگر ماده از موتور موشک با سرعت خروجی u ، نسبت به موشک خارج شود، در این صورت سرعت خروجی آن نسبت به دستگاه مختصات ثابت، عبارت خواهد بود از $v + u$. اگر نیروی خارجی F

نیز بر موشک وارد شود، در این صورت قضیه اندازه حرکت خطی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt}(Mv) - \frac{dM}{dt}(v+u) = F. \quad (53-4)$$

عبارت اول معادله فوق، میزان تغییر اندازه حرکت موشک نسبت به زمان است و عبارت دوم، نمایشگر میزان تغییر اندازه حرکت مواد خارج شونده از موشک است، که در آن $(dM/dt) -$ میزان ماده خارج شونده موشک نسبت به زمان است. قانون بقا در مورد دستگاه ثابت و معینی از ذرات صادق است. اگر توجه خود را در هر لحظه، به موشک معطوف کنیم، باید به خاطر داشته باشیم که در یک لحظه dt بعدی، دستگاه شامل موشک و مواد خارج شده از آن در این فاصله زمانی است، و به هنگام محاسبه تغییر اندازه حرکت، باید هر دو قسمت را به حساب آورد. معادله فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$M \frac{dv}{dt} = u \frac{dM}{dt} + F. \quad (54-4)$$

عبارت اول طرف راست را پیشران موتور موشک می نامند. چون dM/dt منفی است، جهت پیشران مخالف جهت سرعت خروجی است. نیروی F ممکن است نمایشگر مقاومت هوا، یا نیروی ثقل یا هر نیرویی باشد که بر موشک وارد می شود.

نخست حالتی را در نظر می گیریم که موتور موشکی بر تکیه گاه ثابتی محکم بسته شده است. از این رو سمت چپ معادله $(54-4)$ صفر است و نیروی F که تکیه گاه وارد می کند عبارت است از:

$$F = -u \frac{dM}{dt}.$$

برای اندازه گیری پیشران موتور موشک نیروی F لازم برای ثابت ماندن موتور را اندازه می گیریم. اکنون معادله $(54-4)$ را برای حالت خاصی که نیروی خارجی صفر است، حل می کنیم:

$$M \frac{dv}{dt} = u \frac{dM}{dt}. \quad (55-4)$$

معادله فوق را در dt/M ضرب می کنیم و سپس از آن انتگرال می گیریم. با فرض آن که سرعت u ثابت است، خواهیم داشت:

$$v - v_0 = -u \ln \frac{M_0}{M}. \quad (56-4)$$

تغییر سرعت در هر فاصله زمانی فقط به سرعت موشک و جرم ماده خارج شونده در این فاصله زمانی، بستگی دارد. این نتیجه از هرگونه فرض در باره میزان خارج شدن جرم از موشک مستقل است.

مسائل بسیاری در نجوم پیش می آیند که استفاده از قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای در حل آنها مفید است. اگر ماده ای از دستگاه کهکشانی از ستاره ها یا منظومه شمسی خارج نشود، اندازه حرکت زاویه ای آنها ثابت باقی خواهد ماند. تأثیر جذر و مدهای ماه این است که دوران زمین را به آهستگی کند می کند. با کاهش اندازه حرکت زاویه ای زمین، اندازه حرکت زاویه ای ماه باید زیاد شود.

قدرمطلق اندازه حرکت زاویه‌ای (مداری) ماه عبارت است از:

$$L = mr^2\omega, \quad (۵۷-۴)$$

که در آن m ، ω ، و r به ترتیب جرم، سرعت زاویه‌ای، و شعاع مدار ماه‌اند. می‌توان حاصل ضرب جرم در شتاب رو به مرکز را مساوی نیروی ثقل قرار داد و رابطه زیر را به دست آورد:

$$mr\omega^2 = \frac{GMm}{r^2}, \quad (۵۸-۴)$$

که در آن M جرم زمین است. اگر ω را از معادله فوق به دست آوریم و در معادله (۵۷-۴) جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$L = (GMm^2r)^{1/2}. \quad (۵۹-۴)$$

در نتیجه، با افزایش اندازه حرکت زاویه‌ای ماه، فاصله آن از زمین بیشتر می‌شود. (در محاسبه میزان عقب‌نشینی ماه نسبت به زمین، از طریق مساوی گذاشتن تغییر L با تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای دورانی زمین، لازم است معین کنیم که چه مقدار از کاهش دوران زمین ناشی از جذرومد ماه و چه مقدار در اثر خورشید است. مجموع اندازه حرکت زاویه‌ای ماه و زمین به علت وجود اصطکاک جذرومدی خورشید ثابت نیست. اگر از تأثیر بسیار ناچیز جذرومد خورشید در اثر زمین صرف‌نظر کنیم، اندازه حرکت زاویه‌ای کل دستگاه ماه-زمین حول خورشید تقریباً ثابت است.)

۶-۴ مسائل برخورد

بسیاری از سؤالات مربوط به برخورد ذرات را می‌توان با استفاده از قوانین بقا جواب داد. از آنجا که قوانین بقا در مکانیک کوانتم نیز معتبر است،^۱ نتایجی که از استعمال آنها به دست می‌آید، در مورد ذراتی با اندازه‌های اتمی و زیراتمی و کلان نیز معتبر است. در بیشتر مسائل برخورد، ذرات برخوردکننده با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، و مدتی قبل از برخورد و بعد از آن، تحت تأثیر هیچ‌گونه نیرویی قرار نمی‌گیرند، در حالی که به هنگام برخورد، تحت تأثیر نیروهایی اند که بر یکدیگر وارد می‌کنند. اگر نیروهای متقابل به هنگام برخورد، تابع قانون سوم نیوتن باشند، در این صورت اندازه حرکت خطی کل ذرات قبل از برخورد و بعد از آن برابر خواهد بود. اگر قانون سوم نیوتن به صورت دقیقش معتبر باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای کل نیز ثابت خواهد بود. اگر نیروها کنسرواتیو باشند، انرژی جنبشی ثابت خواهد بود (زیرا انرژی پتانسیل قبل و بعد از برخورد یکسان است). در هر حال، اگر تمام انرژی و اندازه حرکت، و اندازه حرکت زاویه‌ای از جمله آنچه را با تمام تشعشعات صادر شده از دستگاه و تمام انرژی‌هایی که از صورت جنبشی به صورتهای دیگر و به عکس تبدیل می‌شوند همراه است در نظر بگیریم، قوانین بقا همیشه معتبر خواهند بود.

۱. به صفحه ۱۱۵ کتاب زیر مراجعه کنید:

ابتدا برخوردی بین دو ذره ۱ و ۲ را، که می‌دانیم انرژی جنبشی کل و اندازه حرکت خطی در آن بقا دارند، در نظر می‌گیریم. چنین برخوردی را الاستیک (کشور) می‌گویند. اگر دو ذره را با اندیسه‌های ۱ و ۲ و مقادیر انرژی جنبشی و اندازه‌های حرکت قبل و بعد از برخورد را به ترتیب با اندیسه‌های I و F نمایش دهیم، طبق قوانین بقا خواهیم داشت:

$$P_{1I} + P_{2I} = P_{1F} + P_{2F} \quad (۴-۶۰)$$

$$T_{1I} + T_{2I} = T_{1F} + T_{2F} \quad (۴-۶۱)$$

معادله (۴-۶۱) را می‌توان بر حسب جرم اندازه‌های حرکت ذرات بازنویسی کرد:

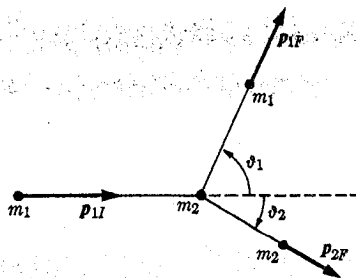
$$\frac{P_{1I}}{2m_1} + \frac{P_{2I}}{2m_2} = \frac{P_{1F}}{2m_1} + \frac{P_{2F}}{2m_2} \quad (۴-۶۲)$$

برای مشخص کردن هر بردار اندازه حرکت p ، باید سه کمیت را مشخص کرد که ممکن است سه مؤلفه آن در امتداد سه محور هر دستگاه دلخواه، و یا قدر مطلق و جهت آن باشند، (کمیت آخری به احتمال به وسیله زوایای کروی φ و θ مشخص می‌شود). بنابراین معادلات (۴-۶۰) و (۴-۶۲) نمایشگر چهار معادله‌اند که شامل نسبت دو جرم و دوازده کمیت لازم برای تعیین اندازه‌های حرکت مربوط به آنها هستند. اگر نه عدد از این کمیتها معلوم باشند، چهار کمیت دیگر را می‌توان از این معادلات به دست آورد. در یک حالت نمونه، ممکن است اجرام و اندازه‌های حرکت اولیه دو ذره و جهت حرکت نهایی یکی از ذرات، مثلاً ذره ۱، داده شده باشد. در این صورت می‌توان اندازه حرکت نهایی ذره ۲، و قدر مطلق اندازه حرکت نهایی p_{1F} (یا انرژی) ذره ۱ را به دست آورد. در حالات مهم بسیاری، جرم یکی از ذرات مجهول است و اگر اندازه‌های حرکت و انرژیها قبل و بعد از برخورد را به قدر کافی بدانیم، جرم ذره مجهول را می‌توانیم از معادلات (۴-۶۰) و (۴-۶۲) به دست آوریم. توجه داشته باشید که دانستن شرایط اولیه به تنهایی برای تعیین نتیجه برخورد از معادلات (۴-۶۰) و (۴-۶۲) کافی نیست. باید چیزی در باره حرکت بعد از برخورد نیز بدانیم. اگر می‌توانستیم معادلات حرکت دستگاه را حل کنیم، شرایط اولیه به تنهایی نتایج برخورد را تعیین می‌کردند.

برخورد ذره‌ای به جرم m_1 و اندازه حرکت p_{1I} با ذره ساکنی به جرم m_2 را در نظر بگیرید. این حالتی معمولی است. (در واقع عمومیت مسئله به هیچ روی کاهش نیافته است، زیرا همان‌طور که در بخش ۱-۴ ذکر کردیم و در بخش ۷-۱ نیز نشان خواهیم داد، اگر m_2 از ابتدا با سرعت یکنواختی حرکت کند، قوانین نیوتن را می‌توان در دستگاههای متحرکی نیز با سرعت یکنواخت v_{2I} که در آن m_2 در ابتدا ساکن است، به کار برد). فرض کنید که m_1 تحت زاویه ϑ_1 «پراکنده» باشد. به عبارت دیگر فرض کنید ϑ_1 زاویه بین مسیر حرکت اولیه و مسیر نهایی ذره m_1 باشد، (شکل ۴-۳). اندازه حرکت p_{1F} باید در همان صفحه p_{1I} و p_{1F} قرار گیرد، زیرا قبل از برخورد هیچ مؤلفه اندازه حرکت عمود بر این صفحه وجود ندارد، و بعد از برخورد نیز نباید وجود داشته باشد. فرض کنید p_{2F} با جهت p_{1I} زاویه ϑ_2 تشکیل دهد. معادله (۴-۶۰) را بر حسب مؤلفه‌های آن در امتداد و عمود بر p_{1I} می‌نویسیم:

$$p_{1I} = p_{1F} \cos \vartheta_1 + p_{2F} \cos \vartheta_2, \quad (۴-۶۳)$$

$$0 = p_{1F} \sin \vartheta_1 - p_{2F} \sin \vartheta_2. \quad (۴-۶۴)$$



شکل ۳-۴ برخورد ذره m_1 با ذره ساکن m_2 .

در این حال، معادله (۶۲-۴) چنین می شود:

$$\frac{p_{1I}^2 - p_{1F}^2}{m_1} = \frac{p_{2F}^2}{m_2} \quad (۶۵-۴)$$

اگر دو تا از کمیت‌های

$$(p_{1F}/p_{1I}, p_{2F}/p_{1I}, \vartheta_1, \vartheta_2, m_1/m_2)$$

معلوم باشد، سه کمیت باقیمانده را می توان به دست آورد. به عنوان مثال اگر جرم ذرات و اندازه حرکت اولیه p_{1I} و زاویه ϑ_1 معلوم باشد، می توان p_{1F} ، p_{2F} و ϑ_2 را به این طریق به دست آورد. اگر عبارت اول طرف راست را به طرف چپ معادلات (۶۳-۴) و (۶۴-۴) منتقل و سپس آن را مجذور و با هم جمع کنیم، ϑ_2 را می توان حذف کرد:

$$p_{1I}^2 + p_{2F}^2 - 2p_{1I}p_{1F} \cos \vartheta_1 = p_{1F}^2 \quad (۶۶-۴)$$

با قرار دادن این عبارت در معادله (۶۵-۴)، می توان p_{1F} را به دست آورد:

$$\frac{p_{1F}}{p_{1I}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \vartheta_1 \pm \left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cos^2 \vartheta_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right]^{1/2} \quad (۶۷-۴)$$

اکنون می توان p_{2F} را از معادله (۶۶-۴) و ϑ_2 را از معادله (۶۳-۴) به دست آورد. اگر $m_1 > m_2$ باشد، کمیت زیر رادیکال برای زاویه $\vartheta_m = \vartheta_1$ صفر خواهد بود، که در آن معادله زیر حاصل می شود:

$$\cos^2 \vartheta_m = 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}; \quad 0 \leq \vartheta_m \leq \frac{\pi}{2} \quad (۶۸-۴)$$

اگر $\vartheta_1 > \vartheta_m$ باشد (و $\vartheta_1 \leq \pi$ باشد)، در این صورت p_{1F}/p_{1I} مجازی یا منفی خواهد بود، که هیچ یک از نظر فیزیکی مجاز نیست، لذا ϑ_m نمایشگر بزرگترین زاویه ای است که m_1 ممکن است تحت آن پراکنده شود. اگر $m_1 \gg m_2$ باشد، چنانکه به تجربه می دانیم، این زاویه بسیار کوچک خواهد بود، اگر $\vartheta_m < \vartheta_1$ ، دو مقدار برای p_{1F}/p_{1I} وجود خواهد داشت، مقدار بزرگتر به برخوردی کناری، حال آن که مقدار کوچکتر به برخوردی نزدیک تر به رویاروی مربوط می شود. زاویه ϑ_2 برای این دو حالت متفاوت خواهد بود. حالت $\vartheta_1 = 0$ ممکن است یا نمایشگر عدم برخورد

$(p_{1F} = p_{1I})$ و یا نمایشگر برخوردی رویاروی باشد. در حالت دوم،

$$\frac{p_{1F}}{p_{1I}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vartheta_2 = 0, \quad \frac{p_{2F}}{p_{1I}} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}. \quad (69-4)$$

اگر $m_1 = m_2$ ، معادلات (۶۷-۴)، (۶۶-۴) و (۶۴-۴) به معادلات زیر تبدیل خواهند شد:

$$\frac{p_{1F}}{p_{1I}} = \cos \vartheta_1, \quad \frac{p_{2F}}{p_{1I}} = \sin \vartheta_1, \quad \vartheta_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1 \right). \quad (70-4)$$

اکنون ϑ_1 از $\vartheta_1 = 0$ (حالت عدم برخورد) تا $\vartheta_1 = \pi/2$ (حالت برخورد رویاروی) که در آن تمام اندازه حرکت به ذره ۲ منتقل می شود، تغییر می کند. (در واقع اگر $\vartheta_1, p_{1F} = 0$ نامعین است، ولی وقتی برخورد به برخورد رویاروی نزدیک می شود، زاویه $\vartheta_1 \rightarrow \pi/2$ و اندازه حرکت، $p_{1F} \rightarrow 0$). اگر $m_1 < m_2$ ، تمام مقادیر زاویه ϑ_1 از 0 تا π امکان پذیر خواهد بود، و اگر در معادله (۶۷-۴) علامت مثبت اختیار شود، p_{1F}/p_{1I} مثبت خواهد بود. علامت منفی را نمی توان اختیار کرد، زیرا در آن صورت اندازه p_{1F}/p_{1I} منفی خواهد شد. اگر $\vartheta_1 = 0$ ، در این صورت $p_{1F} = p_{1I}$ و این حالتی است که هیچ گونه برخوردی وجود نداشته باشد. حالت $\vartheta_1 = \pi$ به برخورد رویاروی مربوط می شود، که در آن:

$$\frac{p_{1F}}{p_{1I}} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}, \quad \vartheta_1 = \pi, \quad (71-4)$$

$$\frac{p_{2F}}{p_{1I}} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vartheta_2 = 0.$$

اگر m_1 مجهول باشد، ولی p_{1I} یا T_{1I} را بتوان اندازه گرفت یا محاسبه کرد، در این صورت مشاهده اندازه حرکت نهایی ذره ۲ (که جرمش معلوم فرض می شود) برای تعیین جرم m_1 کافی خواهد بود. به عنوان مثال، اگر $T_{1I} = p_{1I}^2 / 2m_1$ معلوم باشد و T_{2F} برای برخوردی رویاروی اندازه گرفته شود، در این صورت m_1 از معادله (۶۹-۴) یا (۷۱-۴) به دست می آید:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2T_{1I}}{T_{2F}} - 1 \pm \left[\left(\frac{2T_{1I}}{T_{2F}} - 1 \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (72-4)$$

بنابراین یکی از دو مقدار m_1 را می توان معین کرد. اگر نتایج برخوردی با ذره دیگری به جرم متفاوت m_2 یا در مورد زاویه پراکندگی دیگری معلوم باشند، m_1 به طور یگانه معین می شود. این روش در اصل توسط چادویک^۱ برای اثبات وجود نوترون به کار رفت.^۲ ذرات خنثای ناشناخته ای که در یک واکنش هسته ای به وجود آمده بودند، بر ماده ای حاوی هسته هایی به جرم معلوم، برخورد داده شدند. انرژی های دو نوع هسته به جرمهای متفاوت m_2 و m_2' که در اثر برخوردهای رویاروی بیرون جستنند، اندازه گیری شدند و انرژی مجهول T_{1I} از طریق نوشتن معادله (۷۲-۴) برای هر دو حالت، حذف شد و جرم m_1 عملاً برابر جرم پروتون به دست آمد.

دیدیم که اگر اندازه های حرکت اولیه و ذره برخوردکننده با جرمهای معلوم و زاویه پراکندگی ϑ_1

(یا ϑ_2) را بدانیم، تمام کمیت‌های دیگر را که در برخورد دخالت دارند، می‌توانیم از قوانین بقا به دست آوریم. برای پیش‌بینی زاویه‌های پراکندگی، نه تنها اندازه‌های حرکت اولیه و مسیرهای اولیه، بلکه قانون نیروی بین ذرات را نیز باید بدانیم. به‌عنوان مثال، برخورد دو ذره تحت تأثیر نیروی مرکزی متناسب با $1/r^2$ را که در بخش ۴-۸ بررسی خواهد شد، در نظر بگیرید. چنین پیش‌بینی‌هایی در مورد برخورد اجسام کلان یا اجسام نجومی نیز با فرضیات مناسبی دربارهٔ قانون نیرو، ممکن است. اما برای ذرات اتمی که از مکانیک کوانتم پیروی می‌کنند، این کار میسر نیست، اگرچه می‌توان احتمال مشاهدهٔ زوایای مختلف پراکندگی ϑ_1 (یا ϑ_2) را برای شرایط اولیهٔ معلومی، پیش‌بینی کرد، به عبارت دیگر می‌توان سطح مقطعها را پیش‌بینی کرد. در کلیهٔ حالاتی که انرژی بقا دارد، روابط بین انرژیها، اندازه‌های حرکت و زوایای پراکندگی که در فوق مورد بحث قرار گرفت، برقرارند، مگر هنگامی که ذرات با سرعت‌هایی قابل‌مقایسه با سرعت نور حرکت می‌کنند. در این حالت، معادلات (۴-۶۰)، (۴-۶۱)، (۴-۶۳)، و (۴-۶۴) هنوز معتبرند، ولی به‌جای معادلهٔ (۴-۶۲)، باید از روابط نسبیتی بین جرم و اندازهٔ حرکت و انرژی استفاده کرد. در فصل ۱۴ روابط نسبیتی برای انرژی جنبشی و اندازهٔ حرکت به دست خواهیم آورد.

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - 1 \right), \quad (۷۳-۴)$$

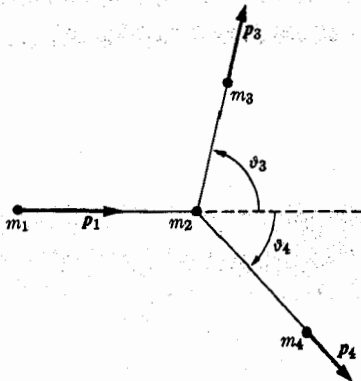
$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad (۷۴-۴)$$

که در آن c سرعت نور، v سرعت، و m جرم سکون ذره است، یعنی جرم ذره هنگامی که ساکن است. این معادلات به روابط کلاسیک (۲-۵) و (۳-۱۲۷) وقتی $v \ll c$ است، تبدیل می‌شوند. به آسانی رابطهٔ مفید زیر را بین اندازهٔ حرکت و انرژی نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{p^2}{2m} = T + \frac{T^2}{2mc^2}. \quad (۷۵-۴)$$

مگر در صورتی که سرعت v تقریباً مساوی به سرعت نور باشد، عبارت دوم طرف راست معادلهٔ (۴-۷۵) بسیار کوچکتر از عبارت اول خواهد بود و این معادله به معادلهٔ کلاسیکی تبدیل می‌شود. قوانین بقا را می‌توان با کمک معادلهٔ (۴-۷۵)، در مورد برخوردهایی که شامل سرعت‌های نزدیک به سرعت نور است به کار برد.

اتمها و ملکولها و هسته‌ها دارای انرژی پتانسیل و جنبشی داخلی‌اند که مربوط به حرکت اجزاء آنها است و ممکن است در اثر برخورد، انرژی بگیرند و یا از دست بدهند. این گونه برخوردهای غیرالاستیکی (ناکشوار) ذرات اتمی را در صورتی که انرژی جنبشی حرکت انتقالی جذب شود، برخورد نوع اول و یا، انرژی‌گیر و هرگاه طی آن، انرژی جنبشی صادر شود، برخورد نوع دوم و یا انرژی‌ده می‌نامند. همچنین ممکن است در یک برخورد اتمی یا هسته‌ای، ذرات نهایی بعد از برخورد همان ذرات اول قبل از برخورد نباشند. به‌عنوان مثال، ممکن است پروتونی با هسته‌ای برخورد کند و جذب آن شود، و نوترونی رها شود و دورگردد. فرایندهای ممکن بسیاری از این نوع وجود دارد.



شکل ۴-۴ برخورد m_1 با m_2 ساکن و ایجاد m_3 و m_4 .

ممکن است دو ذره به یکدیگر برخورد کنند و بهم بچسبند و ذرهٔ یگانه‌ای به وجود آورند، یا به‌عکس، ممکن است یک ذرهٔ یگانه ناگهان به دو ذره تقسیم شود و اجزاء آن از هم دور گردند. یا ممکن است سه یا چند ذره طی عمل، تشکیل شود، و بعد از برخورد از هم دور شوند. در تمام این حالات، قانون بقای اندازهٔ حرکت صادق است، و اگر انرژی داخلی اتمها و ملکولها را هم در نظر بگیریم، قانون بقای انرژی نیز معتبر خواهد بود. در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن ذره‌ای به جرم m_1 با ذرهٔ ساکنی به جرم m_2 برخورد می‌کند (شکل ۴-۴). بعد از برخورد، ذراتی به جرمهای m_3 و m_4 تحت زوایای ϑ_3 و ϑ_4 نسبت به امتداد اولیهٔ جرم m_1 صحنهٔ برخورد را ترک می‌کنند. فرض کنید، انرژی جنبشی Q در این فرایند جذب شود (برای برخورد انرژی‌گیر، $Q > 0$ و برای برخورد الاستیک (کشور) $Q = 0$ ، و برای برخورد انرژی‌ده $Q < 0$ است). در این صورت با به‌کار بردن قوانین بقای انرژی و اندازهٔ حرکت، می‌توان معادلات زیر را نوشت:

$$p_1 = p_3 \cos \vartheta_3 + p_4 \cos \vartheta_4, \quad (۷۶-۴)$$

$$0 = p_3 \sin \vartheta_3 - p_4 \sin \vartheta_4, \quad (۷۷-۴)$$

$$T_1 + Q = T_3 + T_4. \quad (۷۸-۴)$$

اگر جرمها معلوم باشند، از آنجا که انرژی جنبشی را می‌توان به صورت اندازهٔ حرکت بیان کرد، می‌توان هر سه کمیت از $p_1, p_3, p_4, \vartheta_3, \vartheta_4, Q$ را برحسب سه کمیت دیگر پیدا کرد. در بسیاری از حالات، p_1 معلوم است و p_3 و ϑ_3 اندازه‌گیری می‌شوند و هدف، محاسبهٔ Q است. همانند مثال قبلی، اگر ϑ_4 را از معادلات (۷۶-۴) و (۷۷-۴) حذف کنیم، خواهیم داشت

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \vartheta_3. \quad (۷۹-۴)$$

اکنون معادله فوق را می توان در معادله (۷۸-۴) جایگزین کرد و Q را بر حسب کمیت های معلوم به دست آورد.

$$Q = T_{\psi} + T_{\varphi} - T_1 = \frac{p_{\psi}^2}{2m_{\psi}} + \frac{p_1^2 + p_{\varphi}^2 - 2p_1 p_{\varphi} \cos \vartheta_{\psi}}{2m_{\varphi}} - \frac{p_1^2}{2m_1} \quad (۸۰-۴)$$

$$Q = T_{\psi} \left(1 + \frac{m_{\varphi}}{m_{\psi}} \right) - T_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_{\varphi}} \right) - 2 \left(\frac{m_1 m_{\varphi} T_1 T_{\psi}}{m_{\varphi}^2} \right)^{1/2} \cos \vartheta_{\psi} \quad (۸۱-۴)$$

اگر ذرات با سرعت هایی نزدیک به سرعت نور نیز حرکت کنند، کلیه مراحل راه حل فوق تا قبل از جایگزینی T_{ψ} ، T_{φ} و T_1 معتبر است. در مورد سرعت های بالا، باید در مرحله آخر از رابطه نسبیته (۷۵-۴) بین T و p استفاده کرد. در واکنشی هسته ای وقتی ذره وارد m_1 با انرژی معلوم با هسته m_{ψ} برخورد می کند و ذره ای به جرم m_{φ} خارج می شود که انرژی و جهت حرکت آن قابل مشاهده است، می توان برای به دست آوردن Q از معادله (۸۱-۴) استفاده کرد. به کمک معادله (۸۱-۴) می توان Q را با در نظر گرفتن اندک پس زدن هسته باقیمانده m_{φ} بعد از برخورد، که اغلب مشاهده مستقیم آن مشکل است، بر حسب این کمیت های معلوم به دست آورد.

برخورد اجسام کلان، که از نظر شیمیایی نسبت بهم بی اثر باشند همیشه غیرالاستیک (ناکشوار) و انرژی گیر است، زیرا، انرژی جنبشی در اثر نیروهای اصطکاک به هنگام برخورد به گرما تبدیل می شود. انرژی جنبشی انتقالی ممکن است به انرژی جنبشی دورانی نیز تبدیل شود، و به عکس. (در مثال قبلی، مبادلات انرژی دورانی در Q منظور شده است). این برخوردها از برخوردهای نزدیک الاستیک (کشوار)، گلوله های فولادی توپر که تحلیل فوق درباره برخوردهای الاستیک، (کشوار) در مورد آنها صادق است، تا برخوردهای کاملاً غیرالاستیک (ناکشوار) که در آن دو جسم بعد از برخورد بهم می چسبند از همه نوع هست. اکنون یک برخورد کاملاً غیرالاستیک (ناکشوار) را در نظر بگیرید که در آن گلوله ای به جرم m_1 و سرعت v_1 به جسم ساکنی به جرم m_{ψ} برخورد می کند و به آن می چسبد. فرض کنید سرعت دو جسم بعد از برخورد، v_{ψ} باشد. واضح است که بنا به قانون بقای اندازه حرکت باید امتداد v_{ψ} یا v_1 یکی باشد، و در این صورت داریم:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_{\psi}) v_{\psi} \quad (۸۲-۴)$$

و سرعت پس از برخورد عبارت خواهد بود از

$$v_{\psi} = \frac{m_1}{m_1 + m_{\psi}} v_1 \quad (۸۳-۴)$$

در چنین برخوردی انرژی ثابت نمی ماند. مقدار انرژی که به گرما تبدیل می شود عبارت است از:

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_{\psi}) v_{\psi}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(\frac{m_{\psi}}{m_1 + m_{\psi}} \right) \quad (۸۴-۴)$$

اسحق نیوتن از راه تجربه دریافت که در برخورد رویاروی دو جسم که در آن دوران وجود ندارد، نسبت سرعت نسبی بعد از برخورد به سرعت نسبی قبل از برخورد، برای هر دو ذره دلخواه معلوم به تقریب ثابت است. فرض کنید دو جسم m_1 و m_{ψ} با سرعت های اولیه v_{1F} و $v_{\psi F}$ در امتداد محور x با هم برخورد کنند و در امتداد همان محور با سرعت های v_{1P} و $v_{\psi P}$ باز جهند. در این صورت نتیجه

آزمایش به وسیله معادله زیر بیان می شود^۱

$$v_{2F} - v_{1F} = e(v_{1I} - v_{2I}), \quad (۸۵-۴)$$

که در آن ثابت e را ضریب برگشت می نامند و مقدار آن بین ۰ و ۱ است. اگر $e = 1$ ، برخورد کاملاً الاستیک (کشوار) است، و اگر $e = 0$ باشد، برخورد کاملاً غیرالاستیک (ناکشوار) است. در هر حال طبق قانون بقای اندازه حرکت خواهیم داشت:

$$m_1 v_{1I} + m_2 v_{2I} = m_1 v_{1F} + m_2 v_{2F}. \quad (۸۶-۴)$$

وقتی سرعت‌های اولیه معلوم باشند، با استفاده از معادلات (۸۵-۴) و (۸۶-۴) می توان سرعت‌های نهایی v_{1F} و v_{2F} را برای برخورد رویاروی پیدا کرد.

۷-۴ مسئله دو جسم

در این بخش، حرکت دستگاهی مرکب از دو ذره را در نظر می گیریم که تحت تأثیر نیروهای داخلی که از قانون سوم نیوتن (به صورت ضعیف) پیروی می کنند، قرار گرفته باشد و هیچ گونه نیروی خارجی بر آن وارد نشود یا اگر بشود آن نیروها دارای شرط خاصی که در آینده ذکر خواهیم کرد، باشند. مشاهده خواهیم کرد که این مسئله را می توان به دو مسئله تک ذره ای تبدیل کرد. حرکت مرکز جرم از معادله ای از نوع (۴-۱۸) مانند معادله حرکت یک تک ذره تبعیت می کند. به علاوه خواهیم دید که اگر هر یک از ذرات را مبدأ اختیار کنیم، حرکت ذره دیگر نسبت به آن، همانند حرکت تک ذره ای با جرم مناسب انتخاب شده نسبت به مبدأ ثابتی خواهد بود به شرط آن که آن ذره تحت تأثیر همان نیروی داخلی قرار گرفته باشد. این نتیجه، کاربرد نتایج بخش ۳-۱۴ را در مورد حالاتی که حرکت مرکز جاذب قابل اغماض نیست، ممکن می سازد.

فرض کنید که دو ذره دارای جرمهای m_1 و m_2 باشند و تحت تأثیر نیروهای خارجی F_1^e و F_2^e و نیروهای داخلی F_1^i و F_2^i که از هر ذره به دیگری وارد می شود قرار گرفته باشند و از قانون سوم نیوتن پیروی کنند:

$$F_1^i = -F_2^i. \quad (۸۷-۴)$$

در این صورت معادلات حرکت دستگاه عبارتند از:

$$m_1 \ddot{r}_1 = F_1^i + F_1^e, \quad (۸۸-۴)$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = F_2^i + F_2^e. \quad (۸۹-۴)$$

اکنون از تغییر مختصات زیر استفاده می کنیم:

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}, \quad (۹۰-۴)$$

$$r = r_1 - r_2. \quad (۹۱-۴)$$

۱. آزمایشهای اخیر نشان می دهند که e در واقع ثابت نیست، بلکه به سرعت‌های اولیه و به محیطی که برخورد در آن انجام می شود و به تاریخچه گذشته اجسام بستگی دارد. برای بحث بیشتر به مقاله زیر مراجعه کنید.

تبدیل معکوس معادلات فوق عبارت اند از:

$$r_1 = R + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad (92-4)$$

$$r_2 = R - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r, \quad (93-4)$$

که در آن R مختصه مرکز جرم، و r مختصه نسبی ذره m_1 نسبت به ذره m_2 است، [شکل ۴-۵ را ببینید]. اگر معادلات (۸۸-۴) و (۸۹-۴) را با هم جمع کنیم و سپس معادله (۸۷-۴) را به کار ببریم، معادله حرکت برای R به دست خواهد آمد:

$$(m_1 + m_2)\ddot{R} = F_1^e + F_2^e. \quad (94-4)$$

اگر معادله (۸۹-۴) را در m_1 و معادله (۸۸-۴) را در m_2 ضرب کنیم، و سپس آنها را از هم کم کنیم، و معادله (۸۷-۴) را به کار ببریم، معادله حرکت برای r به دست خواهد آمد:

$$m_1 m_2 \ddot{r} = (m_1 + m_2) F_1^i + m_1 m_2 \left(\frac{F_1^e}{m_1} - \frac{F_2^e}{m_2} \right). \quad (95-4)$$

اکنون فرض می‌کنیم که:

$$\frac{F_1^e}{m_1} = \frac{F_2^e}{m_2}, \quad (96-4)$$

و M ، μ و F را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$M = m_1 + m_2, \quad (97-4)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (98-4)$$

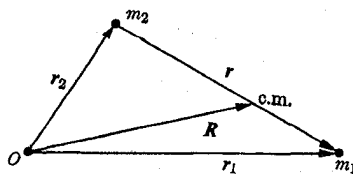
$$F = F_1^e + F_2^e. \quad (99-4)$$

معادلات (۹۴-۴) و (۹۵-۴) را می‌توان به صورت معادله حرکت تک ذره نوشت:

$$M\ddot{R} = F, \quad (100-4)$$

$$\mu \ddot{r} = F^i. \quad (101-4)$$

معادله (۱۰۰-۴)، معادله حرکت مرکز جرم است که از پیش با آن آشنایی داریم. معادله (۱۰۱-۴) معادله حرکت ذره‌ای به جرم μ است که تحت تأثیر نیروی داخلی F^i وارد از ذره ۲ به ذره ۱، قرار



شکل ۴-۵ مختصات برای مسئله دو جسم.

گرفته است. بنابراین حرکت ذره ۱ وقتی از ذره ۲ دیده شود، همانند حرکت ذره ۱ است اگر جرم آن μ می‌بود و ذره ۲ ساکن. (μ را جرم کاهش یافته می‌نامند). اگر یکی از ذرات بسیار سنگین تر از دیگری باشد، μ کمی از جرم ذره سبکتر خواهد بود. اگر جرمهای ذرات مساوی باشند، μ نصف جرم هریک از آنها خواهد بود. اکنون می‌توان نتایج بخش ۳-۱۴ را در مورد هر مسئله دو جسمی به کار برد که در آن ذرات نیروی جاذب یا دافعی متناسب با $1/r^2$ یا یکدیگر وارد می‌کنند، به شرط آن که نیروهای خارجی همان‌طور که در معادله (۴-۹۶) لازم بود صفر و یا متناسب با جرم ذرات باشند.

اگر نیروهای خارجی، نیروهای ثقل وارد از جرمهایی باشند که فواصل آنها از دو جسم m_1 و m_2 بسیار بزرگتر از فاصله r دو ذره از هم است، در این صورت معادله (۴-۹۶) برقرار خواهد بود. به‌عنوان مثال می‌توان دستگاه ماه و زمین را با تقریب بسیار خوبی، به‌وسیله روش این بخش حل کرد. زیرا ماه به زمین بسیار نزدیکتر است تا هریک از آنها به خورشید (و یا به سیارات دیگر). ذرات اتمی تحت تأثیر نیروهای الکتریکی متناسب با بارهای خود قرار می‌گیرند، و بنابراین معادله (۴-۹۶) بنابه معمول فقط هنگامی برقرار است که نیروهای خارجی صفر باشند. همچنین حالت دیگر، که دارای اهمیت کمتری است هنگامی است که نسبتهای بار به جرم دو ذره مساوی باشند و ذرات تحت تأثیر نیروهای خارجی ناشی از بارهای دور قرار گرفته باشند. باید متذکر شویم که اگرچه معادلات (۴-۸۸) و (۴-۸۹) برای توصیف حرکات ذرات اتمی مناسب نیستند، ولی می‌توان روش حل کلاسیک فوق را عیناً در حل مسئله به طریق مکانیک کوانتم با همان فرضیات درباره نیرو، به کار برد. یعنی از مختصات R و r استفاده، و مسئله دو جسمی را به دو مسئله یک جسمی تبدیل کرد.

باید توجه داشت که انرژی جنبشی دستگاه دو جسمی را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد و هریک از قسمتها را به یک مسئله یک جسمی حاصل از تقسیم مسئله دو جسم مربوط کرد. طبق معادلات (۴-۹۰) تا (۴-۹۳)، سرعت مرکز جرم و سرعت نسبی، به‌وسیله معادلات زیر به سرعت ذرات مربوط می‌شوند.

$$V = \dot{R} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (102-4)$$

$$v = \dot{r} = v_1 - v_2, \quad (103-4)$$

یا

$$v_1 = V + \frac{\mu}{m_1} v, \quad (104-4)$$

$$v_2 = V - \frac{\mu}{m_2} v. \quad (105-4)$$

در این صورت انرژی جنبشی کل عبارت است از:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \mu v^2. \quad (106-4)$$

به همین ترتیب اندازه حرکت زاویه‌ای را می‌توان به‌سادگی به دو قسمت تقسیم کرد:

$$\begin{aligned} L &= m_1 (r_1 \times v_1) + m_2 (r_2 \times v_2) \\ &= M(R \times V) + \mu(r \times v). \end{aligned} \quad (107-4)$$

ولی اندازه حرکت خطی کل عبارت است از:

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = MV. \quad (108-4)$$

جمله μv در اندازه حرکت خطی کل وجود ندارد.

۸-۴ مختصات مرکز جرم.

پراکنندگی رادرفورد به‌وسیله یک ذره باردار با جرم متناهی

با استفاده از نتایج بخش قبل، اگر نیروی برهم‌کنش بین دو ذره را بدانیم، با به‌دست آوردن مختصه r از معادله حرکت یک جسم، می‌توان مسئله پراکنندگی دو جسم را به‌طور کامل حل کرد. مع‌هذا، نتیجه، به‌صورتی که برای کاربرد مناسب باشد نخواهد بود. جواب $r(t)$ ، حرکت ذره ۱ را نسبت به ذره ۲ که مبدأ گرفته می‌شود توصیف می‌کند. از آنجا که ذره ۲ خود در امتداد مداری حرکت می‌کند، این روش معمولاً برای تفسیر حرکت مناسب نیست. بهتر آن بود که حرکت هر دو ذره را به‌وسیله مختصات $r_1(t)$ و $r_2(t)$ نسبت به مبدأ ثابتی توصیف کنیم. معمولاً یکی از ذرات در ابتدا ساکن است. این ذره را ذره ۲ فرض می‌کنیم و آن را ذره هدف می‌نامیم. ذره ۱ را که با سرعت اولیه v_{1i} به ذره هدف نزدیک می‌شود، ذره وارد می‌نامیم. مکان دو ذره نسبت به مبدأیی که ذره هدف از ابتدا نسبت به آن ساکن است، به‌وسیله بردارهای r_1 و r_2 مشخص می‌شوند. مختصات r_1 و r_2 را دستگاه مختصات آزمایشگاهی می‌نامیم.

انتقال از مختصات R, r به مختصات آزمایشگاهی به مناسب‌ترین وجه در دو مرحله انجام می‌گیرد. ابتدا یک دستگاه مختصات مرکز جرم را به‌کار وارد می‌کنیم که ذرات در آن به‌وسیله بردارهای r_1^i و r_2^i نسبت به مرکز جرم که مبدأ است قرار گرفته‌اند:

$$r_1^i = r_1 - R, \quad r_2^i = r_2 - R, \quad (109-4)$$

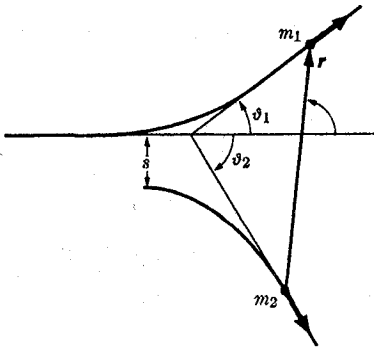
و به‌عکس:

$$r_1 = r_1^i + R, \quad r_2 = r_2^i + R. \quad (110-4)$$

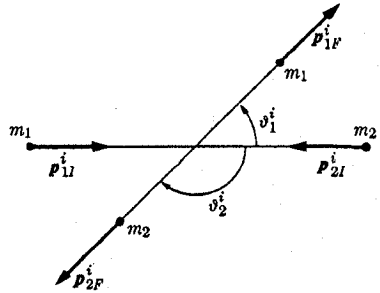
رابطه بین مختصات مرکز جرم و مختصات نسبی r به کمک معادلات (۹۲-۴) و (۹۳-۴) به‌دست می‌آید:

$$r_1^i = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r = \frac{\mu}{m_1} r, \quad (111-4)$$

$$r_2^i = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r = -\frac{\mu}{m_2} r.$$



شکل ۴-۷ مدارهای برخورد دو جسم در مختصات آزمایشگاهی.



شکل ۴-۶ برخورد دو ذره‌ای در مختصات مرکز جرم.

بردارهای مکان ذرات نسبت به مرکز جرم عبارت‌اند از مضربهای ثابتی از مختصات نسبی r مرکز جرم، به‌عنوان مبدأ مختصات بر ذره ۲ بدین سبب رجحان دارد که در مسائل برخورد که فرض می‌شود نیروهای خارجی عمل نمی‌کنند، با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند.

در دستگاه مختصات مرکز جرم، اندازه حرکت خطی کل صفر است و اندازه‌های حرکت p_1^i و p_2^i دو ذره همیشه مساوی و مختلف‌الجهت‌اند. همان‌طور که در شکل ۴-۶ نشان داده شده است، زوایای پراکندگی θ_1^i و θ_2^i بین دو جهت نهایی حرکت و جهت اولیه حرکت ذره ۱، مکمل یکدیگرند.

اکنون رابطه بین زاویه پراکندگی Θ در مسئله یک جسمی معادل، و زاویه پراکندگی θ_1 در دستگاه مختصات آزمایشگاهی را تعیین می‌کنیم، (شکل ۴-۷). طبق معادله (۴-۱۱۱)، سرعت ذره وارد در دستگاه مرکز جرم به‌وسیله معادله زیر به سرعت نسبی مسئله یک جسمی مربوط می‌شود

$$v_1^i = \frac{\mu}{m_1} v. \quad (4-112)$$

از آنجا که این دو سرعت همیشه به موازات یکدیگرند، زاویه پراکندگی θ_1^i ذره وارد در دستگاه مرکز جرم با زاویه پراکندگی Θ در مسئله یک جسمی برابر است. سرعت‌های ذره وارد در دستگاه‌های مرکز جرم آزمایشگاهی بنابه معادله (۴-۱۱۰) به‌وسیله معادله زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$v_1 = v_1^i + V, \quad (4-113)$$

که در آن سرعت ثابت مرکز جرم را می‌توان با کمک معادله (۴-۱۰۲) برحسب سرعت اولیه در دستگاه آزمایشگاهی بیان کرد:

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1I} = \frac{\mu}{m_2} v_{1I}. \quad (4-114)$$

در شکل ۴-۸، رابطه‌ای که در معادله (۴-۱۱۳) بیان شده، نشان داده شده است، که رابطه بین $\vartheta_1^i = \Theta$ و ϑ_1 را می‌توان از آن معین کرد:

$$\tan \vartheta_1 = \frac{v_{1F}^i \sin \Theta}{v_{1F}^i \cos \Theta + V}, \quad (4-115)$$

و یا با کمک معادلات (۴-۱۱۲) و (۴-۱۱۴) داریم:

$$\tan \vartheta_1 = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + (m_1 v_I / m_1 v_F)}, \quad (4-116)$$

که در آن v_F و v_I تندیه‌های نسبی اولیه و نهایی‌اند، و چون از ابتدا، سرعت نسبی همان سرعت ذره وارد بود، به جای v_{1I} از v_I استفاده کردیم. اگر برخورد الاستیک (کشور) باشد، تندیه‌های اولیه و نهایی با هم مساوی‌اند و معادله (۴-۱۱۶) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\tan \vartheta_1 = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + (m_1 / m_2)}. \quad (4-117)$$

به همین ترتیب می‌توان رابطه مشابهی برای ϑ_2 به دست آورد.

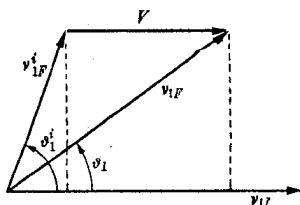
اگر ذره وارد بسیار سنگین تر از ذره هدف باشد، در این صورت اندازه Θ هرچه باشد، ϑ_1 خیلی کوچک خواهد بود. این همان نتیجه‌ای است که در بخش ۴-۶ به دست آوردیم، یعنی اگر $m_1 > m_2$ ، زاویه ϑ_1 هرگز ممکن نیست از زاویه ϑ_m داده شده در معادله (۴-۶۸)، بزرگتر شود. اگر $m_1 = m_2$ ، در این صورت ϑ_1 را به سادگی می‌توان از معادله (۴-۱۱۷) به دست آورد:

$$\tan \vartheta_1 = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + 1} = \frac{2 \sin(\Theta/2) \cos(\Theta/2)}{2 \cos^2(\Theta/2)} = \tan \frac{\Theta}{2},$$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} \Theta. \quad (4-118)$$

چون Θ همیشه ممکن است تمام مقادیر بین 0 و π را بپذیرد، بی‌آنکه از قوانین بقا در دستگاه مرکز جرم تخلف کند، بزرگترین مقدار ϑ_1 در این حالت برابر $\pi/2$ خواهد بود و این نتیجه با نتیجه متناظر در بخش ۴-۶ سازگار است. اگر جرم هدف m_2 بسیار سنگین تر از جرم وارد m_1 باشد، در این صورت $\tan \Theta \doteq \tan \vartheta_1$. این رابطه کاربرد معادله (۳-۲۷۶) برای سطح مقطع رادرفورد را که در فصل ۳ برای مسئله پراکندگی یک جسم با قانون نیروی متناسب با $1/r^2$ به دست آمد در مورد این حالت به دقت تفسیر می‌کند.

بنابر مطالب فوق، معادله (۳-۲۷۶) برای مسئله دو جسم با هر نسبت جرم وارد به جرم هدف،



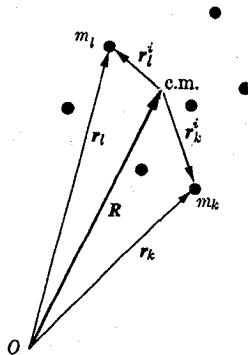
شکل ۴-۸ رابطه بین سرعتها در دستگاههای مختصات مرکز جرم و آزمایشگاهی.

(m_1/m_2) نیز به کار می‌رود، لکن \ominus باید به صورت زاویه پراکندگی برحسب مختصات نسبی و یا برحسب مختصات مرکز جرم، تعبیر شود. به عبارت دیگر، در معادله (۳-۲۷۶) عبارت است از سطح مقطع برای یک عمل پراکندگی که در آن سرعت نسبی v بعد از برخورد، با امتداد سرعت اولیه، زاویه‌ای بین \ominus و $\ominus + d$ تشکیل می‌دهد. چون معمولاً زاویه پراکندگی آزمایشگاهی ϑ_1 است که اندازه گرفته می‌شود، باید در معادله (۳-۲۷۶) به جای \ominus و d از مقادیر آنها برحسب زوایای ϑ_1 و $d\vartheta_1$ که به وسیله معادله (۴-۱۱۷) معین می‌شوند، استفاده کرد. این کار در حالت $m_1 = m_2$ ، که طبق معادله (۴-۱۱۸)، سطح مقطع پراکندگی رادرفورد یعنی [معادله (۳-۲۷۶)] به صورت زیر است، بسیار آسان است

$$d\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{2\mu v^2} \right)^2 \frac{\epsilon \cos \vartheta_1}{\sin^4 \vartheta_1} 2\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1. \quad (4-119)$$

۹-۴ مسئله N - جسم

اگر می‌توانستیم، مشابه روشی که در بخش ۴-۷ داده شده و به وسیله آن مسئله دو جسم به دو مسئله یک جسمی جداگانه تبدیل شد، روشی کلی برای حل مسئله تعداد دلخواهی ذرات که تحت تأثیر نیروهایی که بر یکدیگر وارد می‌کنند، در حرکت‌اند، به دست آوریم، موجب رضایت بود. ولی افسوس چنین روش کلی برای دستگاههای متشکل از بیش از دو ذره وجود ندارد. البته این بدان معنی نیست که چنین مسائلی را نمی‌توان حل کرد. محاسبات بسیار دقیق حرکات سیارات به منزله حل مسئله‌ای است که شامل برهم کنشهای ثقلی اجسام بسیار زیادی است. مع‌هذا، این جوابها، جوابهای عمومی معادلات حرکت، مانند دستگاه مدارهایی که برای حرکت دو جسم به دست آوردیم نیست. بلکه جوابهای عددی است که از طریق محاسباتی مفصل و پرداخته برای شرایط اولیه خاص به دست آمده‌اند و طی مدت زمان معینی معتبرند، حتی برای مسئله سه جسمی نمی‌توان راه تجزیه‌ای کلی، مثلاً به سه مسئله یک جسمی و یا هر تعداد معادلات قابل حل، ارائه داد. مع‌هذا، می‌توان مسئله حرکت یک دستگاه از ذرات را تا حدودی به دو مسئله تبدیل کرد: اول، پیدا کردن حرکت مرکز جرم، و دوم، پیدا کردن حرکت داخلی دستگاه، یعنی حرکت ذرات آن نسبت



شکل ۹-۴ مرکز جرم و مختصات داخل دستگاهی از ذرات.

به مرکز جرم. بردار مختصه داخلی r_k^i ، k امین ذره را به صورت برداری از مرکز جرم تا k امین ذره تعریف می‌کنیم (شکل ۴-۹):

$$r_k^i = r_k - R, \quad k = 1, \dots, N, \quad (120-4)$$

$$r_k = R + r_k^i, \quad k = 1, \dots, N. \quad (121-4)$$

از نظر تعریف (۴-۱۴) برای مرکز جرم، مختصات داخلی r_k^i معادله زیر را برقرار می‌کنند

$$\sum_{k=1}^N m_k r_k^i = 0. \quad (122-4)$$

سرعت مرکز جرم و سرعتهای داخلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V = \dot{R}, \quad (123-4)$$

$$v_k^i = \dot{r}_k^i = v_k - V. \quad (124-4)$$

اندازه حرکت داخلی کل دستگاهی از ذرات (یعنی اندازه حرکت نسبت به مرکز جرم)، طبق معادله (۴-۱۲۲) صفر می‌شود:

$$\sum_{k=1}^N m_k v_k^i = 0. \quad (125-4)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که انرژی جنبشی کل و اندازه حرکت، و اندازه حرکت زاویه‌ای هر یک را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد، یک قسمت وابسته به جرم کل M و حرکت مرکز جرم و یک قسمت داخلی که فقط بستگی به مختصات و سرعتهای داخلی دارد. انرژی جنبشی کل دستگاه ذرات عبارت است از:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2. \quad (126-4)$$

v_k را از معادله (۴-۱۲۴) در معادله فوق جایگزین، و سپس با استفاده از معادله (۴-۱۲۵)، آن را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (V^2 + 2V \cdot v_k^i + v_k^{i2}) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k V^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^{i2} + \sum_{k=1}^N m_k V \cdot v_k^i \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^{i2} + V \cdot \sum_{k=1}^N m_k v_k^i \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^{i2}. \end{aligned} \quad (127-4)$$

اگر از معادلات (۴-۱۲۴) و (۴-۱۲۵) استفاده کنیم، اندازه حرکت خطی کل عبارت است از:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^N m_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^N m_k V + \sum_{k=1}^N m_k v_k^i \\ &= MV. \end{aligned} \quad (4-128)$$

اندازه حرکت خطی داخلی صفر است.

اگر از معادلات (۴-۱۲۱)، (۴-۱۲۲)، (۴-۱۲۴)، و (۴-۱۲۵) استفاده کنیم، اندازه حرکت زاویه‌ای کل حول مبدأ عبارت است از:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^N m_k (r_k \times v_k) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (R \times V + r_k^i \times V + R \times v_k^i + r_k^i \times v_k^i) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (R \times V) + \left(\sum_{k=1}^N m_k r_k^i \right) \times V + R \times \left(\sum_{k=1}^N m_k v_k^i \right) + \sum_{k=1}^N m_k (r_k^i \times v_k^i) \\ &= M (R \times V) + \sum_{k=1}^N m_k (r_k^i \times v_k^i). \end{aligned} \quad (4-129)$$

توجه داشته باشید که اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی فقط به مختصات و سرعت‌های داخلی بستگی دارد و از مبدایی که L حول آن حساب می‌شود، (و بردار R از آن رسم می‌گردد)، مستقل است. مکان ذره k نسبت به ذره l به وسیله بردار زیر مشخص می‌شود:

$$r_k - r_l = r_k^i - r_l^i. \quad (4-130)$$

مکانهای نسبی ذرات نسبت به یکدیگر و همچنین سرعت‌های نسبی آنها فقط به مختصات داخلی r_k^i بستگی دارد، بنابراین انتظار می‌رود که نیروهای داخلی F_k^i فقط به مختصات داخلی r_k^i و احتمالاً به سرعت‌های داخلی بستگی داشته باشند. اگر انرژی پتانسیلی وابسته به نیروهای داخلی وجود داشته باشد، آن هم فقط به مختصات داخلی بستگی خواهد داشت.

اگرچه نیروها و انرژی و اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای هریک را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد، یک قسمت مربوط به حرکت مرکز جرم و یک قسمت داخلی که فقط وابسته به مختصات و سرعت‌های داخلی است، ولی نباید تصور کرد که حرکت داخلی و حرکت مرکز جرم، دو مسئله کاملاً جدا هستند. در حالتی که نیروهای خارجی F داده شده باشد، حرکت مرکز جرم که از معادله (۴-۱۸) پیروی می‌کند، خود مسئله یک جسمی جدایی است. مع هذا، در اغلب حالات، نیروی F تا حدودی به حرکت داخلی دستگام بستگی خواهد داشت. مگر در حالاتی خاص، معادلات حرکت داخلی شامل نیروهای داخلی اند، و از این گذشته آنها نیز به حرکت مرکز جرم

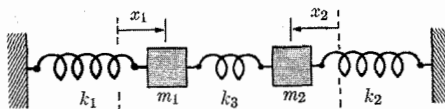
بستگی دارند. اگر معادلات (۴-۱۲۱) را در معادلات (۴-۱) جایگزین کنیم و ترتیب قرار گرفتن عبارات را تغییر دهیم، خواهیم داشت:

$$m_k \ddot{r}_k^i = F_k^i + F_k^e - m_k \ddot{R}. \quad (۴-۱۳۱)$$

با وجود این، حالات بسیاری وجود دارند که در آنها گروهی از ذرات، دستگاهی را تشکیل می‌دهند که به نظر می‌رسد هویتی خاص خود دارد و از ذرات و دستگاههای ذرات دیگر مستقل است. به عنوان مثال، می‌توان یک هسته اتم که از نوترونها و پروتونها، یا اتمی که از هسته و الکترونها، یا ملکولی که از هستهها و الکترونها تشکیل شده است و یا مجموعه‌ای از ذرات که یک توپ بیسبال را تشکیل می‌دهد ذکر کرد. در تمام این حالات می‌بینیم که نیروهای داخلی بسیار قویتر از نیروهای خارجی اند، و شتاب \ddot{R} کوچک است، به طوری که معادلات حرکت داخلی (۴-۱۳۱) در اصل فقط به نیروهای داخلی بستگی دارند، و جوابهای آنها نمایشگر حرکات داخلی اند که تقریباً از نیروهای خارجی و حرکت کل دستگاه مستقل اند. در این صورت هرگاه دستگاه، از خارج مورد مطالعه قرار گیرد، همانند تک ذره‌ای است، با بردار مختصه R و جرم M که تحت تأثیر نیروی (خارجی) F قرار گرفته است، اما ذره‌ای که علاوه بر انرژی و اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای «مداری» وابسته به حرکت مرکز جرم خود، دارای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی است که مربوط به حرکت داخلی آن است. انرژی و اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی و مداری را می‌توان در معادلات (۴-۱۲۷)، (۴-۱۲۸)، و (۴-۱۲۹) مشخص کرد. اغلب اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی را اسپین^۱ می‌نامند و از مکان یا سرعت مرکز جرم نسبت به مبدأیی که اندازه حرکت زاویه‌ای کل باید حول آن حساب شود، مستقل است. تا وقتی که نیروهای خارجی کوچک باشند، این نمایش تقریبی دستگاه به صورت یک تک ذره، معتبر است. هرگاه نیروهای داخلی آنقدر قوی باشند که بر حرکت داخلی اثر قابل ملاحظه‌ای بگذارند، دیگر نمی‌توان مسئله را به دو حرکت مداری و داخلی تقسیم کرد و دستگاه حالت ویژه خود را از دست می‌دهد. بعضی از مسائل مهم در مرزهای نظریات فیزیکی امروز مربوط به پوشاندن شکافی است که بین مجموعه‌ای از ذرات ناهمبسته دستگاهی موجود است که دارای چنان فردیتی است که می‌توان آن را به صورت یک ذره تنها تلقی کرد.

۱۰-۴ دو نوسانگر هارمونیک جفت شده

یک دستگاه مکانیکی بسیار متداول دستگاهی است که در آن چند نوسانگر هارمونیک برهم کنش دارند. به عنوان مثالی بارز برای چنین دستگاهی، می‌توان دستگاه مکانیکی شکل ۴-۱۰ را در نظر



شکل ۴-۱۰ نمونه ساده‌ای از دو نوسانگر هارمونیک جفت شده.

گرفت. این دستگاه شامل دو جرم m_1 و m_2 است که به وسیله دو فنر با ضرایب ثابت الاستیکی (کشواری) k_1 و k_2 به نقاطی ثابت بسته، و به وسیله فنر سومی با ضریب ثابت الاستیکی (کشواری) k_3 به هم وصل شده‌اند. فرض می‌کنیم که ذرات فقط بتوانند در امتداد محور x حرکت کنند، مثلاً در امتداد ریلی سر بخورند. اگر فنر k_3 وجود نداشت، دو جرم مستقل از هم حرکت هارمونیک ساده‌ای با سرعت‌های زاویه‌ای زیر داشتند (از میرایی صرف نظر شده است):

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (۱۳۲-۴)$$

می‌خواهیم نتیجه جفت شدن این دو نوسانگر را به وسیله فنر k_3 بررسی کنیم. مکانهای دو جرم را مطابق شکل ۴-۱۰ از طریق تصریح فواصل x_1 و x_2 ، یعنی فواصلی که فنرهای k_1 و k_2 به مقدار آنها از مکانهای تعادل خود کشیده شده‌اند، مشخص می‌کنیم. بر اساس سلیقه ریاضی مان مختصات x_1 و x_2 را چنان تعریف کرده‌ایم که آنها مقدار کشیدگی دو فنر را نشان دهند. این انتخاب تقارنی را در معنای فیزیکی مختصات ایجاد می‌کند که در تقارن جبری در معادلات حاصل بازتاب می‌یابد به این معنی که اگر اندیسهای ۱ و ۲ را جابه‌جا کنیم این معادلات به همان صورت باقی می‌مانند. این تقارن، جبری را ایجاد می‌کند که کار کردن و بررسی کردن را ساده‌تر می‌کند. اما این انتخاب عیبی هم دارد و آن این است که فاصله‌های x_1 و x_2 از یک مبدأ اندازه‌گیری نمی‌شوند بلکه در جهات مختلفی اندازه‌گیری می‌شوند! بنابر این در تغییر هندسی نتایج باید به خاطر داشت که جهت مثبت برای x_1 راست و جهت مثبت برای x_2 چپ است. روشهای دیگری برای تعریف x_1 و x_2 نیز قابل قبول‌اند. برای سهولت کار فرض می‌کنیم که وقتی فنرهای k_1 و k_2 آزادند (یعنی $x_1 = x_2 = 0$)، فنر k_3 نیز آزاد است. در این صورت فنر k_3 به مقدار $(x_1 + x_2)$ فشرده می‌شود. اگر از اصطکاک صرف نظر کنیم، معادلات حرکت اجرام m_1 ، m_2 عبارت‌اند از:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_3 (x_1 + x_2), \quad (۱۳۳-۴)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_3 (x_1 + x_2). \quad (۱۳۴-۴)$$

معادلات فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k'_1 x_1 + k_3 x_2 = 0, \quad (۱۳۵-۴)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k'_2 x_2 + k_3 x_1 = 0, \quad (۱۳۶-۴)$$

که در آن

$$k'_1 = k_1 + k_3, \quad (۱۳۷-۴)$$

$$k'_2 = k_2 + k_3. \quad (۱۳۸-۴)$$

اینک دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم داریم که باید به‌طور همزمان حل کنیم. اگر عبارات سوم در معادلات فوق وجود نداشت، دو معادله از هم مستقل می‌شدند، و دو ارتعاش هارمونیک

مستقل x_1 و x_2 با فرکانسهای زیر داشتیم:

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k'_1}{m_1}}, \quad (139-4)$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{k'_2}{m_2}}. \quad (140-4)$$

اینها فرکانسهای هریک از اجرام اند به شرطی که جرم دیگر ثابت نگه داشته می‌شد. بنابراین اولین اثر فنر جفت‌کننده فقط همین است که فرکانس ارتعاش مستقل هر یک از اجرام را تغییر می‌دهد، زیرا هریک از اجرام به جای یک فنر، به وسیله دو فنر نگه داشته شده‌اند. جمله‌های سوم در معادلات (۱۳۵-۴) و (۱۳۶-۴) باعث جفت شدن حرکات دو جرم می‌شوند، به طوری که دیگر نمی‌توانند به طور مستقل از هم حرکت کنند.

معادلات (۱۳۵-۴) و (۱۳۶-۴) را می‌توان با گسترش روش بخش ۲-۸ که در مورد هر مجموعه از معادلات دیفرانسیل خطی همزمان، با ضرایب ثابت به کار می‌رود، حل کرد. فرض می‌کنیم که:

$$x_1 = C_1 e^{pt}, \quad (141-4)$$

$$x_2 = C_2 e^{pt}, \quad (142-4)$$

که در آن C_1 و C_2 ثابت‌اند. توجه داشته باشید که وابستگی x_1 و x_2 نسبت به زمان یکسان فرض شده است تا وقتی آنها را در معادلات (۱۳۵-۴) و (۱۳۶-۴) جایگزین می‌کنیم، عامل e^{pt} حذف شود:

$$(m_1 p^2 + k'_1) C_1 + k_p C_2 = 0, \quad (143-4)$$

$$(m_2 p^2 + k'_2) C_2 + k_p C_1 = 0. \quad (144-4)$$

اکنون دو معادله جبری و سه کمیت مجهول C_1 ، C_2 ، و p داریم. توجه کنید که نسبت C_2/C_1 را می‌توان از هر یک از معادلات فوق به دست آورد:

$$\frac{C_2}{C_1} = -\frac{m_1 p^2 + k'_1}{k_p} = -\frac{k_p}{m_2 p^2 + k'_2}. \quad (145-4)$$

دو مقدار C_2/C_1 باید با هم مساوی باشند تا بتوانیم معادله‌ای برای p به دست آوریم:

$$\frac{m_1 p^2 + k'_1}{k_p} = \frac{k_p}{m_2 p^2 + k'_2}, \quad (146-4)$$

و می‌توان آن را به صورت معادله درجه دومی از p^2 مرتب کرد که معادله ویژه^۱ نامیده می‌شود:

$$m_1 m_2 p^4 + (m_2 k'_1 + m_1 k'_2) p^2 + (k'_1 k'_2 - k_p^2) = 0, \quad (147-4)$$

که جوابهای آن عبارت‌اند از:

$$p^z = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{k'_1}{m_1} + \frac{k'_\nu}{m_\nu} \right) \pm \left[\frac{1}{4} \left(\frac{k'_1}{m_1} + \frac{k'_\nu}{m_\nu} \right)^2 - \frac{k'_1 k'_\nu}{m_1 m_\nu} + \frac{k_\nu^2}{m_1 m_\nu} \right]^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{\gamma} (\omega_{1_0}^z + \omega_{\nu_0}^z) \pm \left[\frac{1}{4} (\omega_{1_0}^z + \omega_{\nu_0}^z)^2 + \frac{k_\nu^2}{m_1 m_\nu} \right]^{1/2} \quad (148-4)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که کمیت داخل کروشه کمتر از مربع جمله اول است، و در نتیجه دو جواب منفی برای p^z موجود است. اگر فرض کنیم $\omega_{1_0} \geq \omega_{\nu_0}$ ، جوابهای p^z عبارت‌اند از:

$$p^z = -\omega_{1_0}^z = -\left(\omega_{1_0}^z + \frac{1}{\gamma} \Delta \omega^z \right), \quad (149-4)$$

$$p^z = -\omega_{\nu_0}^z = -\left(\omega_{\nu_0}^z - \frac{1}{\gamma} \Delta \omega^z \right),$$

که در آن

$$\Delta \omega^z = (\omega_{1_0}^z - \omega_{\nu_0}^z) \left[\left(1 + \frac{4K^2}{(\omega_{1_0}^z - \omega_{\nu_0}^z)^2} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (150-4)$$

که باز در آن

$$K^2 = \frac{k_\nu}{\sqrt{m_1 m_\nu}} \quad (151-4)$$

و K ضریب جفت‌شدگی است. اگر $\omega_{1_0} = \omega_{\nu_0}$ باشد، معادله (۱۵۰-۴) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\Delta \omega^z = 2K^2 \quad (152-4)$$

چهار جواب p عبارت‌اند از:

$$p = \pm i\omega_{1_0}, \pm i\omega_{\nu_0} \quad (153-4)$$

اگر $p^z = -\omega_{1_0}^z$ باشد، معادله (۱۴۵-۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{C_\nu}{C_1} = \frac{m_1}{k_\nu} (\omega_{1_0}^z - \omega_{\nu_0}^z) = \frac{\Delta \omega^z}{2K^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_\nu}} \quad (154-4)$$

و اگر $p^z = -\omega_{\nu_0}^z$ ، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{C_1}{C_\nu} = \frac{m_\nu}{k_\nu} (\omega_{\nu_0}^z - \omega_{1_0}^z) = -\frac{\Delta \omega^z}{2K^2} \sqrt{\frac{m_\nu}{m_1}} \quad (155-4)$$

اگر مقادیر (۱۵۳-۴) را در معادلات (۱۴۱-۴) و (۱۴۲-۴) جایگزین کنیم، چهار جواب برای معادلات (۱۳۵-۴) و (۱۳۶-۴) خواهیم داشت مشروط بر آن که C_ν/C_1 را طبق معادله (۱۵۴-۴) یا (۱۵۵-۴) اختیار کنیم. هر یک از این جوابها، شامل یک ضریب ثابت دلخواه (C_ν یا C_1) است. چون معادلات (۱۳۵-۴) و (۱۳۶-۴) خطی‌اند، حاصل جمع این چهار جواب نیز یک جواب معادله است، و در واقع جواب عام آن است، زیرا شامل چهار ضریب ثابت دلخواه

(مثلاً C_1, C_1', C_2, C_2') است:

$$x_1 = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_1' e^{-i\omega_1 t} - \frac{\Delta\omega^2}{\gamma K^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} C_2 e^{i\omega_2 t} - \frac{\Delta\omega^2}{\gamma K^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} C_2' e^{-i\omega_2 t}, \quad (156-4)$$

$$x_2 = \frac{\Delta\omega^2}{\gamma K^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} C_1 e^{i\omega_1 t} + \frac{\Delta\omega^2}{\gamma K^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} C_1' e^{-i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t} + C_2' e^{-i\omega_2 t}. \quad (157-4)$$

برای آنکه x_1 و x_2 حقیقی باشند باید مقادیر زیر را برای ضرایب دلخواه اختیار کنیم:

$$C_1 = \frac{1}{\gamma} A_1 e^{i\theta_1}, \quad C_1' = \frac{1}{\gamma} A_1 e^{-i\theta_1} \quad (158-4)$$

$$C_2 = \frac{1}{\gamma} A_2 e^{i\theta_2}, \quad C_2' = \frac{1}{\gamma} A_2 e^{-i\theta_2} \quad (159-4)$$

به طوری که

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - \frac{\Delta\omega^2}{\gamma K^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (160-4)$$

$$x_2 = \frac{\Delta\omega^2}{\gamma K^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2). \quad (161-4)$$

این جواب عامل است که شامل چهار ضریب ثابت دلخواه $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ است. مشاهده می‌کنیم که حرکت هریک از مختصات ترکیبی از دو ارتعاش هارمونیک با فرکانسهای ω_1 و ω_2 است. فرکانسهای نوسان برای هر دو مختصه یکسان است، ولی دامنه‌های نسبی آنها با یکدیگر فرق دارد و به وسیله معادلات (۴-۱۵۴) و (۴-۱۵۵) داده شده‌اند.

اگر A_1 یا A_2 صفر باشد، فقط یک فرکانس نوسان ظاهر می‌شود. در این صورت حرکت را وجه طبیعی ارتعاش^۱ می‌نامند. وجه طبیعی بزرگترین فرکانس به وسیله روابط زیر داده می‌شود:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad (162-4)$$

$$x_2 = \frac{\Delta\omega^2}{\gamma K^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad (163-4)$$

$$\omega_1^2 = \omega_{10}^2 + \frac{1}{\gamma} \Delta\omega^2. \quad (164-4)$$

فرکانس نوسان بزرگتر از ω_{10} است. با مراجعه به شکل ۴-۱۰ مشاهده می‌کنیم که در چنین وجه نوسانی، دو جرم m_1 و m_2 به طور غیرهمفاز نوسان می‌کنند، یعنی تغییر مکانهای آنها مختلف‌الجهت است. وجه نوسان فرکانس کوچکتر به وسیله روابط زیر داده می‌شود:

$$x_1 = -\frac{\Delta\omega^2}{\gamma K^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (165-4)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (166-4)$$

$$\omega_2^2 = \omega_{20}^2 - \frac{1}{\gamma} \Delta\omega^2. \quad (167-4)$$

در این وجه، دو جرم با فرکانسی کوچکتر از ω_{γ_0} به طور همفاز نوسان می‌کنند. کلی‌ترین حرکت دستگاه به وسیله معادلات (۴-۱۶۰) و (۴-۱۶۱) داده می‌شود، ترکیب دو وجه طبیعی ارتعاش است.

بنابراین اثر جفت کردن این است که هر دو جرم با هریک از فرکانسها در نوسان شرکت می‌کنند، و بالاترین فرکانس را افزایش می‌دهند و پایین‌ترین فرکانس را کم می‌کنند. حتی وقتی هر دو فرکانس در ابتدا مساوی باشند، نتیجه جفت کردن ایجاد دو نوسان است که یکی بالاتر و دیگری پایین‌تر از فرکانس نوسان جفت نشده است. وقتی جفت‌شدگی سست باشد، یعنی

$$k^2 \ll \frac{1}{\gamma} (\omega_{\gamma_0}^2 - \omega_{\gamma_0}^2), \quad (۴-۱۶۸)$$

در این صورت معادله (۴-۱۵۰) چنین می‌شود:

$$\Delta \omega^2 \doteq \frac{2k^2}{\omega_{\gamma_0}^2 - \omega_{\gamma_0}^2}. \quad (۴-۱۶۹)$$

برای وجه ارتعاشی که بالاترین فرکانس را داشته باشد، نسبت دامنه ارتعاش جرم m_{γ} به جرم m_1 عبارت است از:

$$\frac{x_{\gamma}}{x_1} = \frac{\Delta \omega^2}{2k^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_{\gamma}}} \doteq \frac{k^2}{\omega_{\gamma_0}^2 - \omega_{\gamma_0}^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_{\gamma}}}. \quad (۴-۱۷۰)$$

بنابراین مگر زمانی که $m_{\gamma} \ll m_1$ ، جرم m_{γ} با دامنه‌ای بسیار کوچکتر از دامنه m_1 نوسان می‌کند. به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که برای وجه نوسان فرکانس پایین، m_1 با دامنه‌ای بسیار کوچکتر از دامنه m_{γ} نوسان می‌کند. اگر دو نوسانگر با فرکانسهای مختلف، به سستی با یکدیگر جفت شده باشند، دو وجه طبیعی ارتعاش برای دستگاه وجود خواهد داشت. در یک وجه، نوسانگری که فرکانس آن بیشتر است، با فرکانسی که کمی بالاتر از فرکانس جفت‌ناشدگی است نوسان می‌کند، و دیگری به طور خفیفی غیرهمفاز با همان فرکانس نوسان می‌کند. در وجه دیگر، نوسانگری که کمترین فرکانس را دارد، با فرکانسی که اندکی کمتر از فرکانس جفت‌ناشدگی است نوسان می‌کند، و دیگری به طور همفاز و خفیف با همان فرکانس نوسان می‌کند. در حالت همسازی و یا در نزدیکی آن، وقتی فرکانسهای طبیعی ω_{γ_0} و ω_{γ_0} با هم مساوی‌اند، شرط جفت‌شدگی سست [معادله (۴-۱۶۸)] حتی هنگامی که ضریب جفت‌شدگی بسیار کوچک است، برقرار نیست. در این صورت $\Delta \omega^2$ به وسیله معادله (۴-۱۵۲) داده می‌شود، و برای دو وجه نوسان طبیعی روابط زیر به دست می‌آید:

$$\frac{x_{\gamma}}{x_1} = \pm \sqrt{\frac{m_1}{m_{\gamma}}}, \quad (۴-۱۷۱)$$

$$\omega^2 = \omega_{\gamma_0}^2 \pm k^2 \quad (۴-۱۷۲)$$

دو نوسانگر به طور همفاز یا غیرهمفاز با نسبت دامنه‌ای که فقط به نسبت جرم ذرات بستگی دارد، با فرکانسی بیشتر یا کمتر از فرکانس جفت‌ناشدگی نوسان می‌کنند و این اختلاف به ضریب ثابت جفت‌شدگی بستگی دارد.

یک حالت خاص جالب، موقعی است که دو نوسانگر یکسان (یعنی $m_1 = m_{\gamma}$ و $k_1 = k_{\gamma}$)

با هم جفت شده باشند. در این حالت، جواب عام (۴-۱۶۰) و (۴-۱۶۱) عبارت‌اند از:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (173-4)$$

$$x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (174-4)$$

که در آن ω_1 و ω_2 به وسیله معادله (۴-۱۷۲) داده می‌شوند. اگر $A_2 = 0$ باشد، وجه طبیعی ارتعاش با فرکانس بالا، و اگر $A_1 = 0$ ، وجه طبیعی ارتعاش با فرکانس پایین را خواهیم داشت. فرض کنیم که در ابتدا m_2 در مکان تعادل خود ساکن باشد، در حالی که m_1 به اندازه فاصله A از نقطه تعادل تغییر مکان پیدا کرده و در لحظه $t = 0$ رها شده باشد. ضرایبی که برای این شرایط اولیه مناسب‌اند عبارت‌اند از:

$$\theta_1 = \theta_2 = 0,$$

$$A_1 = -A_2 = \frac{1}{2}A, \quad (175-4)$$

به طوری که معادلات (۴-۱۷۳) و (۴-۱۷۴) به صورت زیر درمی‌آیند

$$x_1 = \frac{1}{2}A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \quad (176-4)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}A (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t), \quad (177-4)$$

که می‌توان آنها را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_1 = A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right), \quad (178-4)$$

$$x_2 = -A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right). \quad (179-4)$$

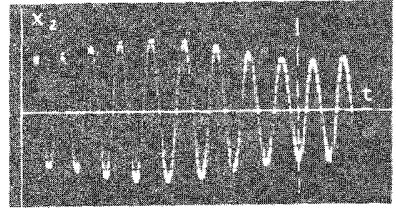
اگر جفت‌شدگی خفیف باشد، ω_1 و ω_2 تقریباً مساوی خواهند بود، و x_1 و x_2 با فرکانس زاویه‌ای $\omega_1 \approx \omega_2 \approx (\omega_1 + \omega_2)/2$ با دامنه‌ای که به‌طور سینوسی با فرکانس زاویه‌ای $(\omega_1 - \omega_2)/2$ تغییر می‌کند، به تندی نوسان می‌کنند. حرکت هر نوسانگر، ترکیبی از دو حرکت وجه طبیعی آن است، که به تپش منجر می‌شود و فرکانس تپش عبارت است از تفاضل دو فرکانس وجه طبیعی. این حالت در شکل ۴-۱۱ که در آن نوسان‌نگارهای حرکت x_2 نشان داده شده، نمایانده شده است: (الف) وقتی که فقط وجه طبیعی با فرکانس بالا وجود دارد، (ب) وقتی که وجه طبیعی با فرکانس پایین وجود دارد، و (پ) وقتی که از ابتدا جرم m_1 به تنهایی تغییر مکان یافته است. در شکل ۴-۱۲ نوسان‌نگارهای x_1 و x_2 چنانکه به وسیله معادلات (۴-۱۷۸) و (۴-۱۷۹) داده شده‌اند، نشان داده می‌شوند. می‌توان دید که نوسانگرها به علت جفت‌شدگی، انرژی خود را به‌طور تناوبی مبادله می‌کنند. شکل ۴-۱۳ همان حرکت را وقتی فنرهای k_1 و k_2 به درستی مساوی نیستند، نشان می‌دهد. در این حالت، نوسانگر m_1 تمام انرژی خود را به هنگام تپش به m_2 نمی‌دهد. شکل ۴-۱۴ نشان می‌دهد که اثر افزایش جفت‌شدگی این است که فرکانس تپش $\omega_1 - \omega_2$ [معادله (۴-۱۷۲)] بالا رود.

اگر نیرویی اصطکاکی بر هریک از نوسانگرها وارد شود، معادلات حرکت (۴-۱۳۵) و (۴-۱۳۶)

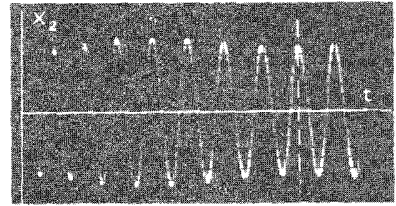
چنین خواهند شد:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k'_1 x_1 + k_2 x_2 = 0, \quad (180-4)$$

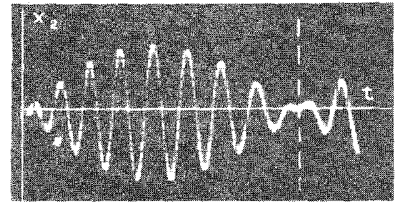
$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + k'_2 x_2 + k_1 x_1 = 0, \quad (181-4)$$



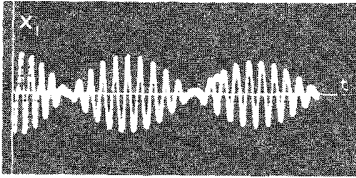
(الف)



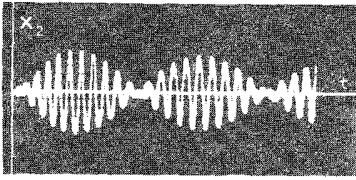
(ب)



(ج)

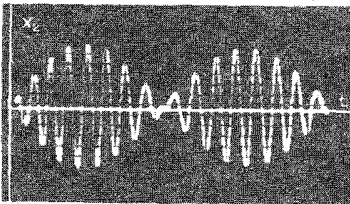


(الف)

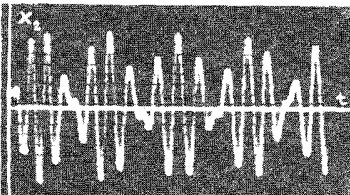


(ب)

شکل ۴-۱۱ حرکت دو نوسانگر هارمونیک جفت شده. شکل ۴-۱۲ حرکت دو نوسانگر مشابه جفت شده. (الف) وجه طبیعی یا فرکانس بالا. (ب) وجه طبیعی یا فرکانس کم. (پ) حالتی که m_1 از ابتدا تغییر مکان پیدا کرده است.

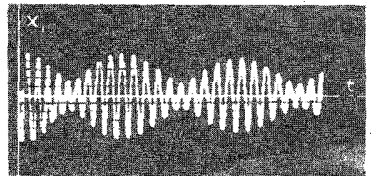


(الف)

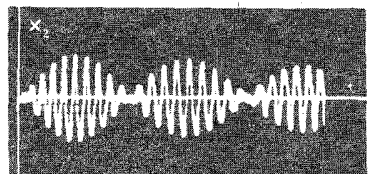


(ب)

شکل ۴-۱۴ حرکت دو نوسانگر جفت شده. (الف) جفت شدگی سست. (ب) جفت شدگی قوی.



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱۳ حرکت دو نوسانگر غیرمتشابه جفت شده.

که در آن b_1 و b_2 ضرایب اصطکاکی است. اگر توابع x_1 و x_2 معادلات (۴-۱۴۱) و (۴-۱۴۲) را در معادلات بالا جایگزین کنیم، معادلهٔ ویژهٔ درجه چهارمی بر حسب p به دست می آید:

$$m_1 m_2 p^4 + (m_2 b_1 + m_1 b_2) p^3 + (m_2 k_1' + m_1 k_2' + b_1 b_2) p^2 + (b_1 k_2' + b_2 k_1') p + (k_1' k_2' - k_p^2) = 0. \quad (۴-۱۸۲)$$

این معادله را نمی توان به سهولت معادلهٔ (۴-۱۴۷) حل کرد. به طور کلی چهار ریشهٔ p مختلط اند و (اگر b_1 و b_2 بیش از حد بزرگ نباشند) به صورت زیرند:

$$p = -\gamma_1 \pm i\omega_1,$$

$$p = -\gamma_2 \pm i\omega_2. \quad (۴-۱۸۳)$$

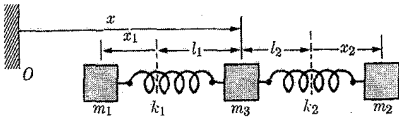
از بررسی ضرایب معادلهٔ (۴-۱۸۲)، به طور جبری (و البته نه به سادگی) می توان نشان داد که چرا ریشه ها بدین صورت و γ_1 و γ_2 مثبت اند. از نظر فیزیکی واضح است که ریشه ها به صورت (۴-۱۸۳) اند، زیرا این ریشه ها به ارتعاشات میرا منجر می شوند، یعنی نتیجه ای که با وجود اصطکاکی انتظار داریم. اگر b_1 و b_2 به اندازهٔ کافی بزرگ باشند، یک یا هر دو جفت ریشه های مختلط ممکن است یک جفت ریشهٔ منفی حقیقی شوند، در نتیجه وجه یا وجوه طبیعی مربوط به آنها تند میراست. به طور کلی، وقتی اندازهٔ عددی ضرایب داده شده باشد، یک جواب عملی معادلهٔ (۴-۱۸۲) را می توان فقط با استفاده از روشهای عددی به دست آورد. اگرچه جواب جبری تقریبی زمانی به دست می آید که میرایی بسیار کوچک باشد.

اگر هر یک از اجرام دو نوسانگر هارمونیک جفت شده تحت تأثیر نیرویی قرار گیرند که به طور هارمونیک نوسان می کند، مسئلهٔ حرکت دستگاه را می توان به روشهایی شبیه آنچه در مورد نوسانگر هارمونیک تنها به کار می رود، حل کرد. یک جواب حالت پاینده می توان پیدا کرد که در آن هر دو نوسانگر با فرکانس نیروی اعمال شده و با دامنه ها و فازهای معینی حرکت می کنند که به اجرام و ضرایب ثابت فنری و میرایی و دامنه و فاز نیروی وارد بستگی دارد. دستگاه هنگامی با نیروی اعمال شده همساز است که فرکانس آن فرکانس یکی از وجوه طبیعی ارتعاش باشد. در این صورت جرمها با دامنه های بزرگی که فقط به وسیلهٔ میرایی محدود می شود، نوسان می کنند. جواب عام عبارت است از جواب حالت پاینده به علاوهٔ جواب عام مسئلهٔ نوسان آزاد. اصل ترکیب را می توان ثابت کرد که بنابر آن اگر چند نیرو بر هر یک از نوسانگرها و یا بر هر دو وارد شوند، جواب، حاصل جمع جوابهای هر یک از نیروهای وارد به صورت جدا خواهد بود. این قضیه را می توان برای حل مسئله ای به کار برد که نیروهای دلخواه بر دو جرم وارد می شوند.

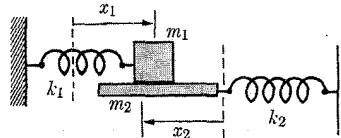
علاوه بر جفت کردن دو نوسانگر به وسیلهٔ یک فنر مانند مثال فوق، انواع دیگری برای جفت کردن دو نوسانگر وجود دارد. مثلاً نوسانگرها ممکن است از طریق نیروهای اصطکاکی با هم جفت شده باشند. مثالی ساده حالتی است که یک جرم بر روی جرم دیگر بلغزد، مانند شکل ۴-۱۵. فرض می کنیم که نیروی اصطکاکی با سرعت نسبی دو جرم متناسب باشد. در این صورت معادلات حرکت m_1 و m_2 عبارت اند از:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - b(\dot{x}_1 + \dot{x}_2), \quad (۴-۱۸۴)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - b(\dot{x}_2 + \dot{x}_1), \quad (۴-۱۸۵)$$



شکل ۴-۱۶ جفت شدن از طریق یک جرم.



شکل ۴-۱۵ جفت شدن از طریق اصطکاک.

یا

$$m_1 \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + k_1 x_1 + b \dot{x}_\nu = 0, \quad (186-4)$$

$$m_\nu \ddot{x}_\nu + b \dot{x}_\nu + k_\nu x_\nu + b \dot{x}_1 = 0. \quad (187-4)$$

جفت‌شدگی در معادلات (۴-۱۸۶) و (۴-۱۸۷) توسط جمله‌ای در معادله حرکت هر یک از نوسانگرها ظاهر می‌شود که به سرعت نوسانگر دیگر بستگی دارد. همچنین ممکن است نوسانگرها به وسیله یک جرم با هم جفت شوند، مانند شکل ۴-۱۶. نوشتن معادلات حرکت را به عهده خواننده می‌گذاریم (به مسئله ۴۰ در انتهای این فصل مراجعه کنید).

دو نوسانگر ممکن است طوری به هم جفت شوند که نیروی وارد بر یکی به مکان و سرعت و شتاب دیگری و یا به ترکیبی از اینها بستگی داشته باشد. به‌طور کلی، هر سه نوع جفت‌شدگی تا حدودی رخ می‌دهد، مثلاً یک فنر همیشه دارای جرم است و تحت تأثیر نیروی اصطکاک داخلی است. بنابراین عام‌ترین زوج معادلات دو نوسانگر هارمونیک جفت شده به صورت زیر است:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + m_c \ddot{x}_\nu + b_c \dot{x}_\nu + k_c x_\nu = 0, \quad (188-4)$$

$$m_\nu \ddot{x}_\nu + b_\nu \dot{x}_\nu + k_\nu x_\nu + m_c \ddot{x}_1 + b_c \dot{x}_1 + k_c x_1 = 0. \quad (189-4)$$

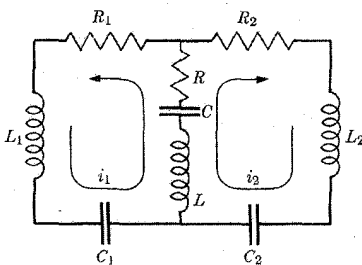
این معادلات را می‌توان به وسیله روشهایی که در بالا شرح داده شد حل کرد و همان نتایج را به دست آورد. اگر نیروهای اصطکاک خیلی بزرگ نباشد، دو وجه طبیعی ارتعاش ظاهر خواهد شد.

معادلاتی به صورت معادلات (۴-۱۸۸) و (۴-۱۸۹)، یا حالات ساده‌تر خاصی که در بخش پیشین مورد بحث قرار گرفت، نه تنها در نظریه نوسانگرهای مکانیکی جفت شده، بلکه در نظریه مدارهای الکتریکی جفت شده نیز ظاهر می‌گردند. اگر قانون دوم کیرشهف را در مورد دو حلقه مدار نشان داده شده در شکل ۴-۱۷، که جریانهای حلقه‌ای i_1 و i_2 از آنها می‌گذرد، به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$(L + L_1) \ddot{q}_1 + (R + R_1) \dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} \right) q_1 + L \ddot{q}_\nu + R \dot{q}_\nu + \frac{1}{C} q_\nu = 0, \quad (190-4)$$

و

$$(L + L_\nu) \ddot{q}_\nu + (R + R_\nu) \dot{q}_\nu + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_\nu} \right) q_\nu + L \ddot{q}_1 + R \dot{q}_1 + \frac{1}{C} q_1 = 0, \quad (191-4)$$



شکل ۴-۱۷ مدارهای نوسان‌کننده جفت شده.

که در آن q_1 و q_2 بارهایی اند که به وسیله جریانه‌های حلقه‌های i_1 و i_2 در خازنهای C_1 و C_2 جمع شده‌اند. این معادلات با معادلات (۴-۱۸۸) و (۴-۱۸۹) هم‌شکل‌اند و می‌توان آنها را به وسیله همان روشها حل کرد. در مدارهای الکتریکی، غالباً میرایی به نسبت بزرگ است، و یافتن جواب کاری بس دشوار. بحث این بخش را می‌توان بر حالت تعداد دلخواهی نوسانگر هارمونیک مکانیکی یا الکتریکی جفت شده گسترش داد و نتایج مشابه به دست آورد. عملیات جبری از شدت دشواری تقریباً ممتنع می‌شود مگر آنکه از شگردهای ریاضی پیشرفته استفاده شود. لذا بحث بیشتر درباره این مسئله را تا فصل ۱۲ به تعویق می‌اندازیم.

تمام مسائل ارتعاش الکتریکی و مکانیکی در حالت حدی دامنه‌های کوچک ارتعاش به مسئله‌هایی شامل یک یا چند نوسانگر هارمونیک جفت شده تبدیل می‌شوند. مسائل شامل ارتعاشات ریسمانها و پرده‌های نازک و جامدات الاستیک (کشور)، و ارتعاشات صوتی و الکتریکی در خطوط انتقال و لوله‌ها و حفره‌ها، را می‌توان به مسائل نوسانگرهای جفت شده‌ای تبدیل کرد، که دارای وجوه طبیعی ارتعاش مشابه‌اند. بررسی رفتار یک اتم یا ملکول بنا به مکانیک کوانتم، به یک مسئله ریاضی منجر می‌شود که همان مسئله نوسانگر هارمونیک جفت شده است که در آن سطوح انرژی نقش نوسانگرها و اثرات مخل خارجی نقش مکانیسم جفت‌کننده را ایفا می‌کنند.

مسائل

۱. قانون بقایی برای اندازه حرکت زاویه‌ای حول مبدأ دستگاهی از ذرات که در صفحه‌ای محدودند به صورت ریاضی بیان دارید و سپس آن را ثابت کنید.
۲. آب به میزان ۱۲۰ پوند در دقیقه از ارتفاع ۱۶ فوتی به داخل بشکه‌ای ریخته می‌شود. وزن بشکه ۲۵ پوند است و بر روی ترازویی قرار گرفته است. پس از آن که آب به مدت یک دقیقه به درون بشکه ریخت، ترازو چه وزنی را نشان می‌دهد؟
۳. یک آونگ پرتاییکی که قرار است برای اندازه‌گیری سرعت یک گلوله به کار رود به وسیله معلق نگه داشتن مانعی چوبی به جرم M توسط ریسمانی به طول l درست شده است. آونگ در ابتدا، به طور عمودی به حالت سکون آویزان است. گلوله‌ای به جرم m به مانع شلیک می‌شود و در آن فرو می‌رود. سپس آونگ شروع به نوسان می‌کند و بالا می‌رود تا اینکه ریسمان زاویه حداکثر θ را با محور عمودی می‌سازد. با به کار بردن قوانین بقای مناسب، سرعت اولیه گلوله را بر حسب M ، l ، m و θ به دست آورید.
۴. جعبه‌ای به جرم m روی تسمه انتقالی متحرکی می‌افتد که با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک لغزشی بین جعبه و تسمه μ است. چقدر جعبه در امتداد تسمه می‌لغزد قبل از آنکه با همان سرعت تسمه به حرکتش ادامه دهد؟ چه نیرویی، F ، باید به تسمه وارد شود تا حرکت آن را بعد از اینکه جعبه روی آن افتاد با سرعتی ثابت نگه دارد، و برای چه مدتی؟ ضریب حاصله توسط این نیرو را حساب کنید و بررسی کنید که اندازه حرکت بین زمان قبل از افتادن جعبه روی تسمه و زمانی که جعبه با تسمه حرکت می‌کند، نگه داشته می‌شود. کار انجام شده توسط نیروی F جهت کشیدن تسمه را محاسبه کنید. کار هدر رفته به خاطر اصطکاک بین جعبه و تسمه را حساب کنید. بررسی کنید که انرژی داده شده به تسمه توسط نیروی F درست برابر افزایش انرژی جنبشی جعبه به علاوه انرژی هدر رفته به خاطر اصطکاک است.

۵. بیلچه‌ای به جرم m_1 به بازوی بی‌وزنی به طول l وصل شده است. انتهای بازو در نقطه‌ای لولا شده است، به طوری که بیلچه می‌تواند آزادانه روی کمانی به شعاع l واقع در صفحه قائم نوسان کند. در فاصله l زیر لولا تلی از شن قرار دارد. بیلچه را آنقدر بلند می‌کنیم تا با امتداد قائم زاویه 45° بسازد و سپس آن را رها می‌کنیم. بیل آونگ‌وار فرود می‌آید و مشتکی شن به جرم m_2 از زمین برمی‌دارد. حساب کنید که بازو پس از برداشتن شن تا چه زاویه‌ای نسبت به قائم بالا می‌رود؟ در حل این مسئله باید به دقت در نظر داشت که هر قسمت از نوسان بیلچه تابع کدام یک از قوانین بقا است. از اصطکاک بجز آنچه برای نگهداری شن در درون بیلچه لازم است، صرف‌نظر کنید.

۶. (الف) ماهواره‌ای کروی به جرم m و شعاع a با سرعت v از داخل جوی رقیق با چگالی ρ حرکت می‌کند. با فرض این که بتوان از تندوی ملکولهای هوا در مقایسه با v صرف‌نظر کرد و هر ملکولی که با ماهواره برخورد می‌کند بر جدار آن می‌نشیند، نیروی اصطکاک وارد بر ماهواره را پیدا کنید. (ب) اگر مدار ماهواره دایره‌ای در 400 کیلومتری سطح زمین باشد (شعاع زمین 6370 کیلومتر است)، که در آن $\rho = 10^{-11} \text{ kg/cm}^{-3}$ است، و اگر $a = 1$ متر و $m = 100$ کیلوگرم باشد، تغییر ارتفاع و تغییر زمان تناوب چرخش در یک هفته را حساب کنید.

۷. یک سفینه ماه‌نورد به سطح ماه نزدیک می‌شود. فرض کنید که یک سوّم وزنش سوخت است و سرعت دود حاصله از موتور موشکی اش برابر 1500 متر در ثانیه و شتاب گرانی در سطح ماه یک‌ششم شتاب گرانی در سطح زمین است. این ماه‌نورد چه مدتی می‌تواند روی سطح ماه این طرف و آن طرف برود تا اینکه سوختش تمام شود؟

۸. یک موشک اسباب‌بازی تشکیل شده است از یک بطری پلاستیکی که قسمتی از آن با آب پُر شده و درون آن هوا با فشار بالای p نیز وجود دارد. آب از سوراخی کوچک به مساحت A دفع می‌شود. با فرض اینکه انرژی هدر رفته اصطکاک قابل صرف‌نظر کردن است، که در نتیجه انرژی جنبشی آب فراری برابر کار انجام شده توسط فشار گاز در فشار دادن آن به خارج است، سرعت دودی v را محاسبه کنید. نشان دهید که پیشران این موتور موشکی $2pA$ است. (فرض کنید که آب از سوراخ به مساحت A با سرعت v خارج می‌شود). اگر موشک خالی 500 گرم و اگر در ابتدا 500 گرم آب داشته باشد و اگر $A = 5$ میلی‌متر مربع باشد، چه فشاری لازم است تا اینکه موشک بتواند خودش را در مقابل گرانی حمایت کند؟ اگر موشک سپس رها شود به طوری که به سمت بالا شتاب بگیرد، به چه سرعت حداکثری خواهد رسید؟ به‌طور تقریب چقدر بالا خواهد رفت؟ چه اثراتی در محاسبه صرف‌نظر شده‌اند و چگونه هریک از آنها در نتیجه نهایی مؤثرند؟

*۹. می‌خواهیم موشکی دو مرحله‌ای بسازیم که بتواند یک کلاهک 100 کیلوگرمی را تا سرعت 6000 متر بر ثانیه به درون فضای تهی (خالی از میدان ثقل) شتاب دهد. (در یک موشک دو مرحله‌ای، مرحله اول پس از تمام کردن سوخت خود و پیش از روشن شدن مرحله دوم، جدا می‌شود). فرض کنید که سوخت موشک بتواند به سرعت خروجی 1500 متر در ثانیه برسد و مقتضیات ساختمانی موشک متضمن آن است که یک موشک خالی (بی‌سوخت و کلاهک) ده درصد وزن سوختی که حمل می‌کند، وزن داشته باشد. مناسب‌ترین جرم را برای هر مرحله طوری پیدا کنید که وزن کل موشک در هنگام برخاستن کمترین مقدار باشد. نشان دهید که هرگز نمی‌توان موشکی یک مرحله‌ای ساخت که منظور بالا را عملی سازد.

۱۰. موشکی باید به طور قائم به سمت بالا پرتاب شود. جرم اولیه M_0 است و سرعت خروجی گاز $-u$ و میزان خروج گاز $(dM/dt) = A$ - ثابت‌اند. پس از خروج تمام گاز به جرم ΔM ، موتور موشک بی سوخت می‌ماند. (الف) از اصطکاک هوا صرف نظر کنید و شتاب ثقل g را ثابت فرض کنید و معادله حرکت را به دست آورید و آن را حل کنید. (ب) نشان دهید که اگر M_0 ، u ، و ΔM ثابت باشند، هر چه A میزان خارج شدن گاز از موشک بیشتر باشد یعنی هر قدر سوخت خود را زودتر مصرف کند، حداکثر ارتفاعی که موشک بدان می‌رسد، بزرگتر خواهد بود.

۱۱. فرض کنید که اساساً تمام جرم M جیرسکپ شکل ۴-۱ در حاشیه چرخ به شعاع R متمرکز شده است، و مرکز جرم روی محوری قرار دارد که به فاصله l از نقطه قطبی Q است. اگر جیرسکپ به طور سریع با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد، نشان دهید که سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی محور در مخروطی که با محور عمودی زاویه α می‌سازد، به طور تقریب عبارت است از: $\omega_p = gl / (R^2 \omega^2)$.
 ۱۲. غواصی که در حال انجام ۲/۵ پشتک و ارو است زانوهایش را در بغل می‌گیرد تا سرعت زاویه‌اش را افزایش دهد. نسبت افزایش سرعت زاویه‌ای اش در این حالت را در رابطه با سرعت زاویه‌اش وقتی بدنش به طور مستقیم کشیده شده و دستهایش بالای سرش است، تخمین بزنید. استدلال خود را تشریح کنید.

۱۳. سیاره‌کروی یکنواختی به شعاع a در مداری مدور به شعاع r_0 حول خورشید گردش می‌کند. و نیز با سرعت زاویه‌ای ω ، عمود بر صفحه مدار به دور محور خود می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای دوران بر اثر جذر و مدهای روی سیاره کاهش می‌یابد. فرمولی به دست آورید که r شعاع مدار را به صورت تابعی از ω ، سرعت زاویه‌ای دوران در هر زمان قبل یا بعد بیان کند. [در حل این مسئله به فرمولهای (۵-۹) و (۵-۹۱) احتیاج خواهید داشت]. فرمولهای خود را در مورد زمین به کار برید، و از اثر ماه چشم‌پوشید و پیش‌بینی کنید که وقتی طول مدت روز مساوی سال فعلی شود، زمین از خورشید چقدر دورتر خواهد بود. و اگر اثر ماه را هم منظور کنیم، این فاصله بیشتر خواهد شد یا کمتر؟

*۱۴. گاز و غباری به جرم m ستاره‌ای را به جرم M احاطه کرده است. شعاع ستاره نسبت به فاصله‌های ذرات گاز و غبار قابل اغماض است. اندازه حرکت زاویه‌ای مواد اطراف ستاره در ابتدا L و انرژی جنبشی و پتانسیل کل آن E است. فرض کنید که $m \ll M$ ، به طوری که میدانهای ثقل ناشی از m در مقایسه با میدان ثقل ستاره قابل اغماض باشند. مواد اطراف ستاره به علت اصطکاک داخلی، همواره انرژی مکانیکی از دست می‌دهند. نشان دهید که ΔE حداکثر انرژی‌ای است که ممکن است بدین طریق تلف شود، تا وقتی به آن حد رسید تمام مواد باید بر روی حلقه مدوری، (اما نه الزاماً با توزیعی یکنواخت) دور ستاره قرار گیرد. ΔE و شعاع حلقه را پیدا کنید. (برای حل این مسئله احتیاج خواهید داشت که روش ضرایب نامعین لاگرانژ را به کار برید).

۱۵. ذره‌ای به جرم m_1 ، و انرژی T_{1I} به طور الاستیک (کشوار) با ذره ساکنی به جرم m_2 برخورد می‌کند. اگر ذره m_2 پس از برخورد تحت زاویه ϑ_2 نسبت به جهت اولیه حرکت ذره m_1 از آن دور شود، انرژی T_{2F} داده شده به آن را حساب کنید. نشان دهید که T_{2F} برای برخورد رویاروی بزرگترین مقدار را دارد، و در این حالت، انرژی از دست رفته به وسیله ذره وارد عبارت است از:

$$T_{1I} - T_{2F} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_{1I}$$

۱۶. عکسی که از مسیر یک ذره در اتاق ابر ویلسون برداشته شده است نشان می‌دهد که ذره پس از برخورد با زاویه ϑ_1 پراکنده شده است. مسیر ذره، با جهت حرکت ذره وارد زاویه ϑ_2 می‌سازد. با فرض الاستیک (کشوار) بودن برخورد و این که ذره هدف در آغاز ساکن بوده است، m_1/m_2 ، نسبت اجرام را به دست آورید. (فرض کنید که سرعتها آن قدر کم‌اند که می‌توان روابط کلاسیک را برای انرژی و اندازه حرکت به کار برد).

۱۷. پرتوتونی به جرم m_1 با هسته نامشخص در یک اتاق حبابی به‌طور کشوار (کشسان) برخورد می‌کند و در سراسر زاویه‌های ϑ_1 پراکنده می‌شود. نسبت p_{1F}/p_{1I} ، از انحنای مسیرهای ابتدایی و انتهایی اش تعیین می‌شود. جرم m_2 هسته هدف را پیدا کنید. چگونه می‌توان تعیین کرد که برخورد واقعاً کشوار (کشسان) بود یا نه؟

۱۸. در آزمایشی که در آن ذرات به جرم m_1 با ذرات ساکن به جرم m_2 به‌طور کشوار (کشسان) برخورد می‌کنند، هدف آن است که شماره‌سنجی در محلی گذاشته شود که ذراتی را بشمارد که نیمی از اندازه حرکت اولیه خود را از دست داده‌اند. شماره‌سنج در چه زاویه ϑ_1 با تیر تابنده باید گذاشته شود؟ برای چه بُردی از نسبتهای جرمی m_1/m_2 ، این مسئله جوابی دارد؟

۱۹. نشان دهید که ضریب برگشت در یک برخورد الاستیک (کشوار) برابر واحد است، یعنی نشان دهید که در یک برخورد الاستیک (کشوار) رویاروی بین دو ذره، معادله (۴-۸۵) با $e = 1$ برقرار است.

۲۰. اگر ضریب برگشت e باشد، انرژی Q - از دست رفته را در یک برخورد رویاروی بین ذره‌ای به جرم m_1 با سرعت v_1 و ذره ساکنی به جرم m_2 ، حساب کنید.

۲۱. ذره‌ای به جرم m_1 و اندازه حرکت p_{1I} با ذره دیگری به جرم m_2 و اندازه حرکت p_{2I} که در جهت مخالف حرکت می‌کند، به‌طور الاستیک (کشوار) برخورد می‌کند. اگر ذره m_1 بعد از برخورد تحت زاویه ϑ_1 نسبت به مسیر اصلی خود حرکت کند، اندازه حرکت نهایی آن را پیدا کنید. ۲۲. اصلاحات نسبیتی معادله (۴-۸۱) را هنگامی که ذره وارد m_1 و ذره صادر شده m_2 با تندی ای نزدیک به تندی نور حرکت می‌کنند، پیدا کنید. فرض کنید که ذره پس‌زده m_2 به قدری آهسته حرکت کند که بتوان از رابطه کلاسیک بین انرژی و اندازه حرکت استفاده کرد.

۲۳. ذره‌ای به جرم m_1 و اندازه حرکت p_1 با ذره ساکنی به جرم m_2 برخورد می‌کند. واکنشی رخ می‌دهد که دو ذره به جرمهای m_3 و m_4 از آن نتیجه می‌شوند که بعد از برخورد تحت زوایای ϑ_3 و ϑ_4 نسبت به مسیر اولیه m_1 حرکت می‌کنند. انرژی تولید شده در واکنش را برحسب جرم ذرات و زوایا و اندازه حرکت p_1 پیدا کنید.

۲۴. واکنشی هسته‌ای که Q آن معلوم است، در یک صفحه حساس عکاسی رخ می‌دهد که در آن مسیرهای ذره وارد m_1 و دو ذره m_2 و m_3 حاصل از واکنش را می‌توان دید. انرژی ذره وارد را برحسب m_1 ، m_2 ، m_3 و Q و زوایای ϑ_2 و ϑ_3 بین مسیر ذره وارد و مسیر نهایی دو ذره پیدا کنید. اگر $Q = 0$ باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟

۲۵. یک توپ بلیارد روی میز بی‌اصطکاک می‌لغزد و به یک توپ ساکن مشابه برمی‌خورد. توپها محل برخورد را با زوایای $\pm\vartheta$ با جهت اصلی حرکت، ترک می‌کنند. نشان دهید که بعد از برخورد، توپها باید دارای یک انرژی چرخشی برابر با $[\cos^{-2}(\vartheta/2) - 1]$ از انرژی جنبشی اولیه باشند، به فرض آنکه هیچ انرژی به‌خاطر اصطکاک به هدر نرفته باشد.

۲۶. یک ذره خنثی با جهت و اندازه حرکت نامشخص در یک اتاقک حبابی عکس‌العملی ایجاد می‌کند که از آن دو ذره باردار به جرمهای m_1, m_2 با اندازه‌های حرکت p_1, p_2 ناشی می‌شود. زاویه بین مسیرهایشان α است. مطلوب است جهت و اندازه حرکت ذره تابنده. اگر جرم m_1 ذره تابنده معلوم باشد یا بتوان گمان کرد، انرژی Q رها شده در عکس‌العمل را پیدا کنید.

۲۷. پراکندگی کامپتون^۱ اشعه X را می‌توان به صورت^۱ منتجه برخورد الاستیک (کشور) فوتونهای اشعه X و الکترونهای آزاد تعبیر کرد. طبق نظریه کوانتم، انرژی و اندازه حرکت خطی فوتونی به طول موج λ ، به ترتیب عبارتند از hc/λ و h/λ که در آن h ضریب ثابت پلانک و c تندی نور است. در پدیده کامپتون، یک دسته اشعه X با طول موج معلوم λ_I در جهت معلومی، هنگام عبور از ماده پراکنده می‌شود، و طول موج تشعشع پراکنده λ_F تحت زاویه ϑ_1 ، نسبت به اشعه وارد دارای طول موج بزرگتری است که تابع زاویه پراکندگی است. فرض کنید که فوتون وارد با الکترون ساکنی به جرم m برخورد الاستیک (کشور) انجام دهد، معادلاتی به دست آورید که بقای انرژی و اندازه حرکت را بیان کنند. با استفاده از روابط نسبیتی انرژی و اندازه حرکت الکترون نشان دهید که تغییر طول موج اشعه X عبارت است از:

$$\lambda_F - \lambda_I = (h/mc)(1 - \cos \vartheta_1),$$

و زاویه الکترون صادر چنین است:

$$\tan \vartheta_2 = \frac{\sin \vartheta_1}{[1 + (h/\lambda_I mc)](1 - \cos \vartheta_1)}.$$

۲۸. معادله (۳-۲۶۷) را طوری اصلاح کنید که حرکت جرم مرکزی M در اثر جرم چرخان m منظور گردد. یک جفت ستاره به گرد یکدیگر می‌چرخند، و آنقدر بهم نزدیک‌اند که در دوربین نجومی به صورت ستاره واحدی دیده می‌شوند. به وسیله مشاهدات طیف شناختی معلوم می‌شود که جرم دو ستاره باهم مساوی است و هر یک تحت تأثیر نیروی ثقل ستاره دیگر با زمان تناوب τ و تندی v روی مسیر دایره‌ای شکلی به گرد دیگری می‌گردند. با استفاده از فرمول اصلاح شده خود، جرم هر یک از ستاره‌ها را به دست آورید.

۲۹. یک کشتی فضایی به جرم m و سرعت اولیه v به سمت زمین می‌آید و از آن می‌گذرد. فاصله نزدیکترین نزدیکی R (که از مرکز ماه اندازه‌گیری شده) است. سرعت v بر سرعت مداری ماه V عمود است. نشان دهید که اگر کشتی فضایی از پشت ماه بگذرد انرژی خواهد گرفت، و افزایش انرژی جنبشی اش را وقتی مجاورت ماه را ترک می‌کند، حساب کنید. فرض کنید $M \gg m$ که در آن M جرم ماه است.

۳۰. ستاره‌ای به جرم m و سرعت اولیه v به ستاره دومی به جرم $2m$ که در حال سکون است، نزدیک می‌شود. ستاره اول در ابتدا در امتداد خطی حرکت می‌کند که اگر ادامه دهد به فاصله s از ستاره دوم خواهد گذشت. سرعت نهایی و جهت حرکت هر یک از ستاره‌ها را پیدا کنید.

۳۱. نشان دهید که اگر ذره وارد بسیار سنگین‌تر از ذره هدف باشد (یعنی $m_1 \gg m_2$)، $d\sigma$ سطح مقطع مؤثر رادرفورد [معادله (۳-۲۷۶)] در مختصات آزمایشگاهی به طور تقریب عبارت است از:

$$d\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{2m_2 v^2} \right)^2 \frac{4\gamma^2}{[1 - (1 - \gamma^2 \vartheta_1^2)^{1/2}]^2 (1 - \gamma^2 \vartheta_1^2)^{1/2}} 2\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1$$

در صورتی که $\gamma \vartheta_1 < 1$ که در آن $\gamma = m_1/m_2$ و در غیر این صورت $d\sigma = 0$.

۳۲. رابطه‌ای مشابه معادله (۴-۱۱۶) برای زاویه پس زدن ذره هدف [یعنی ϑ_p در شکل ۴-۷] برحسب زاویه پراکندگی Θ در مسئله یک جسمی معادل پیدا کنید. نشان دهید که برای یک برخورد الاستیک (کشوار): $\Theta = (\pi - \vartheta_p) / 2$.

۳۳. فرض کنید که $m_p \gg m_1$ ، و در معادله (۴-۱۱۷)، زاویه $\delta = \vartheta_p + \Theta$. فرمولی برای δ برحسب ϑ_1 پیدا کنید. نشان دهید که تصحیح مرحله اول سطح مقطع پراکندگی رادرفورد [معادله (۳-۲۷۶)] ناشی از جرم متناهی m_p ، از بین می‌رود.

۳۴. کره کشواری (کشسانی) به شعاع a با کره کشوار (کشسان) مشابه دیگری که در حالت سکون است، برخورد می‌کند. فرض کنید که در مرکز دستگاه مختصات جرمی، هریک از کره‌ها (پس از برخورد) چنان به جای خود برمی‌گردند که سرعت‌های نسبی قبل و بعد از برخورد زوایای مساوی با بردار نرمال به کره‌ها در نقطه برخورد، می‌سازند. سطح مقطع برای پراکندگی کره تابنده در سراسر زاویه‌ای ϑ_1 را پیدا کنید.

۳۵. یک جفت جرمهای m_1, m_2 که توسط فنری با نیروی ثابت k بهم وصل شده‌اند، بدون اصطکاک در امتداد محور x می‌لغزند. نشان دهید که مرکز جرم با سرعتی یکنواخت حرکت می‌کند و جرمها با فرکانس $(k(m_1 + m_2) / m_1 m_2)^{1/2}$ نوسان می‌کنند.

۳۶. معادلات حرکت را برای شکل ۴-۱۰ با فرض آن که طول هر فنر در حالت آزاد l ، و فاصله بین دیوارها $a + 3l$ است بنویسید، به طوری که حتی در حالت تعادل نیز، فنرها کشیده شده‌اند. نشان دهید که معادلات را می‌توان به همان صورت معادلات (۴-۱۳۵) و (۴-۱۳۶) نوشت.

۳۷. برای وجه طبیعی ارتعاش داده شده به وسیله معادلات (۴-۱۶۲) و (۴-۱۶۳)، نیروی وارد شده بر m_1 از طریق فنر جفت‌کننده را به دست آورید، و نشان دهید که حرکت x_1 ، در معادله نوسانگر هارمونیک ساده‌ای که تحت تأثیر چنین نیروی محرکی قرار گرفته است صدق می‌کند.

۳۸. در شکل ۴-۱۰، $m_1 = m_2 = m$ ، $k_1 = k$ ، $k_2 = 0.9k$ ، $k_3 = 0.1k$. در ابتدا جرم m_2 در محل تعادلش ثابت نگه داشته شده است و جرم m_1 به اندازه فاصله A از محل تعادلش کشیده شده است، و سپس هر دو جرم رها می‌شوند. $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را به دست آورید و نشان دهید که جوابتان به طور کیفیتی با شکل ۴-۱۳ توافق دارد.

۳۹. دو وجه طبیعی ارتعاش یک جفت نوسانگر هارمونیک میرای یکسان جفت شده را [معادلات (۴-۱۸۰) و (۴-۱۸۱)] به دست آورید. یعنی $m_1 = m_2$ ، $b_1 = b_2$ ، و $k_1 = k_2$. [راهنمایی. اگر $k_p = 0$ باشد، جواب را به تحقیق می‌توانید به دست آورید. خواهید دید که این نکته در فاکتورگیری معادله ویژه‌ای که برای تعیین ریشه‌های p به دست می‌آورد مفید واقع می‌شود.]

۴۰. معادلات حرکت دستگاهی را که در شکل ۴-۱۶ نشان داده شده است بنویسید. طولهای دو فنر در حالت آزاد عبارت‌اند از l_1 و l_2 . مسئله را به صورت دو مسئله از هم جدا کنید، یک شامل حرکت مرکز جرم، و دیگری شامل «حرکت داخلی» که به وسیله دو مختصه x_1 و x_2 بیان می‌شود. وجوه طبیعی ارتعاش را پیدا کنید.

۴۱. دستگاه نوسانگرهای جفت شده در شکل ۴-۱۰ تحت تأثیر نیروی $F = F_0 \cos \omega t$ که به جرم m_1 اعمال شده است قرار گرفته است. معادلات حرکت را بنویسید و جواب حالت پاینده را پیدا کنید. دامنه و فاز نوسانهای هر نوسانگر را به صورت تابعی از ω رسم کنید.

اجسام صلب - دوران حول یک محور - استاتیک

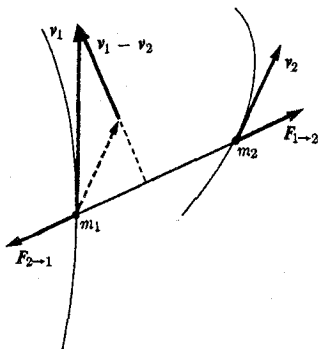
۱-۵ مسئله دینامیکی حرکت یک جسم صلب

برای اینکه بتوانیم قضایای فصل قبل را در مورد حرکت یک جسم صلب به کار ببریم، باید جسم صلب را به صورت دستگاهی از ذرات بسیاری که مکانهای آنها نسبت به یکدیگر ثابت باقی می ماند، در نظر بگیریم. می توان یک جسم صلب را به صورت دستگاهی از ذرات که فواصل دوه دوی آنها ثابت است، تعریف کرد. نیروهایی که ذرات را در فواصل ثابت از یکدیگر نگه می دارد، نیروهای داخلی اند، و می توان تصور کرد که این نیروها به وسیله میله های صلب بی وزنی که بین هر دو ذره وصل شده اند، وارد می شوند. چنین نیروهایی که روابط ثابت مشخصی را بین ذرات یک دستگاه برقرار می دارند، نیروهای قیدی نامیده می شوند. این نیروهای قیدی را همواره می توان تابع قانون سوم نیوتن (به صورت قوی) در نظر گرفت، زیرا این قیود را می توان از طریق میله های صلبی که به وسیله مفاصل همه سویی بی اصطکاکی به ذرات وصل شده باشند، برقرار تصور کرد. بنابراین می توان قضایای بقای اندازه حرکت خطی و زاویه ای را در مورد حرکت یک جسم صلب به کار برد. برای یک جسم کاملاً صلب، قضیه بقای انرژی مکانیکی نیز معتبر است، زیرا می توان به وسیله قانون سوم نیوتن نشان داد که نیروهای قیدی هیچ گونه کاری در حرکت صلبی دستگاهی از ذرات، انجام نمی دهند. کار انجام شده به وسیله نیروی وارد از میله ای متحرک بر ذره ای که در یک انتهای آن واقع است با کار انجام شده توسط نیروی وارد از میله بر ذره انتهای دیگر آن مساوی و مختلف جهت است، زیرا هر دو ذره دارای مؤلفه های سرعتی مساوی در امتداد میله اند، (شکل ۱-۵):

$$\begin{aligned} F_{2 \rightarrow 1} \cdot v_1 + F_{1 \rightarrow 2} \cdot v_2 &= F_{2 \rightarrow 1} \cdot v_1 - F_{2 \rightarrow 1} \cdot v_2 \\ &= F_{2 \rightarrow 1} \cdot (v_1 - v_2) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1-5)$$

معادلات حرکت یک جسم صلب را براساس این قوانین بقا به دست خواهیم آورد. هیچ جسم جامد واقعی هرگز کاملاً صلب نیست، لذا نظریه حرکت اجسام صلب، تقریبی آرمانی از حرکت اجسام واقعی است. مع هذا، در بسیاری از کاربردها، صلبی نبودن راستین اجسام جامد واقعی، چندان مهم نیست. فرض اینکه اجسام صلب آرمانی را می توان مرکب از ذرات نقطه ای آرمانی که در فواصل ثابتی از یکدیگر نگه داشته شده اند دانست نیز به همین قیاس است.

یک جسم جامد با اندازه معمولی از تعدادی چنان بی شمار از اتمها و ملکولها تشکیل شده



شکل ۵-۱ نیروهای وارد از دو ذره‌ای که به وسیله یک میله صلب به هم وصل شده‌اند.

است، که برای اغلب مقاصد فیزیکی مناسب‌تر آن است که سازه آن را با تعیین چگالی متوسط آن بر واحد حجم ρ ، در هر نقطه از جسم بنمایانیم. چگالی به وسیله رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = \frac{dM}{dV}, \quad (۲-۵)$$

که در آن dM جرم کل جسم در حجم dV است که باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود که تعداد زیادی اتم را دربرگیرد، و در عین حال آن قدر کوچک، که خواص ماده در داخل حجم dV عملاً یکنواخت باشد. فقط وقتی بتوانیم واحد حجمی را که واجد این دو شرط باشد در همسایگی نقطه‌ای در جسم انتخاب کنیم، می‌توانیم چگالی ρ را به‌طور مناسب در آن نقطه تعریف کنیم. در فرمولهای جرم کل، و اندازه حرکت کل و غیره، جمع بر روی تمام ذرات را می‌توان به انتگرال بر روی حجم جسم مبدل کرد. به‌عنوان مثال، جرم کل عبارت است از:

$$M = \sum_i m_i = \iiint_{\text{(جسم)}} \rho dV. \quad (۳-۵)$$

در بخشهای بعدی مثالهای بیشتری داده خواهد شد.

برای توصیف مکان یک جسم صلب در فضا، شش مختصه لازم است. به‌عنوان مثال، می‌توان مختصات (x_1, y_1, z_1) نقطه‌ای مانند P_1 در جسم را مشخص کرد. هر نقطه دیگر جسم مثلاً P_4 به فاصله r از P_1 بر روی کره‌ای به شعاع r و مرکز (x_1, y_1, z_1) قرار خواهد داشت. می‌توان P_4 را به وسیله دو مختصه بر روی این کره مشخص کرد، مثلاً زوایای مختصات کروی θ_4 ، φ_4 نسبت به مجموعه‌ای از محورها، که از نقطه (x_1, y_1, z_1) می‌گذرند. هر نقطه سومی مانند P_3 در فاصله $a \neq 0$ از خط واصل P_1 و P_4 باید بر روی دایره‌ای به شعاع a حول این خط قرار گیرد. می‌توان نقطه P_3 را به وسیله یک مختصه بر روی این دایره مشخص کرد. بنابراین برای مشخص کردن سه نقطه P_1 ، P_4 ، و P_3 یک جسم، شش مختصه لازم داریم، و چون سه نقطه غیر واقع بر روی یک خط معین شوند، مکانهای تمام نقاط یک جسم صلب معین خواهند بود. روشهای مختلف بسیاری برای انتخاب شش مختصه وجود دارد که به وسیله آنها بتوان مکان یک جسم در فضا را مشخص کرد.

معمولاً سه تا از شش مختصه به روش فوق برای مشخص کردن نقطه‌ای در جسم به کار می‌روند. سه مختصه باقیمانده توجیه جسم را حول این نقطه معین می‌کنند.

اگر جسمی به هیچ تکیه گاهی بسته نشده باشد، به طوری که بتواند آزادانه به هر طریق، حرکت کند، صلاح آن است که مرکز جرم را به عنوان نقطه‌ای انتخاب کنیم که باید به وسیله سه مختصه (X, Y, Z) یا به وسیله بردار R مشخص شود. بنابراین حرکت مرکز جرم R به وسیله قضیه اندازه حرکت خطی معین می‌شود، که می‌توان آن را به صورت معادله (۴-۵) بیان داشت:

$$M\ddot{R} = F, \quad (4-5)$$

که در آن M جرم کل و F نیروی کل خارجی است. معادله حرکت دورانی حول مرکز جرم به وسیله قضیه اندازه حرکت زاویه‌ای (۴-۲۸) داده می‌شود:

$$\frac{dL}{dt} = N, \quad (5-5)$$

که در آن L اندازه حرکت زاویه‌ای و N گشتاور حول نقطه R است. اگر نیروی F چنانکه در مورد حرکت یک جسم در میدان ثقل یکنواخت، از طرز قرارگیری جسم در فضا مستقل باشد، حرکت مرکز جرم از حرکت دورانی مستقل خواهد بود، و معادله (۴-۵) معادله جداگانه‌ای است که می‌توان آن را به وسیله روشهای فصل ۳ حل کرد. اگر گشتاور N از مکان مرکز جرم R مستقل، یا اگر $R(t)$ از قبل معلوم باشد، به طوری که N را بتوان به صورت تابعی از زمان و تابعی از طرز قرارگیری جسم حساب کرد، در این صورت، حرکت دورانی حول مرکز جرم را می‌توان از معادله (۵-۵) معین کرد. در حالت کلی تر، وقتی F و N هر یک به مکان و طرز قرارگیری جسم هر دو بستگی داشته باشند، معادلات (۴-۵) و (۵-۵) را باید به صورت شش معادله جفت شده، در مجموعه مناسبی از مختصات به طور همزمان حل کرد. ما درصدد بررسی این حالت بر نخواهیم آمد، اگرچه خواننده پس از مطالعه فصل ۱۱ قادر خواهد بود شش معادله‌ای را که باید حل شود برای خود بنویسد.

اگر جسم مقید باشد که به وسیله تکیه گاههای خارجی حول نقطه ثابت O بچرخد، در این صورت گشتاورها و گشتاور-نیروها را باید حول آن نقطه حساب کرد، و باید معادله (۵-۵) را برای دوران حول نقطه O حل کرد. در این حالت معادله (۴-۵) فقط برای تعیین نیروی قیدی لازم برای ساکن نگه داشتن نقطه O ، به کار می‌رود.

اشکال به کار بردن معادله (۵-۵) در انتخاب سه مختصه‌ای است که برای توصیف طرز قرارگیری جسم در فضا لازم است. اولین فکری که به مغز خطور می‌کند این است که مکان صفری برای جسم اختیار کنیم، و هر توجیه دیگری را به وسیله زوایای دوران φ_x ، φ_y ، و φ_z حول سه محور متعامد که برای قرار دادن جسم به این وضع لازم است، مشخص کنیم. مع هذا، کمی تجربه با جسم جامد، هرکس را متقاعد می‌کند که هیچگونه دستگاه محوره‌های مناسبی از این نوع وجود ندارد. به عنوان مثال طرز قرارگیری مشخص شده به وسیله $\varphi_x = 90^\circ$ ، $\varphi_y = 90^\circ$ ، و $\varphi_z = 0^\circ$ را در نظر بگیرید. اگر جسمی ابتدا به اندازه 90° حول محور x و سپس به اندازه 90° حول محور y و سپس 90° حول محور x خواهد گرفت که با وضع قرارگیری نهایی آن پس از دوران 90° حول محور y و سپس 90° حول محور x متفاوت خواهد بود. مشاهده می‌کنیم که هیچگونه مجموعه ساده‌ی متقارن مختصاتی نمی‌توان یافت که

طرز قرارگیری جسمی را همانند مختصات x ، y ، و z که مکان نقطه‌ای را در فضا مشخص می‌کند توصیف کند. بنابراین حل مسئله به نسبت مشکل دوران جسمی حول یک نقطه را تا فصل ۱۱ به تعویق می‌اندازیم. در اینجا فقط مسئله ساده دوران حول یک محور ثابت را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۵-۲ دوران حول یک محور

اگر جسمی آزاد باشد که فقط حول یک محور ثابت دوران کند، برای مشخص کردن طرز قرارگیری آن در فضا فقط یک مختصه لازم خواهد بود. محور ثابت دوران را محور z اختیار می‌کنیم، و خطی مثل \overline{OA} در جسم را در، یا به موازات صفحه xy عمود بر محور اختیار می‌کنیم. مکان جسم را به وسیله مشخص کردن زاویه θ ، بین خط \overline{OA} در جسم و محور x ، معین می‌کنیم. با استفاده از مختصات استوانه‌ای برای مشخص کردن هر ذره در جسم، اندازه حرکت زاویه‌ای کل حول محور z را حساب می‌کنیم، (شکل ۵-۲ را ببینید). به جای ρ_i از r_i برای نمایش فاصله ذره m_i از محور z استفاده می‌کنیم، تا با چگالی ρ اشتباه نشود:

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\varphi}_i. \quad (6-5)$$

فرض کنید زاویه β_i بین امتداد خط \overline{OA} در جسم و امتداد شعاع از محور z تا ذره m_i باشد. در این صورت β_i برای یک جسم صلب ثابت است، و

$$\varphi_i = \theta + \beta_i, \quad (7-5)$$

$$\dot{\varphi}_i = \dot{\theta}. \quad (8-5)$$

اگر روابط فوق را در معادله (۶-۵) جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \dot{\theta} = I_z \dot{\theta}, \quad (9-5)$$

که در آن

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2. \quad (10-5)$$

کمیت I_z برای جسمی که حول محور معینی دوران می‌کند ثابت است و آن را گشتاور ماند حول آن محور می‌نامند. همچنین می‌توان I_z را به صورت انتگرالی بر روی جسم بیان کرد:

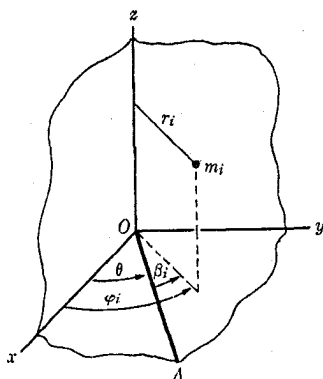
$$I_z = \iiint_V \rho r^2 dV. \quad (11-5)$$

(جسم)

در بعضی موارد، بهتر آن است که شعاع چرخش k_z را که به وسیله معادله زیر تعریف می‌شود وارد کار کرد:

$$Mk_z^2 = I_z; \quad (12-5)$$

به عبارت دیگر، k_z شعاعی است که اگر تمام جرم جسم در فاصله k_z از محور قرار می‌گرفت، گشتاور ماند آن I_z می‌شد.



شکل ۲-۵ مختصات یک ذره در یک جسم صلب.

با استفاده از معادله (۵-۹)، می‌توان مؤلفه معادله (۵-۵) را در امتداد محور دوران، به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dL}{dt} = I_z \ddot{\theta} = N_z, \quad (۱۳-۵)$$

که در آن N_z گشتاور-نیروی خارجی کل حول محور است. معادله (۵-۱۳) معادله دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت است و با معادله (۲-۱) برای حرکت یک ذره در امتداد خطی مستقیم، هم‌شکل است. بنابراین مسئله دوران یک جسم حول یک محور ثابت، معادل مسئله‌ای است که در فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت. تمام روشها و نتایج فصل ۲ را می‌توان مستقیماً طبق طرح تشابهی زیر به مسئله فعلی تعمیم داد:

حرکت دورانی حول یک محور ثابت		حرکت خطی	
θ	مکان زاویه‌ای:	x	مکان:
$\omega = \dot{\theta}$	سرعت زاویه‌ای:	$v = \dot{x}$	سرعت:
$\alpha = \ddot{\theta}$	شتاب زاویه‌ای:	$a = \ddot{x}$	شتاب:
N_z	گشتاور:	F	نیرو:
I_z	گشتاور ماند:	m	جرم:
	انرژی پتانسیل:		انرژی پتانسیل:
$V(\theta) = - \int_{\theta_0}^{\theta} N_z(\theta) d\theta$		$V(x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx$	
$N_z(\theta) = - \frac{dV}{d\theta}$		$F(x) = - \frac{dV}{dx}$	
$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2$	انرژی جنبشی:	$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$	انرژی جنبشی:
$L = I_z \dot{\theta}$	اندازه حرکت زاویه‌ای:	$p = m \dot{x}$	اندازه حرکت خطی:

تنها تفاوت ریاضی بین دو مسئله این است که گشتاور ماند I_z به مکان محور در جسم بستگی دارد، حال آنکه جرم یک جسم به مکان یا حرکت آن بستگی ندارد. البته این موضوع تأثیری در نحوه بررسی حرکت دورانی یک جسم حول یک محور ثابت ندارد.

انرژیهای جنبشی و پتانسیل دورانی که به وسیله معادلات زیر تعریف می شوند:

$$V(\theta) = - \int_{\theta_s}^{\theta} N_z(\theta) d\theta, \quad (14-5)$$

$$N_z = - \frac{dV}{d\theta}, \quad (15-5)$$

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2, \quad (16-5)$$

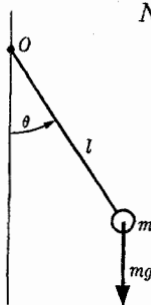
نه فقط با کمیت‌های متناظر خود که به وسیله معادلات (۲-۴۱)، (۲-۴۷)، و (۲-۵) برای حرکت خطی تعریف می شوند متشابه‌اند، بلکه در واقع با انرژیهای جنبشی و پتانسیل دستگامی از ذرات سازنده یک جسم صلب که در فصلهای ۲ و ۴ تعریف کردیم، برابرند. به عنوان مثال، وقتی جسم به اندازه زاویه $\theta - \theta_s$ دوران کند، انرژی پتانسیل تعریف شده به وسیله معادله (۵-۱۴) عبارت است از کار انجام شده در مقابل نیروهایی که گشتاورشان N_z است. انرژی جنبشی تعریف شده به وسیله معادله (۵-۱۶) عبارت است از مجموع انرژیهای جنبشی معمولی حرکت ذرات سازنده جسم. اثبات این مطلب به عنوان تمرین، به عهده خواننده است.

۳-۵ آونگ ساده

به عنوان مثالی برای روش بررسی حرکت دورانی، حرکت آونگ ساده‌ای را در نظر می‌گیریم که از جرم m که به وسیله ریسمان یا میله صلب بی‌وزنی به طول l ، از نقطه ثابت O آویزان شده باشد تشکیل شده است. اگر جرم m به ریسمانی آویخته شده باشد، باید فرض کنیم که نخ کشیده باقی می‌ماند، به طوری که طول l از m تا O ثابت است، در غیر این صورت نمی‌توانیم دستگام را به صورت دستگام صلبی در نظر بگیریم. فقط حرکت آونگ در یک صفحه قائم را در نظر می‌گیریم تا بتوانیم نظریه ساده حرکت حول یک محور ثابت را که از O می‌گذرد به کار ببریم. در این صورت خواهیم داشت، (شکل ۳-۵)

$$I_z = ml^2, \quad (17-5)$$

$$N_z = -mgl \sin \theta, \quad (18-5)$$



شکل ۳-۵ آونگ ساده.

که در آن محور z ، محوری است که از O می‌گذرد و بر صفحه‌ای که آونگ در آن نوسان می‌کند، عمود است. گشتاور را منفی حساب می‌کنیم، زیرا در جهتی است که زاویه θ را کاهش می‌دهد. اگر روابط فوق را در معادله حرکت (۱۳-۵) جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (19-5)$$

حل این معادله ساده نیست. ولی اگر فقط نوسانهای کوچک آونگ را در نظر بگیریم (مثلاً $\theta \ll \pi/2$)، در این صورت $\sin \theta \doteq \theta$ است و می‌توان معادله فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta \doteq 0. \quad (20-5)$$

معادله فوق با معادله (۲-۸۹) برای نوسانگر هارمونیک، هم‌شکل است. جواب آن عبارت است از:

$$\theta = \kappa \cos(\omega t + \beta), \quad (21-5)$$

که در آن

$$\omega = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2}, \quad (22-5)$$

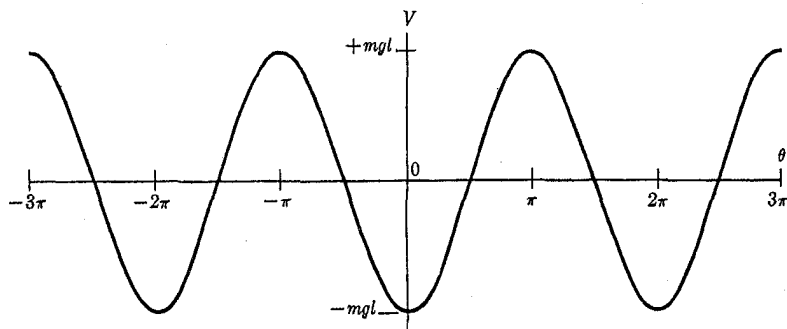
و κ و β ضرایبی دلخواه‌اند که دامنه و فاز نوسان را معین می‌کنند. توجه کنید که فرکانس نوسان مستقل از دامنه است، البته به شرط آنکه دامنه آنقدر کوچک باشد که معادله (۲۰-۵) تقریب خوبی از نوسان باشد. دلیل به کار بردن آونگ برای منظم کردن تندی یک ساعت، بر همین اساس است. می‌توان مسئله حرکتی را که دامنه‌اش بزرگ است به وسیله انتگرال انرژی حل کرد. انرژی پتانسیل وابسته به گشتاور - نیرو که به وسیله معادله (۵-۱۸) داده شده است، عبارت است از:

$$\begin{aligned} V(\theta) &= -\int_{\theta_s}^{\theta} -mgl \sin \theta d\theta \\ &= -mgl \cos \theta, \end{aligned} \quad (23-5)$$

که در آن برای سهولت $\theta_s = \pi/2$ اختیار شده است. می‌توانستیم $V(\theta)$ را بلافاصله به صورت انرژی پتانسیل ثقلی جرم m نسبت به صفحه افقی گذرنده از O ، که آن را سطح انرژی پتانسیل صفر اختیار می‌کنیم، بنویسیم. انتگرال انرژی عبارت است از:

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = E. \quad (24-5)$$

از معادله حرکت (۵-۱۳) می‌توانستیم ثابت کنیم که E ثابت است، ولی احتیاج به چنین کاری نیست، زیرا تشابهی که در بخش قبل توصیف شد، ضامن برقراری تمام قضایای حرکت خطی یک‌بعدی برای حرکت دورانی مشابه آنها حول یک محور است. انرژی پتانسیل $V(\theta)$ در شکل ۴-۵ رسم شده است. مشاهده می‌شود که برای $-mgl < E < mgl$ ، حرکت نوسانی است، و برای E کمی بزرگتر از $-mgl$ ، هارمونیک ساده می‌شود. برای $E > mgl$ ، حرکت غیرنوسانی است، و θ دائماً در حال افزایش یا کاهش است، در حالی که $\dot{\theta}$ بین بزرگترین و کوچکترین مقادیر خود نوسان می‌کند. از نظر فیزیکی وقتی $E > mgl$ است، انرژی آونگ به اندازه‌ای است که آن را



شکل ۴-۵ انرژی پتانسیل آونگ ساده.

به صورت دایره کاملی می چرخاند. (البته در این حالت، جرم باید به عوض یک ریسمان به وسیله میله صلبی نگه داشته شود، مگر آنکه θ خیلی بزرگ باشد). این حرکت هنوز متناوب است، و هر بار که θ به اندازه 2π زیاد و کم شود، آونگ یک چرخش کامل انجام می دهد. در هر حال، سعی در محاسبه θ از حل معادله (۲۴-۵) به معادله زیر منجر می شود:

$$\int_{\theta}^{\theta} \frac{d\theta}{(E/mgl + \cos\theta)^{1/2}} = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} t. \quad (25-5)$$

انتگرال طرف چپ را باید برحسب توابع بیضوی محاسبه کرد. زمان تناوب حرکت را می توان به وسیله انتگرال گیری بین حدهای مناسب، به دست آورد. وقتی حرکت نوسانی است ($E < mgl$)، طبق معادله (۲۴-۵)، حداکثر مقدار θ یعنی κ به وسیله رابطه زیر داده می شود:

$$E = -mgl \cos \kappa \quad (26-5)$$

در این حالت، معادله (۲۵-۵) چنین می شود:

$$\int_{\theta}^{\theta} \frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\kappa)^{1/2}} = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} t, \quad (27-5)$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\int_{\theta}^{\theta} \frac{d\theta}{[\sin^2(\kappa/2) - \sin^2(\theta/2)]^{1/2}} = 2 \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t. \quad (28-5)$$

زاویه θ بین حدود $\pm \kappa$ نوسان می کند. اکنون متغیر جدید φ را وارد می کنیم که به ازای هر نوسان کامل θ از ۰ تا 2π تغییر می کند.

$$\sin \varphi = \frac{\sin \theta/2}{\sin \kappa/2} = \frac{1}{a} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (29-5)$$

که در آن

$$a = \sin \frac{\kappa}{2}. \quad (30-5)$$

با این جایگزینی، معادله (۲۸-۵) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - a^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t, \quad (31-5)$$

که در آن θ را برای سهولت کار صفر اختیار کرده ایم. اکنون انتگرال برای انتگرالهای بیضوی به صورت استاندارد است. وقتی a کوچک است، تابع زیر علامت انتگرال را می توان بر حسب a^2 بسط داد:

$$\int_0^{\varphi} \left[1 + \frac{1}{4} a^2 \sin^2 \varphi + \dots \right] d\varphi = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t. \quad (32-5)$$

از معادله فوق می توان جمله به جمله انتگرال گرفت:

$$\varphi + \frac{1}{8} a^2 (2\varphi - \sin 2\varphi) + \dots = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t. \quad (33-5)$$

اگر φ را مساوی 2π قرار دهیم، زمان تناوب حرکت به دست می آید:

$$\tau = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{a^2}{4} + \dots\right). \quad (34-5)$$

بنابراین وقتی دامنه نوسان بزرگ می شود، زمان تناوب کمی طولانی تر از زمان تناوب نوسانهای کم دامنه می شود، و این پیش بینی را می توان به آسانی به وسیله دو آونگ به طولهای مساوی که با دامنه های نامساوی به نوسان آورده می شوند، به طور تجربی تحقیق کرد. معادله (۳۳-۵) را می توان به طور تقریبی از طریق تقریبهای پی در پی حل کرد و φ را به دست آورد و نتیجه را در معادله (۲۹-۵) قرار داد و θ را از طریق تقریبهای متوالی آن پیدا کرد. نتیجه تا مرحله دوم تقریب عبارت است از:

$$\theta \doteq \left(\kappa + \frac{\kappa^2}{192}\right) \sin \omega' t + \frac{\kappa^3}{192} \sin 3\omega' t, \quad (35-5)$$

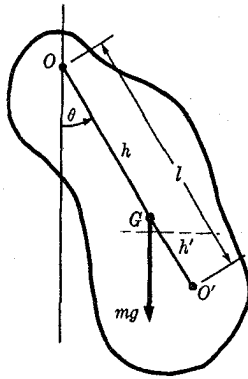
که در آن

$$\omega' = \frac{2\pi}{\tau} = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\kappa^2}{16} + \dots\right). \quad (36-5)$$

اگر از جملات شامل κ^2 و κ^3 صرف نظر کنیم، جواب فوق با معادله (۲۱-۵) مطابقت می کند. در دومین تقریب و در دامنه های بزرگتر، فرکانس کمی کمتر از فرکانس در دامنه های کوچک است، و حرکت θ شامل جمله هارمونیک سوم کوچکی نیز می شود.

۴-۵ آونگ مرکب

جسم صلبی که از محوری آویزان شده است و می تواند به آزادی حول آن نوسان کند، آونگ مرکب نامیده می شود. فرض می کنیم که محور از مرکز جرم نگذاشته باشد، و مکان جسم را به وسیله زاویه θ بین خط قائم و خط واصل نقطه O (واقع بر روی محور) و مرکز جرم G ، مشخص می کنیم، (شکل ۵-۵). برای محاسبه گشتاور - نیروی کل ناشی از ثقل، قضیه ای را از پیش طرح می کنیم (که



شکل ۵-۵ آونگ مرکب.

در آینده ثابت خواهد شد، و بنابر آن گشتاور - نیروی کل همان است که گویی نیروی ثقل کل بر مرکز جرم G وارد می‌شود. با استفاده از معادلات (۵-۱۲) و (۵-۱۳)، خواهیم داشت:

$$Mk_O^y \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta, \quad (۵-۳۷)$$

که در آن h فاصله OG است. اگر طول آونگ را به صورت زیر اختیار کنیم،

$$l = \frac{k_O^y}{h}. \quad (۵-۳۸)$$

معادله (۵-۳۷) همان معادله (۵-۱۹) برای آونگ ساده‌ای به طول l خواهد بود. نقطه O' را به فاصله l از O در امتداد خطی که از مرکز جرم G می‌گذرد، مرکز نوسان نامند. اگر تمام جرم M در O' متمرکز می‌بود، حرکت آونگ برای کلیه شرایط اولیه داده شده، همان حرکت واقعی آن می‌بود، و اگر فاصله $O'G$ را h' فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$l = h + h', \quad (۵-۳۹)$$

$$hh' = k_O^y - h^2. \quad (۵-۴۰)$$

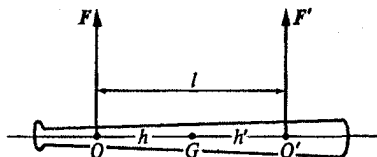
در بخش بعدی نشان خواهیم داد که گشتاور ماند حول هر محور مساوی است با مجموع گشتاور ماند حول محوری موازی و مار بر مرکز جرم G ، و Mh^2 که در آن h فاصله آن محور تا G است. فرض کنید که k_G شعاع چرخش حول G باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$k_O^y = k_G^y + h^2, \quad (۵-۴۱)$$

به طوری که معادله (۵-۴۰) چنین می‌شود:

$$hh' = k_G^y. \quad (۵-۴۲)$$

چون معادله فوق نسبت به h و h' متقارن است، نتیجه می‌گیریم که اگر جسم از محوری مار بر O' آویزان شده باشد، مرکز نوسان، O خواهد بود. g شتاب ثقل را می‌توان با استفاده از



شکل ۴-۵ جسم صلب که از نقطه O آویزان شده است و در نقطه O' ضربه‌ای به آن وارد می‌شود.

معادله (۲۲-۵)، از طریق اندازه‌گیری زمان تناوب نوسانهای کوچک یک آونگ، با دقت زیادی اندازه گرفت. اگر یک آونگ مرکب به کار رود، باید شعاع چرخش یا زمان تناوب اندازه‌گیری شده حول دو محور را (که بهتر است O و O' باشند)، بدانیم، تا بتوانیم شعاع چرخش را از معادلات حذف کنیم. مسئله‌ای که به‌طور نزدیک به آونگ مرکب مربوط می‌شود، مسئله زیر است. جسمی را در نظر بگیرید که حول محوری ثابت که از نقطه O می‌گذرد، آزادانه می‌چرخد (شکل ۴-۵). فرض کنید که ضربه‌ای به نقطه O' و به فاصله l از محور آن وارد شود به‌طوری که جهت ضربه، عمود بر خط OO' از محور به O' باشد و O' را طوری اختیار کنید که خط OO' از مرکز جرم G بگذرد و همچنین طول پاره‌خطهای OG و $O'G$ را به ترتیب h و h' فرض می‌کنیم. ضربه وارد شده در نقطه O' به وسیله نیروی F' طی مدت وارد آمدن ضربه عبارت است از:

$$J' = \int F' dt. \quad (۴۳-۵)$$

در لحظه‌ای که ضربه وارد می‌شود، به‌طور کلی باید نیرویی مانند F در نقطه O روی محور، به جسم وارد شود تا O ثابت بماند. ضربه وارد بر جسم در نقطه O عبارت است از:

$$J = \int F dt. \quad (۴۴-۵)$$

نظر به اینکه ما فقط حرکتش را در زمان کوتاهی بعد از ضربه مدنظر داریم، از تمام نیروهای دیگر روی جسم، بجز دو ضربه F و F' ، صرف‌نظر می‌کنیم. می‌خواهیم ضربه J را پیدا کنیم و به‌ویژه شرایطی را پیدا کنیم که تحت آن $J = 0$ است. برای این کار از قضایای اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای استفاده می‌کنیم.

قضیه اندازه حرکت برای مؤلفه P' اندازه حرکت خطی جسم در جهت F عبارت است از:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} (Mh\dot{\theta}) = F + F', \quad (۴۵-۵)$$

که در آن $\dot{\theta}$ سرعت زاویه‌ای جسم حول O است. با استفاده از این معادله می‌توان اندازه حرکت را درست بعد از وارد شدن ضربه به‌دست آورد.

$$Mh\dot{\theta} = J + J', \quad (۴۶-۵)$$

قضیه بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول O عبارت است از:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (Mk_O^2 \dot{\theta}) = F' l. \quad (۴۷-۵)$$

پس از انتگرال‌گیری از معادله فوق، اندازه حرکت زاویه‌ای بعد از وارد شدن ضربه چنین می‌شود:

$$Mk_O^2 \dot{\theta} = J'l. \quad (48-5)$$

θ را بین معادلات (۴۶-۵) و (۴۸-۵) حذف می‌کنیم:

$$hl = k_O^2 \left\{ 1 + \frac{J}{J'} \right\}. \quad (49-5)$$

اکنون می‌توانیم بر حسب J آن را حل کنیم. بنا به قانون سوم نیوتن، ضربه‌ای مساوی و مختلف‌الجهت ($-J$) در نقطه O به وسیله جسم به محور وارد می‌شود. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در لحظه وارد شدن ضربه، هیچگونه نیروی ضربه‌ای در نقطه O به محور وارد نشود، یعنی $J=0$:

$$hl = k_O^2. \quad (50-5)$$

معادله فوق با معادله (۳۸-۵) متشابه است، و آن را نیز می‌توان به صورت تقارنی [معادله (۴۲-۵)] بیان داشت:

$$hh' = k_G^2. \quad (51-5)$$

نقطه O' را که باید ضربه‌ای به آن وارد شود تا هیچگونه ضربه‌ای در نقطه O احساس نشود، مرکز ضرب نسبت به O نامند. مشاهده می‌کنیم که مرکز ضرب همان مرکز نوسان نسبت به O است، و O نیز مرکز ضرب نسبت به O' است. این مسئله قابل توجه یک بازیکن بیسبال است که کوشش می‌کند توپ بیسبال را با چوب بیسبال بزند. او باید سعی کند که توپ را طوری بزند که نقطه اصابت، همان مرکز ضرب چوب (O') نسبت به دست او (در O) باشد. اگر توپ به نقاطی دورتر از مرکز ضرب به چوب برخورد، ضربه به وسیله چوب بیسبال به دست منتقل خواهد شد. اگر جسمی متکی نباشد، و در نقطه O' ضربه‌ای J' به آن وارد شود، حرکت اولیه آن، دوران حول O نسبت به O' خواهد بود. زیرا اگر باید حول هر نقطه دیگر O شروع به دوران کند، ضربه‌ای J در O لازم خواهد بود. سرعت زاویه‌ای اولیه‌اش $\dot{\theta}$ حول O را می‌توان از معادله (۴۶-۵) (با $J=0$) به دست آورد. البته اگر جسم متکی نباشد، مرکز جرمش بعد از ضربه (تا زمانی که از جاذبه صرف نظر بشود) با سرعت ثابت $h\dot{\theta}$ حرکت خواهد کرد، و جسم با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta}$ دوران خواهد کرد. نقطه O در این حالت ثابت نخواهد ماند اگرچه سرعت اولیه‌اش، درست بعد از ضربه، صفر است.

۵-۵ محاسبه مرکز جرم و گشتاور ماند

در بخش ۴-۱، مرکز جرم یک دستگاه ذرات را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$R = \frac{1}{M} \sum_i m_i r_i. \quad (52-5)$$

برای یک جسم صلب می توان به جای مجموع فوق از انتگرال استفاده کرد:

$$R = \frac{1}{M} \iiint \rho r dV, \quad (53-5)$$

یا به صورت مؤلفه‌ای،

$$X = \frac{1}{M} \iiint \rho x dV, \quad (54-5)$$

$$Y = \frac{1}{M} \iiint \rho y dV, \quad (55-5)$$

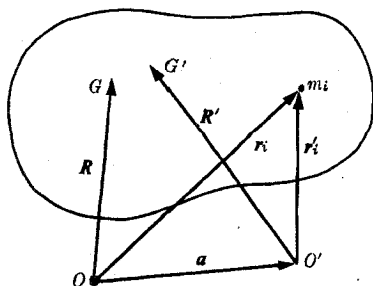
$$Z = \frac{1}{M} \iiint \rho z dV. \quad (56-5)$$

انتگرالهای فوق را می توان یا بر روی حجم جسم یا بر روی تمام فضا به دست آورد، زیرا برای نقاط خارج از جسم $\rho = 0$ این معادلات، نقطه G از جسم را که مختصاتش (X, Y, Z) است تعریف می کنند. ابتدا باید ثابت کنیم که نقطه G که به این شکل تعریف شد از نحوه انتخاب دستگاه مختصات مستقل است. چون معادلات (۵۲-۵) یا (۵۳-۵) به صورت برداری اند، و در آنها اشاره‌ای به هیچ مجموعه محورها خاصی نشده است، تعریف G به تحقیق به انتخاب جهت‌های خاصی برای محورها بستگی ندارد. به هر حال باید ثابت کرد که G نیز مستقل از انتخاب مبدأ است. دستگاهی از ذرات را در نظر بگیرید و فرض کنید که هر ذره m_i از آن به وسیله بردارهای r_i و r'_i نسبت به دو مبدأ O و O' مشخص شده باشد. اگر a بردار از O تا O' باشد، رابطه بین r_i و r'_i عبارت است از (شکل ۵-۷):

$$r_i = r'_i + a. \quad (57-5)$$

مراکز جرم G و G' نسبت به O و O' ، به وسیله بردارهای R و R' مشخص می شوند، که در آن R' به وسیله رابطه زیر تعریف می شود:

$$R' = \frac{1}{M} \sum_i m_i r'_i. \quad (58-5)$$



شکل ۵-۷ مکان مرکز جرم نسبت به دو مبدأ متفاوت.

با استفاده از معادله (۵-۵۷)، می توان معادله (۵-۵۲) را به صورت زیر نوشت:

$$R = \frac{1}{M} \sum_i m_i (r_i' - a)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_i m_i r_i' + \frac{1}{M} a \sum_i m_i = R' + a. \quad (5-59)$$

بنابراین R و R' بردارهایی اند که یک نقطه را نسبت به O و O' معین می کنند، که در نتیجه G و G' برهم منطبق شوند.

قضایای کلی مانند قضیه فوق را می توان برای دستگاهی از ذرات یا برای جسمی که به وسیله چگالی ρ توصیف می شود، ثابت کرد. هر دیدگاهی در هر روش اثبات اختیار گردد، همیشه می توان اثبات مشابهی از دیدگاه دیگر ارائه داد.

با استفاده از قضایای ساده کننده ای مانند قضیه فوق که از طریق آن توانستیم محورهای مختصات و مبدأ را آزادانه انتخاب کنیم، اغلب می توانیم از زحمت بسیار در محاسبه مکان مرکز جرم به وسیله معادلات (۵-۵۴)، (۵-۵۵)، و (۵-۵۶)، پرهیز کنیم. ابتدا قضیه زیر را در مورد اجسام متقارن بیان می کنیم:

(۵-۶۰) قضیه. اگر جسمی نسبت به صفحه ای متقارن باشد، مرکز جرم آن در آن صفحه قرار دارد.

وقتی می گوئیم جسمی نسبت به صفحه ای متقارن است، منظور این است که به ازای هر ذره در یک طرف صفحه، ذره ای به جرم مساوی در محل تصویر آینه ای اش در صفحه موجود است. برای هر جرمی که به طور پیوسته توزیع شده باشد، چگالی در هر نقطه باید مساوی چگالی تصویر آینه ای اش در صفحه باشد. مبدأ را در صفحه تقارن اختیار کنید و فرض کنید که صفحه تقارن، صفحه xy باشد. در این صورت برای محاسبه Z از معادله (۵-۵۶) [یا معادله (۵-۵۲)]، بنابه تقارن در برابر هر جزء حجم (یا ذره) در یک نقطه (x, y, z) بالای صفحه xy ، یک جزء حجم به جرم مساوی در نقطه $(x, y, -z)$ پایین صفحه xy موجود است، در نتیجه اثر این دو جزء در انتگرال معادله (۵-۵۶)، یکدیگر را خنثی می کنند. بنابراین $Z = 0$ و مرکز جرم در صفحه xy قرار می گیرد و به این ترتیب قضیه (۵-۶۰) ثابت می شود. این قضیه متضمن فروع زیر است:

(۵-۶۱) اگر جسمی نسبت به دو صفحه متقارن باشد، مرکز جرم آن بر روی فصل مشترک آن دو صفحه قرار دارد.

(۵-۶۲) اگر جسمی نسبت به محوری متقارن باشد، مرکز جرم آن بر روی آن محور قرار خواهد داشت.

(۵-۶۳) اگر جسمی نسبت به سه صفحه که دارای یک نقطه مشترک اند، متقارن باشد، آن نقطه مشترک مرکز جرم جسم خواهد بود.

(۵-۶۴) اگر جسمی نسبت به یک نقطه، تقارن کروی داشته باشد (یعنی اگر چگالی هر نقطه جسم فقط به فاصله آن از مرکز تقارن بستگی داشته باشد)، مرکز تقارن، مرکز جرم جسم خواهد بود.

به کمک این قضایا می‌توانیم در بعضی از حالات مرکز جرم را بی‌درنگ پیدا کنیم، و در بقیه حالات مسأله را به محاسبه تنها یک یا دو مختصه مرکز جرم کاهش دهیم. باید ابتدا درصدد یافتن تقارنها بود و از آنها برای ساده کردن مسأله استفاده کرد. حالات دیگری که در این قضایا گنجانده نشده‌اند، پیش می‌آیند، (مثلاً متوازی‌السطوح)، و در آنها واضح است که بعضی از انتگرالها مساوی‌اند یا با یکدیگر حذف می‌شوند، و مرکز جرم را می‌توان بی‌محاسبه آنها معین کرد.

قضیه دیگری که اغلب تعیین مرکز جرم را ساده می‌کند، این است که اگر جسمی از دو یا چند جزء تشکیل شده باشد که مرکز جرم آنها معلوم باشد، در این صورت می‌توان مرکز جرم جسم مرکب را با در نظر گرفتن اجزای تشکیل دهنده جسم، به صورت ذرات تنهایی که در مرکز جرم خود قرار گرفته‌اند، معین کرد. فرض کنید که جسمی یا دستگاهی از ذرات، از n قسمت به اجرام M_1, M_2, \dots, M_n ترکیب شده باشد. فرض کنید هر قسمت M_k از N_k ذره به جرمهای $m_{k1}, m_{k2}, \dots, m_{kN_k}$ مرکب باشد که به ترتیب در نقاط $r_{k1}, r_{k2}, \dots, r_{kN_k}$ قرار گرفته باشند. در این صورت مرکز جرم قسمت M_k در نقطه زیر قرار خواهد گرفت:

$$R_k = \frac{1}{M_k} \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl} r_{kl}, \quad (65-5)$$

و

$$M_k = \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl}. \quad (66-5)$$

و مرکز جرم تمام جسم در نقطه زیر قرار گرفته است،

$$R = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl} r_{kl}, \quad (67-5)$$

که در آن

$$M = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl}. \quad (68-5)$$

طبق معادله (۶۵-۵)، معادله (۶۷-۵) چنین می‌شود:

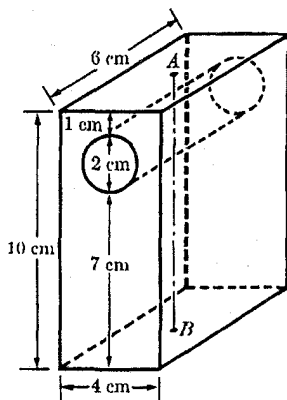
$$R = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n M_k R_k, \quad (69-5)$$

و طبق معادله (۶۶-۵)، معادله (۶۸-۵) چنین می‌شود:

$$M = \sum_{k=1}^n M_k. \quad (70-5)$$

معادلات (۶۹-۵) و (۷۰-۵) بیانهای ریاضی قضیه‌ای هستند که باید ثابت کنیم.

به‌عنوان مثال، آجر یکنواخت مکعب مستطیل شکلی را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۸-۵ سوراخ استوانه‌ای شکلی در آن به‌وجود آمده است. بنابه تقارن نسبت به دو صفحه قائمی که به



شکل ۵-۸

موازات سطوح مکعب مستطیل، آجر را به دو نیم می‌کنند، نتیجه می‌گیریم که مرکز جرم در امتداد خط قائم \overline{AB} که از مراکز وجوه بالا و پایین می‌گذرد، قرار گرفته است. فرض کنید که مرکز جرم آجر در فاصله Z پایین A قرار گرفته و چگالی آجر ρ باشد. اگر سوراخ استوانه‌ای شکل در آجر بریده نشده بود، جرم آجر $\rho \times 10 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ می‌بود و مرکز جرم آن نیز در وسط خط \overline{AB} یعنی ۵ سانتی‌متر زیر A ، قرار می‌گرفت. جرم ماده‌ای که خارج شده عبارت است از $\rho \times 6 \text{ cm} \times \pi \text{ cm}^2$ و قبل از خارج شدن، مرکز جرم آن بر روی خط \overline{AB} ، ۲ سانتی‌متر پایین‌تر از A بود. بنابراین به کمک قضیه (۵-۶۹) می‌توانیم رابطه زیر را برای محاسبه مرکز جرم سوراخ شده

$$(\rho \times 4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}) \times 5 \text{ cm} = (\pi \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} \times \rho) \times 2 \text{ cm}$$

بنویسیم

$$+ 6 \text{ cm} \times (\pi \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} \times \rho) \times Z$$

Z را از معادله فوق به دست می‌آوریم:

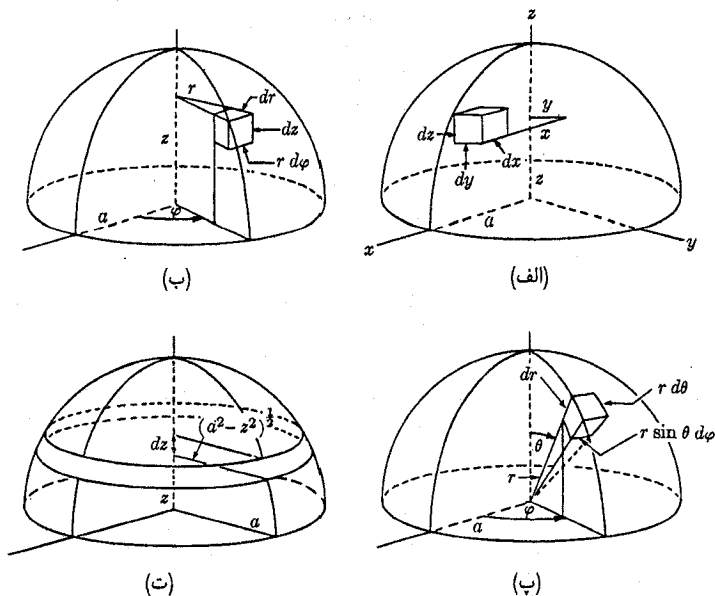
$$Z = \frac{6 \times 4 \times 10 \times 5 - \pi \times 6 \times 2}{6 \times (4 \times 10 - \pi)} \text{ cm.}$$

به عنوان دومین مثال، مرکز جرم نیمکره‌ای به شعاع a را معین می‌کنیم. اگر چگالی یکنواخت باشد، مرکز جرم طبق تقارن بر روی محور تقارن قرار می‌گیرد و ما این محور را محور z اختیار می‌کنیم. در این صورت فقط باید انتگرال موجود در معادله (۵-۵۶) را حساب کنیم و آن را می‌توان در مختصات دکارتی، استوانه‌ای، یا کروی نوشت، (شکل ۵-۹):

$$Z = \frac{1}{M} \int_{z=0}^a \int_{y=-(a^2-z^2)^{1/2}}^{(a^2-z^2)^{1/2}} \int_{x=-(a^2-z^2-y^2)^{1/2}}^{(a^2-z^2-y^2)^{1/2}} \rho z dx dy dz. \quad \text{دکارتی:}$$

$$Z = \frac{1}{M} \int_{z=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{(a^2-z^2)^{1/2}} \rho z r dr d\varphi dz. \quad \text{استوانه‌ای:}$$

$$Z = \frac{1}{M} \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\rho r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad \text{کروی:}$$



شکل ۵-۹ روشهای انتگرال گیری بر روی یک نیمکره.

برای هر نوع توزیع چگالی، هر یک از این روابط را می توان برای محاسبه Z به کار برد. اگر ρ یکنواخت باشد، می توان نیمکره را مرکب از حلقه ها یا قرصهایی تصور کرد، و یک یا دو انتگرال کمتر حساب کرد. به عنوان مثال، اگر نیمکره را مرکب از قرصهایی عمود بر محور z در نظر بگیریم (این عمل، معادل آن است که انتگرال گیری را در مختصات استوانه ای بر روی r و φ انجام دهیم)، می توان معادله (۷۱-۵) را نوشت:

$$Z = \frac{1}{M} \int_{z=0}^a z \rho \pi (a^2 - z^2) dz$$

$$= \left(\frac{1}{(2/3) \pi a^3 \rho} \right) \left(\frac{\pi a^4 \rho}{4} \right) = \frac{3}{8} a, \quad (71-5)$$

که در آن جمله زیر انتگرال عبارت است از ρz ضربدر حجم قرصی به ضخامت dz و به شعاع $(a^2 - z^2)^{1/2}$.

وقتی چگالی ρ یکنواخت باشد، مرکز جرم یک جسم فقط به شکل هندسی آن بستگی دارد و به وسیله رابطه زیر داده می شود:

$$R = \frac{1}{V} \iiint_V r dV. \quad (72-5)$$

نقطه G را که مختصه آن R ، به وسیله معادله (۷۲-۵) داده می شود شبه مرکز حجم V نامند. اگر به جای حجم V ، سطح A یا منحنی فضایی C را جایگزین کنیم، فرمولهای شبه مرکز سطح یا

منحنی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$R = \frac{1}{A} \int \int_V r dA, \quad (۷۳-۵)$$

$$R = \frac{1}{s} \int_C r ds, \quad (۷۴-۵)$$

که در آن s طول منحنی C است. دو قضیهٔ زیر که به پاپوس^۱ منسوب است، شبه‌مرکز یک سطح یا یک منحنی را به ترتیب به حجم یا سطح رفته به وسیلهٔ آن، وقتی حول محوری دوران کند، مربوط می‌سازد:

قضیهٔ ۱. اگر منحنی مسطحی حول محوری واقع در صفحهٔ خود که منحنی را قطع نمی‌کند، دوران کند، مساحت سطح داری که ایجاد می‌کند مساوی است با طول منحنی ضربدر طول مسیر شبه‌مرکز آن. (۷۵-۵)

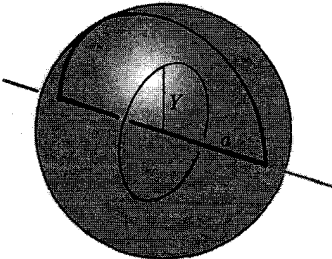
قضیهٔ ۲. اگر سطح مسطحی حول محوری واقع در صفحهٔ خود که سطح را قطع نمی‌کند، دوران کند، حجم ایجاد شده مساوی است با مساحت سطح ضربدر طول مسیر شبه‌مرکز آن. (۷۶-۵)

اثبات قضیهٔ ۱ طبق علائم شکل ۵-۱۰ بسیار ساده است:

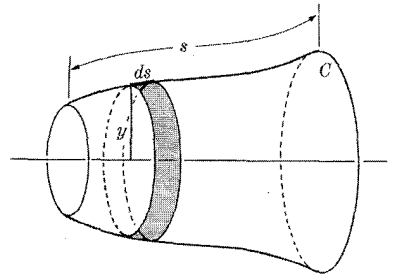
$$A = \int_C \pi y ds = \pi \int_C y ds = \pi Ys, \quad (۷۷-۵)$$

که در آن Y مختصهٔ شبه‌مرکز منحنی C و s طول آن است. اثبات قضیهٔ ۲ نیز نظیر همین است، و به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. به وسیلهٔ این قضایا می‌توان سطوح و احجام شکل‌هایی را که حول محوری متقارن اند وقتی شبه‌مرکزهای منحنیهای مولد یا سطوح مولد معلوم اند، تعیین کرد و به عکس. به عنوان مثال، مکان مرکز جرم یک قرص نیم‌دایره‌ای یکنواخت به شعاع a را با استفاده از قضیهٔ دوم پاپوس مشخص می‌کنیم. اگر قرص حول قطر خود بچرخد، طبق قضیهٔ پاپوس (شکل ۵-۱۱) حجم کرهٔ ایجاد شده عبارت است از:

$$\frac{4}{3} \pi a^3 = \left(\frac{\pi a^2}{2} \right) (\pi Y),$$



شکل ۵-۱۱ کره‌ای که به وسیلهٔ دوران نیم‌دایره‌ای به وجود آمده است.



شکل ۵-۱۰ قضیهٔ اول پاپوس.

که از آن نتیجه می شود:

$$Y = \frac{\sum m_i r_i^y}{\sum m_i} \quad (۷۸-۵)$$

گشتاور ماند I یک جسم حول یک محور به وسیله معادله (۵-۱۰) تعریف می شود:

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \quad (۷۹-۵)$$

یا:

$$I = \iiint \rho r^2 dV, \quad (۸۰-۵)$$

که در آن r فاصله هر نقطه یا ذره جسم تا محور داده شده است. ابتدا چند قضیه که کار محاسبه گشتاور ماند را ساده می کنند ثابت می کنیم.

قضیه محور موازی. گشتاور ماند یک جسم حول هر محور مفروض عبارت است از حاصل جمع گشتاور ماند حول محوری موازی با محور مفروض و مار بر مرکز جرم و گشتاور ماند محور مفروض، به شرط آنکه تمام جرم جسم در مرکز جرم متمرکز باشد. (۸۱-۵)

برای اثبات این قضیه، فرض کنید که I_O گشتاور ماند حول محور Z باشد که از نقطه O می گذرد، و I_G گشتاور ماند حول محوری موازی مار بر مرکز جرم G باشد. فرض کنید r و r' به ترتیب بردارهای مکان هر نقطه P جسم تا O و G ، و R بردار از O تا G باشد. مؤلفه های این بردارها به ترتیب به وسیله (x, y, z) ، (x', y', z') ، و (X, Y, Z) مشخص می شوند. در این صورت، چون (شکل ۵-۱۲):

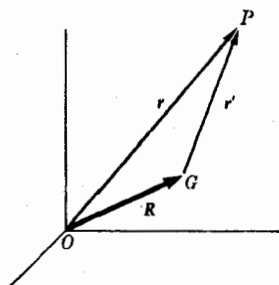
$$r = r' + R,$$

مشاهده می کنیم که

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x' + X)^2 + (y' + Y)^2 \\ &= x'^2 + y'^2 + X^2 + Y^2 + 2Xx' + 2Yy', \end{aligned}$$

به طوری که گشتاور ماند I_O عبارت است از:

$$\begin{aligned} I_O &= \iiint (x^2 + y^2) \rho dV \\ &= \iiint (x'^2 + y'^2) \rho dV + (X^2 + Y^2) \iiint \rho dV + 2X \iiint x' \rho dV \\ &\quad + 2Y \iiint y' \rho dV. \end{aligned} \quad (۸۲-۵)$$



شکل ۵-۱۲ مکان نقطه P نسبت به نقاط O و G .

انتگرال اول I_G ، و انتگرال جمله دوم M ، جرم کل جسم است. دو انتگرال آخر، همانند انتگرالهایی که در معادلات (۵-۵۴) و (۵-۵۵) ظاهر می‌شوند مختصات x و y مرکز جرم نسبت به نقطه G را معین می‌کنند. چون G مرکز جرم است، این انتگرالها صفرند و در نتیجه:

$$I_O = I_G + M(X^2 + Y^2). \quad (۵-۸۳)$$

معادله فوق بیان ریاضی قضیه محور موازی است. اگر گشتاور ماند جسمی را حول هر محوری بدانیم و بتوانیم محل مرکز جرم را معین کنیم، می‌توانیم از این قضیه برای تعیین گشتاور ماند حول هر محور موازی دیگری استفاده کنیم.

گشتاور ماند یک جسم مرکب حول هر محور را می‌توان از طریق جمع کردن گشتاورهای ماند اجزای جسم حول آن محور به دست آورد، و این مطلب از تعریف گشتاور ماند واضح است. از این نکته می‌توان همانند نتیجه مشابهی که برای مرکز جرم یک جسم به دست آوردیم، استفاده کرد.

جسمی که جرمش در یک صفحه تنها متمرکز است، یک لایه مسطح نامیده می‌شود. قضیه زیر برای یک لایه مسطح بیان شده است:

قضیه محور عمود. مجموع گشتاورهای ماند لایه‌ای مسطح حول هر دو محور متعامد واقع در صفحه لایه مساوی است با گشتاور ماند حول محوری مار بر نقطه تقاطع دو محور و عمود بر لایه مسطح. (۵-۸۴)

اثبات این قضیه بسیار ساده است. ذره دلخواهی به جرم m را در صفحه xy در نظر بگیرید. گشتاورهای ماند آن حول محوره‌های x و y عبارت‌اند از:

$$I_x = my^2, \quad I_y = mx^2. \quad (۵-۸۵)$$

از جمع کردن این روابط، گشتاور ماند جرم m حول محور z به دست می‌آید:

$$I_x + I_y = m(x^2 + y^2) = I_z. \quad (۵-۸۶)$$

چون گشتاور ماند هر لایه مسطح در صفحه xy عبارت است از حاصل جمع گشتاورهای ماند ذراتی که جسم را به وجود می‌آورند، بنابراین قضیه (۵-۸۴) ثابت می‌شود.

این قضایا را با محاسبه گشتاورهای ماند حلقه‌ای مدور و یکنواخت به شعاع a و جرم M واقع در صفحه xy (شکل ۵-۱۳)، تشریح می‌کنیم. گشتاور ماند حول یک محور z عمود بر صفحه حلقه و مار بر مرکز آن را می‌توان به سادگی حساب کرد:

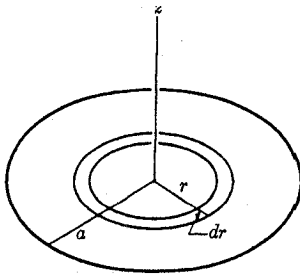
$$I_z = Ma^2. \quad (۵-۸۷)$$

گشتاورهای I_x و I_y مساوی‌اند، بنابراین طبق قضیه (۵-۸۴)، نتیجه می‌شود که:

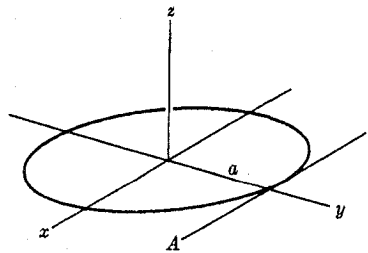
$$I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2} Ma^2. \quad (۵-۸۸)$$

طبق قضیه محور موازی گشتاور ماند حول محور A مماس بر حلقه عبارت است از:

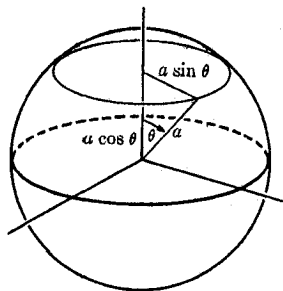
$$I_A = I_x + Ma^2 = \frac{3}{2} Ma^2. \quad (۵-۸۹)$$



شکل ۱۴-۵ طرز یافتن گشتاور ماند یک قرص.



شکل ۱۳-۵ حلقه‌ای به شعاع 'a'.



شکل ۱۵-۵ طرز یافتن گشتاور ماند یک کره جامد.

گشتاور ماند یک جسم جامد را می‌توان در هر دستگاه مختصاتی که برای مسئله مورد نظر، مناسب‌تر است، به دست آورد. اگر جسم یکنواخت و دارای شکل ساده‌ای باشد، می‌توان جسم را از میله‌ها، حلقه‌ها، قرصها، و غیره مرکب تصور کرد و گشتاور ماند آن را حساب کرد. به‌عنوان مثال، گشتاور ماند یک قرص مدور حول محوری عمود و مار بر مرکز آن، را می‌توان با این فرض که قرص از حلقه‌هایی مرکب است و با استفاده از معادله (۸۷-۵)، به دست آورد (شکل ۱۴-۵):

$$I_z = \int_0^a r^2 \rho \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi a^2 \rho}{2} = \frac{1}{2} M a^2. \quad (90-5)$$

گشتاور ماند یک کره جامد را می‌توان با این فرض که کره از قرصهایی مرکب است، از معادله (۹۰-۵) حساب کرد، (شکل ۱۵-۵):

$$I = \int_{\pi}^0 \frac{a^3 \sin^3 \theta}{2} (\rho \pi a^2 \sin^2 \theta) d(a \cos \theta) = \frac{8\pi \rho a^5}{15} = \frac{2}{5} M a^2. \quad (91-5)$$

گشتاور ماند جسمی را که یک قسمت آن جدا شده است می‌توان با کم کردن گشتاور ماند آن قسمت از گشتاور ماند جسم اصلی به دست آورد، البته تمام گشتاورها باید حول یک محور حساب شوند.

۵-۶ استاتیک اجسام صلب

معادلات حرکت یک جسم صلب، همان معادلات (۵-۴) و (۵-۵) اند:

$$M\ddot{R} = \sum_i F_i^e, \quad (۹۲-۵)$$

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum_i N_{iO}^e. \quad (۹۳-۵)$$

معادله (۹۲-۵) حرکت مرکز جرم را که به وسیله بردار R مشخص شده است، برحسب مجموع تمام نیروهای خارجی وارد بر جسم معین می‌کند. معادله (۹۳-۵) حرکت دورانی جسم را حول نقطه O که ممکن است مرکز جرم یا نقطه‌ای ثابت در فضا باشد، برحسب گشتاور - نیروی خارجی کل حول نقطه O معین می‌کند. بنابراین اگر نیروی خارجی کل وارد بر جسم صلب و گشتاور - نیروی خارجی کل حول نقطه مناسبی داده شده باشند، حرکت جسم مشخص می‌شود. اما اگر جسم صلب نباشد، این مطلب دیگر صحیح نخواهد بود، زیرا در آن صورت، جسم به وسیله نیروهای خارجی تغییر شکل پیدا می‌کند، و این تغییر شکل به طریقی است که بستگی به نقاط خاص اعمال نیروهای خارجی دارد. چون در این بخش فقط نیروهای خارجی مورد توجه ما است، لذا اندیس فوقانی e را حذف می‌کنیم. فقط لازم است که گشتاور - نیروی کل حول هر نقطه O را بدانیم، زیرا گشتاور - نیرو حول هر نقطه دیگر O' را می‌توان از فرمول زیر پیدا کرد:

$$\sum_i N_{iO'} = \sum_i N_{iO} + (r_O - r_{O'}) \times \sum_i F_i, \quad (۹۴-۵)$$

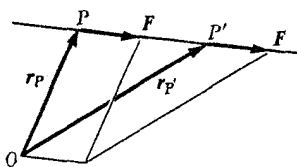
که در آن r_O و $r_{O'}$ بردارهایی‌اند که از هر مبدأ دلخواهی به نقاط O و O' رسم شده‌اند. به عبارت دیگر، گشتاور نیروی کل حول نقطه O' عبارت است از حاصل جمع گشتاور - نیروی کل حول نقطه O ، و گشتاور - نیرو حول O' اگر نیروی کل به نقطه O وارد می‌گردد. اثبات معادله (۹۴-۵) خیلی ساده است. فرض کنید r_i برداری باشد از مبدأ به نقطه‌ای که F_i به آن وارد می‌شود در این صورت:

$$\begin{aligned} \sum_i N_{iO'} &= \sum_i (r_i - r_{O'}) \times F_i \\ &= \sum_i (r_i - r_O + r_O - r_{O'}) \times F_i \\ &= \sum_i (r_i - r_O) \times F_i + \sum_i (r_O - r_{O'}) \times F_i \\ &= \sum_i N_{iO} + (r_O - r_{O'}) \times \sum_i F_i. \end{aligned}$$

به‌ویژه اگر جسم صلب ساکن باشد، جملات طرف چپ معادلات (۹۲-۵) و (۹۳-۵) صفر می‌شوند، و در آن صورت خواهیم داشت:

$$\sum_i F_i = 0, \quad (۹۵-۵)$$

$$\sum_i N_i = 0. \quad (۹۶-۵)$$



شکل ۵-۱۶ گشتاور - نیرو از نقطه عمل
نیرو در امتداد خط عملش مستقل است.

اینها شرایطی اند که باید به وسیله نیروهای خارجی و گشتاور - نیروهای خارجی برقرار شوند تا یک جسم صلب در حالت تعادل باشد. البته این شرایط برای تضمین ساکن بودن جسم کافی نیستند، زیرا با وجود آنها نیز جسم ممکن است در حرکت انتقالی و دورانی یکنواخت باشد، ولی اگر جسم از ابتدا ساکن باشد، در صورت برقراری این شرایط، ساکن باقی خواهد ماند. کافی است که گشتاور - نیروی کل در معادله (۵-۹۶) حول نقطه‌ای صفر باشد، زیرا در این صورت اگر معادله (۵-۹۵) برقرار باشد، طبق معادله (۵-۹۴)، گشتاور - نیروی کل حول هر نقطه دیگر نیز صفر خواهد بود.

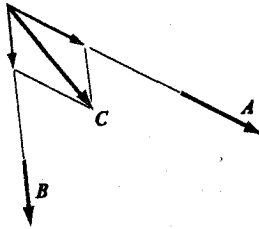
در محاسبه گشتاور - نیروی F ، نه تنها لازم است که بردار F (اندازه و جهت) بلکه همچنین نقطه P جسم که نیرو به آن وارد می‌شود را هم بدانیم. ولی اگر خطی از P در امتداد F رسم کنیم، در این صورت اگر F به هر نقطه دیگر P' از این خط وارد شود، گشتاور - نیروی آن یکسان خواهد بود (شکل ۵-۱۶) زیرا، از تعریف حاصل ضرب خارجی، می‌توان نشان داد که:

$$r_P \times F = r_{P'} \times F. \quad (۵-۹۷)$$

(مساحت‌های متوازی‌الاضلاعها با هم مساوی است). خطی که از P در امتداد F رسم شده است، خط عمل نیرو نامیده می‌شود. در محاسبه گشتاور - نیرو، اغلب بهتر است به‌خاطر داشته باشیم که نیرو ممکن است در هر جا از امتداد خط عملش، وارد شود. بعضی اوقات در ارتباط با این مطلب بین بردارهای «آزاد» و «لغزنده» به تمایزی قائل می‌شوند، و نیرو بردار «لغزنده» است. مع‌هذا، این واژه ممکن است موجب اشتباه شود، زیرا تا آنجا که حرکت مرکز جرم مطرح است، نیرو برداری «آزاد» است، معادله (۵-۹۲)، بدین معنی که می‌تواند به هر جا که باشد وارد شود، حال آنکه در محاسبه گشتاور - نیروها، نیرو برداری «لغزنده» است، و برای هر جسم غیرصلب هر نیرو باید در نقطه‌ای که وارد می‌شود، قرار گرفته باشد. همان‌طور که در بخش ۳-۱ تعریف کردیم، بهتر است، بردار را کمیتی دارای اندازه و جهت و بی‌اشاره به محل خاصی در فضا تعریف کنیم. در این صورت، در مورد نیرو برای بعضی از مقاصد، احتیاج داریم که نه تنها بردار نیروی F بلکه نقطه یا خط عمل آن را هم تصریح کنیم. طبق قضیه‌ای که توسط وارینیون^۱ بیان شده است، اگر $C = A + B$ ، در این صورت گشتاور C حول هر نقطه‌ای، مساوی است با حاصل جمع گشتاورهای A و B به شرط آنکه A ، B ، و C به یک نقطه مشترک وارد شده باشند، این قضیه، نتیجه‌ای مستقیم از اتحاد برداری است که به‌وسیله معادله (۳-۲۷) داده شده است:

$$r \times C = r \times A + r \times B \quad \text{اگر} \quad C = A + B \quad (۵-۹۸)$$

با استفاده از این قضیه می‌توانیم گشتاور - نیرو را از طریق جمع گشتاور - نیروهای ناشی از مؤلفه‌های آن حساب کنیم. همان‌طور که در شکل ۵-۱۷ نشان داده شده است از ترکیب قضیه وارینیون و نتیجه



شکل ۵-۱۷ نیروی C که گشتاور آن مجموع گشتاور نیروهای A و B است.

مطالب پاراگراف قبل می‌توان گشتاور - نیروی نیروهای A و B وارد بر یک صفحه را به گشتاور - نیروی، نیروی C تبدیل کرد، زیرا می‌توان تصور کرد که هر دو بردار A و B به نقطه تقاطع خط عملهایشان وارد می‌شوند، و در این صورت با استفاده از معادله (۵-۹۸) می‌توانیم آنها را با هم جمع کنیم. به همین ترتیب می‌توان C را نیز با هر بردار سومی از صفحه جمع کرد. این عمل را می‌توان تا جایی که خطوط عمل نیروها موازی نباشند، ادامه داد و در واقع مربوط به قضیه کلی‌تری است که در مورد نیروهای یک صفحه است و در زیر ثابت می‌شود.

چون حرکت یک جسم صلب به وسیله نیروی کل و گشتاور - نیروی کل تعیین می‌شود، دو دستگاه نیروی وارد بر یک جسم صلب را هنگامی معادل می‌نامیم که نیروی کل و گشتاور - نیروی کل آنها حول هر نقطه، مساوی باشند. شناختن ساده‌ترین دستگاه نیروهای معادل هر دستگاه نیرویی مهم است.

اگر دستگاهی از نیروهای F_i وارد بر نقاط r_i معادل یک نیروی F وارد بر نقطه r باشد، در این صورت نیروی F وارد بر r از منتجه دستگاه نیروهای F_i می‌نامند. اگر F منتجه دستگاه نیروهای F_i باشد، در این صورت باید روابط زیر برقرار باشند:

$$F = \sum_i F_i, \quad (۹۹-۵)$$

$$(r - r_0) \times F = \sum_i (r_i - r_0) F_i, \quad (۱۰۰-۵)$$

که در آن r_0 نقطه دلخواهی است که گشتاورها حول آن حساب می‌شوند. طبق معادله (۵-۹۴)، اگر معادله (۵-۹۹) برقرار باشد، و معادله (۵-۱۰۰) برای هر نقطه r_0 معتبر باشد، برای تمام نقاط r_0 نیز برقرار خواهد بود. نیروی $-F$ وارد بر r را متعادل‌کننده دستگاه نامند. اگر نیروی متعادل‌کننده به دستگاه نیروها وارد شود، شرایط تعادل برقرار خواهد شد.

مثالی برای دستگاهی از نیروها که دارای منتجه باشند، دستگاه نیروهای ثقل وارد بر جسمی در نزدیکی سطح زمین است. نشان خواهیم داد که در این حالت نیروی منتجه به مرکز جرم وارد می‌شود. فرض کنید شتاب ثقل g باشد. در این صورت نیروی وارد بر ذره m_i عبارت است از:

$$F_i = m_i g. \quad (۱۰۱-۵)$$

نیروی کل عبارت است از:

$$F = \sum_i m_i g = Mg, \quad (۱۰۲-۵)$$

که در آن M جرم کل است. گشتاور-نیروی کل حول هر نقطه O که مبدأ فرض شود، عبارت است از:

$$\begin{aligned} \sum_i N_{iO} &= \sum_i (r_i \times m_i g) \\ &= \sum_i (m_i r_i \times g) \\ &= \left(\sum_i m_i r_i \right) \times g \\ &= MR \times g = R \times Mg, \end{aligned} \quad (۱۰۳-۵)$$

که در آن R بردار از O تا مرکز جرم است. بنابراین گشتاور-نیروی کل نیروی Mg وارد بر مرکز جرم داده شده است. به همین علت است که مرکز جرم را مرکز ثقل نیز می‌نامند. در فصل بعدی خواهیم دید که در حالت کلی، این نتیجه فقط در میدان ثقل یکنواخت صادق است، یعنی وقتی که g برای تمام نقاط جسم یکسان است. اگر دستگاه نیروهای وارد بر یک جسم صلب دارای متجه‌ای باشد، برای تعیین حرکت جسم می‌توان متجه را جایگزین این نیروها کرد.

دستگاه نیروهایی که مجموعشان صفر است جفت نیرو نامیده می‌شوند.

$$\sum_i F_i = 0. \quad (۱۰۴-۵)$$

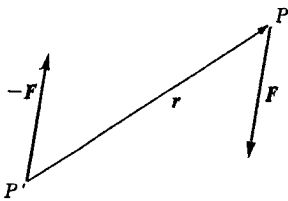
واضح است که یک جفت نیرو منتجه‌ای ندارد، مگر در حالت بی‌اهمیتی که گشتاور کل نیروها هم صفر باشد، که در آن حالت، نیروی منتجه صفر است. طبق معادلات (۵-۹۴) و (۵-۱۰۴) گشتاور-نیروی یک جفت نیرو حول کلیه نقاط مساوی است:

$$\sum_i N_{iO'} = \sum_i N_{iO}. \quad (۱۰۵-۵)$$

بنابراین یک جفت نیرو، به وسیله یک تک‌بردار و گشتاور-نیروی کل نیروهای آن مشخص می‌شود و تمام جفت نیروهایی که دارای گشتاور-نیروی کل برابر باشند، معادل‌اند. اگر از حالت بی‌اهمیتی که گشتاور-نیروی کل صفر است صرف‌نظر کنیم، ساده‌ترین دستگاه معادل هر جفت نیروی مفروضی عبارت است از یک جفت نیروی مساوی و مختلف‌الجهت F و $-F$ وارد بر نقاط P و P' که به وسیله بردار r از یکدیگر جدا شده‌اند، به طوری که (شکل ۵-۱۸)

$$\sum_i N_{iO} = r \times F. \quad (۱۰۶-۵)$$

طبق معادله (۵-۱۰۶)، گشتاور-نیروی جفت نیروی داده شده حول O مساوی است با گشتاور-نیروی جفت نیروی $(F, -F)$ حول P' . بنابراین دو دستگاه با هم معادل‌اند، زیرا نقطه‌ای که گشتاور-نیروی جفت نیرو حول آن حساب می‌شود اهمیتی ندارد. نیروی F و نقاط P و P' به هیچ وجه به طور یگانه معین نیستند. چون فقط حاصل ضرب خارجی $r \times F$ به وسیله



شکل ۵-۱۸ یک جفت نیروی ساده.

معادله (۵-۱۰۶) معین است، می توان نقطه P را به طور دلخواه اختیار کرد، می توان بردار F را نیز به طور دلخواه اختیار کرد به شرط اینکه در صفحه عمود بر گشتاور - نیروی کل قرار گیرد، و سپس می توان r را به صورت هر برداری که در همان صفحه قرار گرفته باشد، اختیار کرد، و با F متوازی الاضلاعی تشکیل داد که مساحت آن با اندازه گشتاور نیروی کل مساوی باشد. مسئله یافتن ساده ترین دستگاه معادل با هر دستگاه نیروهای مفروض، به وسیله قضایای زیر حل می شود:

(۵-۱۰۷) قضیه ۱. هر دستگاه از نیروها معادل است با مجموع تک نیرویی که از نقطه ای دلخواه بگذرد، و یک جفت نیرو (که یک یا هر دو ممکن است صفر باشند).

برای اثبات این قضیه، نشان می دهیم که چگونه می توان نیرو و جفت نیروی معادل را یافت. فرض کنید که نقطه دلخواه P اختیار شده باشد، و F مجموع تمام نیروهای دستگاه و N گشتاور-نیروی کل آنها حول نقطه P باشند. در این صورت اگر بگذاریم نیروی F در نقطه P وارد شود، و جفت نیرویی که گشتاور N باشد به آن اضافه کنیم دستگاهی خواهیم داشت که با دستگاه اصلی معادل است. چون جفت نیرو ممکن است از دو نیرو تشکیل شده باشد که یکی از آنها را می توان به نقطه دلخواهی وارد کرد، می توان یکی از نیروهای جفت را به نقطه P وارد، و سپس آن را به F اضافه کرد تا نیروی تنهایی وارد بر P و نیروی دیگر جفت به دست آیند و این ثابت می کند که:

(۵-۱۰۸) قضیه ۲. هر دستگاه از نیروها را می توان به دستگاه معادلی شامل حداکثر دو نیرو، تبدیل کرد.

قضیه زیر را می توان به دو طریق ثابت کرد:

(۵-۱۰۹) قضیه ۳. یک نیروی غیرصفر و یک جفت نیرو واقع در همان صفحه (چنانکه بردار گشتاور - نیروی جفت بر نیرو عمود باشد) دارای متجه ای هستند، و به عکس، یک نیرو معادل است با حاصل جمع یک نیروی مساوی گذرنده از هر نقطه دلخواه، و یک جفت نیرو.

چون یک جفت نیرو با گشتاور - نیروی N ، معادل است با دو نیروی مساوی و مختلف الجهت F و $-F$ ، (که در آن F را می توان به طور دلخواه در صفحه ای عمود بر N ، اختیار کرد)، همیشه می توان F را مساوی تک نیروی مذکور در قضیه اختیار کرد. همچنین می توان نقطه عمل F را دلخواه اختیار کرد. با در دست داشتن یک نیروی غیرصفر F وارد بر P ، و یک جفت - نیرو می توان یک جفت $(F, -F)$ معادل با جفت نیروی داده شده، تشکیل داد، و $-F$ را در نقطه P وارد کرد در این صورت F و $-F$ در نقطه P یکدیگر را خنثی می کنند، و نیروی باقیمانده F از جفت، نیروی منتهجه خواهد بود. به همین ترتیب می توان عکس آن را نیز ثابت کرد.

روش دیگر اثبات چنین است. فرض کنید که نیروی داده شده F در نقطه P وارد شود، و فرض کنید که گشتاور - نیروی کل جفت نیرو N باشد. در این صورت گشتاور - نیروی دستگاه حول نقطه P برابر N خواهد بود. بردار دلخواه r را در صفحه عمود بر N اختیار می‌کنیم که با F متوازی الاضلاعی به مساحت N می‌سازد. و نقطه P' را به فاصله r از P می‌گیریم. اگر تک نیروی F به نقطه P' وارد شود، در این صورت N ، گشتاور - نیرو حول P خواهد بود و از اینجا این تک نیرو معادل نیروی اصلی F وارد بر P و جفت نیرو است. می‌توان قضایای ۱ و ۳ را در قضیه زیر ترکیب کرد.

قضیه ۴. هر دستگاه از نیروها معادل است با مجموع تک نیرویی و جفت نیرویی که (۵-۱۱۰) گشتاور نیروی آن با تک نیرو موازی باشد. (یا به عبارت دیگر، هر دستگاه از نیروها معادل است با مجموع یک جفت نیرو و یک تک نیرو که بر صفحه جفت نیرو عمود باشد.)

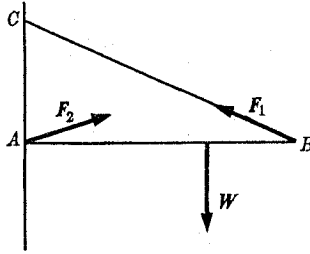
برای اثبات این قضیه، از قضیه ۱ برای تبدیل هر دستگاه نیروها به مجموع یک تک نیرو و یک جفت نیرو استفاده می‌کنیم، و سپس قضیه ۳ را برای حذف هر مؤلفه گشتاور جفت نیروی عمود بر تک نیرو به کار می‌بریم. نقطه عمل تک نیروی مذکور در قضیه ۴ دیگر دلخواه نیست، زیرا وقتی از قضیه ۳ استفاده می‌کنیم خط عمل آن ثابت خواهد بود. در حالات خاصی، ممکن است تک نیرو یا جفت نیرو از بین بروند. برای یک دستگاه از نیروهای واقع در یک صفحه، تمام گشتاور - نیروها حول هر نقطه در صفحه بر صفحه عمودند. بنابراین قضیه ۴ به قضیه زیر تبدیل می‌شود:

(۵-۱۱۱) قضیه ۵. هر دستگاه از نیروهای واقع در یک صفحه، دارای یک متجه است، مگر آنکه یک جفت نیرو باشد.

در عمل، تبدیل دستگاه پیچیده‌ای از نیروها به دستگاهی ساده‌تر، مسئله‌ای است که ساده‌ترین حل آن معمولاً به وسیله کاربرد ماهرانه فضاها و روشهای مختلف مذکور در این بخش میسر است. روشی که همیشه به نتیجه می‌رسد و اغلب هنگامی که دستگاه نیروها بسیار پیچیده است، ساده‌ترین روش است، همان روشی است که برای اثبات قضایای فوق به کار رفت. نیروی کل F را از راه جمع برداری و گشتاور کل نیروها N را حول هر نقطه مناسب P پیدا کنید. در این صورت F وارد بر نقطه P و جفت نیرویی به گشتاور N ، با هم دستگاهی پدید می‌آورند که معادل دستگاه اصلی است. اگر F صفر باشد، دستگاه اصلی به یک جفت نیرو تبدیل می‌شود. اگر N عمود بر F باشد، دستگاه دارای متجه‌ای است که ممکن است به هر یک از روشهایی که در اثبات قضیه ۳ به کار رفته است، به دست آید. اگر N عمود بر F نباشد و هیچ یک هم صفر نباشند، در این صورت دستگاه هیچ‌گونه متجه‌ای ندارد و می‌توان آن را به دستگاهی از دو نیرو، (همان‌طور که در مورد اثبات قضیه ۲ دیده‌ایم)، یا به یک تک نیرو و یک جفت نیرو با گشتاوری موازی آن (چنانکه در قضیه ۴ داشتیم) تبدیل کرد. اینکه کدام یک از این تبدیلهای ساده‌تر است، به سلیقه شخصی یا مناسبت مسئله مورد نظر بستگی دارد. در واقع، در تعیین حرکت یک جسم، مناسب‌ترین تبدیل، همان است که در قضیه ۱، داده شده و نقطه دلخواه، مرکز جرم جسم فرض شده است.

۷-۵ استاتیک سازه‌ها

تعیین نیروهای وارد بر نقاط مختلف در یک سازه جامد، مسئله‌ای است که در تمام رشته‌های مهندسی مکانیک بیشترین اهمیت را دارد. دو دلیل اصلی برای شناختن این نیروها وجود دارد.



شکل ۵-۱۹ مسئله تیر پرچم.

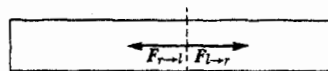
اول اینکه، مهندس باید مطمئن باشد که مصالح و ساختمان چنانند که قادرند در مقابل نیروهایی که بر آنها وارد خواهد شد، بی شکستگی و لهیدگی و معمولاً بی تغییر شکل دائمی، مقاومت کنند. دوم اینکه، چون هیچ یک از مصالح ساختمانی به راستی صلب نیستند، و تحت نیروهای وارد به طور الاستیک (کشوار) یا گاهی به طور غیرالاستیک (ناکشوار) تغییر شکل پیدا می کنند، لازم است که مقدار این تغییر شکل حساب شود، و اگر قابل ملاحظه باشد، به هنگام طرح ساختمان در حساب آورده شود. وقتی تغییر شکل یا شکستن سازه‌ای مورد نظر است، واضح است که آن سازه را نمی توان به صورت جسم صلب در نظر گرفت و دستگاه نیروهای واقعی که به سازه و به درون آن وارد می شوند، مورد نظر است. در چنین مسائلی، قضایای مربوط به دستگاه نیروهای معادل به طور مستقیم مورد علاقه نیستند، ولی اغلب به عنوان ابزاری برای تحلیل قسمتهایی از سازه که ممکن است با تقریبی کافی صلب در نظر گرفته شود، یا در پیشنهاد توزیع مجدد معادل نیروهایی که باعث می شود سازه در عین حفظ تعادل تحت تنشهای قابل قبول تری قرار بگیرد، مفیدند.

اگر سازه‌ای ساکن باشد، معادلات (۵-۹۵) و (۵-۹۶) خواه برای تمامی سازه‌ها یا برای هر قسمت از آن قابل استفاده است. باید به خاطر داشت که نیروها و گشتاور-نیروهایی که باید در جمعها منظور شوند، آنهایی اند که از خارج به قسمت مورد نظر سازه وارد می شوند. اگر سازه‌ای متحرک باشد، معادلات کلی تر (۵-۹۲) و (۵-۹۳) قابل استفاده اند. به طور کلی هر جفت از معادلات برداری، به منزله شش، یا اگر تمام نیروها در یک صفحه باشند، سه معادله مؤلفه‌ای اند. (چرا سه معادله؟). سازه ممکن است چنان ساخته شده باشد که وقتی بعضی از نیروهای خارجی و نقاط عمل آنها داده می شوند، تمام نیروهای داخلی و گشتاور نیروهای وارد بر هر قسمت از سازه را بتوان از طریق کاربرد مناسب معادلات (۵-۹۵) و (۵-۹۶) (در مورد سازه ساکن)، معین کرد. چنین سازه‌ای را از نظر استاتیکی معین^۱ نامند. مثال ابتدایی در شکل ۵-۱۹، تیر پرچم افقی AB را نشان می دهد که در نقطه A به دیواری لولا شده و به وسیله کابل BC نگه داشته شده است. همان طور که در شکل فوق نشان داده شده است، نیروی W بر میله AB وارد می شود. وقتی نیروی W و ابعاد سازه داده شده باشند، به آسانی می توان معادلات (۵-۹۵) و (۵-۹۶) را در مورد میله به کار برد و نیروی F_1 را که به وسیله کابل و نیروی F_2 را که از طریق لولا بر آن وارد می شوند، حساب کرد. مثالهای بسیاری از سازه‌های از نظر استاتیکی معین، در کتابهای درسی فیزیک مقدماتی داده شده است.

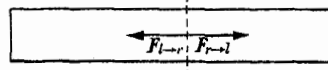
اکنون فرض کنید که در شکل ۵-۱۹، لولای نقطه A با مفصلی جوش داده شده، عوض شود. به طوری که تیر بتواند به شرط آنکه مفصل A نشکند، حتی بی کابل BC بار وارده را تحمل کند. در این صورت مسلم است که فقط با در دست داشتن وزن W ، نمی توان نیروی F_1 را که به وسیله طناب وارد می شود، معین کرد. F_1 ممکن است هر مقداری از صفر تا اندازه نسبتاً بزرگی داشته باشد و مقدارش بستگی به این دارد که کابل به چه محکمی کشیده شده باشد، و چه تنش به مفصل A وارد می شود. چنین سازه ای را از نظر استاتیکی نامعین^۱ نامند. سازه ای از نظر استاتیکی نامعین است که در آن نیروهای وارد بر قسمتهای آن، به وسیله نیروهای خارجی، کاملاً معین نیستند، بلکه بستگی به توزیع تنشها در داخل سازه نیز دارند. برای یافتن نیروهای داخلی در یک سازه نامعین لازم است که خواص الاستیکی (کشواری) اجزاء آن و کیفیت دقیق تغییر شکل هندسی آنها را بدانیم. معمولاً چنین مسائلی از مسائل مربوط به سازه های معین بسیار مشکل ترند. روشهای بسیاری برای محاسبه نیروهای داخلی در سازه های مکانیکی برای کاربرد در مسائل مهندسی به وجود آمده است، و بعضی از آنها در انواع بسیاری از مسائل فیزیکی، مفیدند.

۸-۵ تنش و تغییر طول نسبی

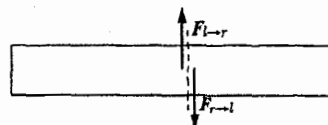
اگر سطحی فرضی، هر قسمت از سازه ای جامد (میله، ریسمان، کابل، یا تیر) را قطع کند، در این صورت در حالت کلی، طبق قانون سوم نیوتن یک طرف این سطح، نیرویی بر طرف دیگر وارد خواهد کرد و به عکس. این نیروهای داخلی که بر هر سطحی درون جامد وارد می شوند، تنش نامیده می شوند. تنش را به صورت نیروی وارد بر واحد سطح، در هر سطح مفروض در ماده، تعریف می کنند. اگر ماده واقع در هر طرف سطح، ماده طرف دیگر را با نیرویی عمود بر سطح براند، تنش را تنش فشاری نامند. اگر تنش، کششی عمود بر سطح باشد، آن را تنش کششی نامند. اگر نیروی وارد بر سطح به موازات سطح باشد، آن را تنش برشی نامند. شکل ۵-۲۰ این تنشها را در مورد یک تیر نشان می دهد. بردار $F_{1 \rightarrow 2}$ نمایانگر نیرویی است که از نیمه طرف چپ تیر بر نیمه طرف راست آن وارد می شود، و نیروی مساوی و مختلف الجهت با آن، $F_{2 \rightarrow 1}$ ، از طرف راست به طرف چپ وارد می گردد. تنش را که با سطح زاویه تشکیل می دهد، می توان به یک مؤلفه برشی و یک مؤلفه



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۵-۲۰ انواع تنش در یک تیر.
(الف) فشار؛ (ب) کشش؛ (پ) برش.

کششی یا مؤلفه فشاری تجزیه کرد. در کلی ترین حالت، تنش ممکن است در هر امتدادی نسبت به سطح وارد شود و ممکن است به طرز قرارگیری سطح بستگی داشته باشد. توصیف نوع تنش مصالح جامد در کلی ترین حالت، نسبتاً پیچیده است، و به بهترین وجه با استفاده از روشهای ریاضی جبر تانسوری که در فصل ۱۰ مورد بحث قرار می گیرد، انجام می شود. اینجا فقط حالاتی را در نظر می گیریم که تنش یا فشاری خالص است (مستقل از طرز قرارگیری سطح)، یا در هر نقطه فقط یک سطح موردنظر است به طوری که فقط یک بردار تنش برای تعیین نیروی وارد به واحد سطح در آن سطح لازم است.

اگر حجم کوچک ΔV را به هر شکل دلخواه از مصالحی تحت تنش در نظر بگیریم، ماده درون آن تحت تأثیر نیروهایی تنشی قرار خواهد گرفت که به وسیله ماده محیط بر آن سطح وارد می شود. اگر ماده کاملاً صلب نباشد، تغییر شکل پیدا می کند به طوری که ممکن است شکل و اندازه ماده داخل حجم ΔV با شکل و اندازه آن در حالتی که تنش در کار نمی بود، فرق داشته باشد. این تغییر شکل مصالح تحت تنش را تغییر طول نسبی نامند. ماهیت و مقدار تغییر طول نسبی به ماهیت و اندازه تنشها، و به چگونگی ماده بستگی دارد. برای هر نوع تغییر طول نسبی باید تعریف مناسبی که بتواند چگونگی اندازه گیری آن را بیان کند، پیدا شود. برای مثال، کشش موجب کشیدگی ماده می شود و تغییر طول نسبی به صورت تغییر بر خه ای طول تعریف می شود.

اگر سیمی به طول l و سطح مقطع A به وسیله نیروی F تا طول $l + \Delta l$ کشیده شود، تعاریف تنش و تغییر طول نسبی عبارت اند از:

$$\text{تنش} = \frac{F}{A}, \quad (5-112)$$

$$\text{تغییر طول نسبی} = \frac{\Delta l}{l}. \quad (5-113)$$

آزمایش نشان داده است که وقتی تغییر طول نسبی بیش از اندازه بزرگ نباشد، تنش با تغییر طول نسبی ماده جامد متناسب است. این قانون هوک^۱ است، و برای تمام تنشها و تغییر طولهای نسبی مربوط به آنها صادق است. و نیز از جهات نظری به دلایلی که ضمن بحث مقدماتی در معادله (۲-۵۷) بیان گردید، معقول و قابل قبول به نظر می رسد. بنابراین اگر تغییر طول نسبی بیش از اندازه زیاد نباشد، نسبت تنش به آن برای هر ماده ثابت است. در حالتی که ماده ای در اثر کشش در یک جهت کشیده شده باشد، این نسبت را ضریب یانگ^۲ می نامند و عبارت است از:

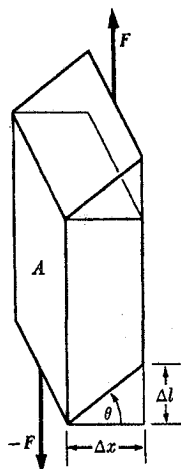
$$Y = \frac{\text{تنش}}{\text{تغییر طول نسبی}} = \frac{Fl}{A \Delta l}. \quad (5-114)$$

اگر فشار وارد بر جسمی به قدر Δp افزایش یابد، تغییر شکل آن به منزله تغییری در حجم آن خواهد بود، و تغییر طول نسبی به وسیله معادله زیر تعریف می شود:

$$\text{تغییر طول نسبی} = \frac{\Delta V}{V}. \quad (5-115)$$

در این حالت نسبت تنش به تغییر طول نسبی را ضریب حجمی B نامند:

$$B = \frac{\text{تنش}}{\text{تغییر طول نسبی}} = - \frac{\Delta p V}{\Delta V}, \quad (5-116)$$



شکل ۵-۲۱ تغییر طول نسبی برش.

که در آن علامت منفی به منظور مثبت کردن B وارد شده است.

در مورد تنش برشی، باز تنش به وسیله معادله (۵-۱۱۲) تعریف می شود، که در آن نیروی وارد بر سطح A و موازی آن است. تنش برشی حاصل عبارت است از حرکت از حرکت A به موازات خود به اندازه فاصله Δl ، نسبت به صفحه ای موازی A و به فاصله Δx از آن (شکل ۵-۲۱). در این صورت تنش برشی به وسیله معادله زیر تعریف می شود:

$$\text{تغییر طول نسبی} = \frac{\Delta l}{\Delta x} = \tan \theta, \quad (5-117)$$

که در آن θ زاویه ای است که خط عمود بر A بر اثر وجود تنش برشی به اندازه آن، چرخیده است. در این حالت نسبت تنش به تغییر طول نسبی را ضریب برشی نامند.

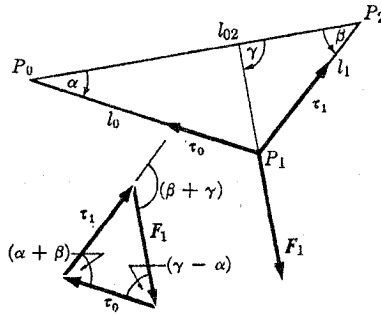
$$n = \frac{\text{تنش}}{\text{تغییر طول نسبی}} = \frac{F}{A \tan \theta}. \quad (5-118)$$

بررسی گسترده روشهای حل مسائل استاتیکی از مجال این کتاب بیرون است. در سه بخش بعدی، توجه خود را به بررسی سه نوع مسئله خاص محدود می کنیم که تحلیل دستگاهی فیزیکی را به منظور تعیین نیروهایی که بر قسمتهای آن وارد می شوند و اثری که این نیروها در تغییر شکل دستگاه دارند تشریح می کنند.

۹-۵ تعادل ریسمانهای انعطاف پذیر و کابلها

ریسمان انعطاف پذیر آرمانی ریسمانی است که نه هیچ گونه تنش فشاری یا برشی، و نه هیچ گونه گشتاور خمشی را تحمل کند، به طوری که نیروی وارد بر هر نقطه ریسمان فقط ممکن است کششی در امتداد مماس بر ریسمان در آن نقطه باشد. زنجیرها و کابلهایی را که در بسیاری از سازه ها به کار می روند می توان برای بیشتر مقاصد ریسمانهای انعطاف پذیر آرمانی دانست.

اول مسئله بسیار ساده ای را در نظر می گیریم که در آن ریسمان بی وزنی بین دو نقطه P_1 و P_2



شکل ۵-۲۲ یک ریسمان قابل انعطاف که در سه نقطه نگه داشته شده است.

آویزان شده باشد، و نیروی F_1 در نقطه P_1 به آن وارد شود، (شکل ۵-۲۲). فرض کنید کشش موجود در قطعه P_1P_2 و P_0P_1 کشش در قطعه P_0P_1 باشد. فرض کنید l_1 و l_0 طولهای این قطعات ریسمان و l_{02} فاصله بین P_0 و P_2 باشد. زوایای α و β بین دو قطعه ریسمان و خط P_0P_2 به وسیله قانون کسینوس مشخص می‌شوند:

$$\cos \alpha = \frac{l_{02}^2 + l_0^2 - l_1^2}{2l_0 l_{02}}, \quad \cos \beta = \frac{l_{02}^2 + l_1^2 - l_0^2}{2l_1 l_{02}}, \quad (119-5)$$

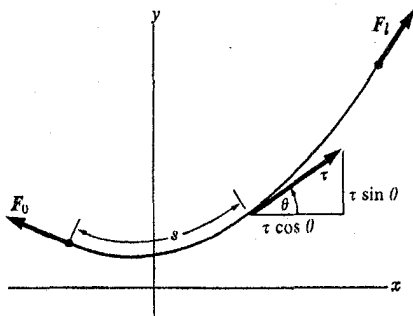
به طوری که مکان نقطه P_1 مستقل از نیروی F_1 است، البته به شرط آنکه ریسمان کشیده نشود. چون قطعه کوچک ریسمان در نقطه P_1 در حال تعادل است، باید حاصل جمع برداری سه نیروی F_1 ، τ_0 و τ_1 وارد بر ریسمان در P_1 ، صفر باشد به طوری که این نیروها در شکل ۵-۲۲ نشان داده شده است، مثلث بسته‌ای به وجود می‌آورند. در این صورت کششها به کمک قانون سینوس بر حسب زاویه بین نیروی F_1 و امتداد خط P_0P_2 معین می‌شوند:

$$\tau_0 = F_1 \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \tau_1 = F_1 \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (120-5)$$

اکنون فرض کنید که ریسمان طبق قانون هوک کشیده می‌شود، به طوری که،

$$l_0 = l'_0 (1 + k\tau_0), \quad l_1 = l'_1 (1 + k\tau_1), \quad (121-5)$$

که در آن l'_0 و l'_1 طولهای کشیده نشده‌اند، و k ضریبی ثابت است $[1/k]$ عبارت است از ضریب یانگ (معادله ۵-۱۱۴) ضریب مساحت سطح مقطع ریسمان. کمیت‌های مجهول τ_0 ، τ_1 ، l_0 و l_1 را می‌توان از معادلات (۵-۱۱۹)، با جایگزین کردن مقادیر مربوط به آنها از معادلات (۵-۱۲۰) و (۵-۱۲۱) حذف کرد. در این صورت دو معادله به نسبت پیچیده برای به دست آوردن زوایای α و β داریم. وقتی مقادیر عددی l'_0 ، l'_1 ، k ، l_{02} ، F_1 و γ داده شده باشند، معادلات را باید به وسیله روشهای عددی حل کرد و وقتی α و β تعیین شدند، τ_0 ، τ_1 ، l_0 و l_1 را می‌توان از معادلات (۵-۱۲۰) و (۵-۱۲۱) پیدا کرد. یک روش حل این معادلات به وسیله تقریبهای متوالی این است که ابتدا فرض کنیم ریسمان کش نیاید یعنی $l_0 = l'_0$ و $l_1 = l'_1$ و α و β را از



شکل ۵-۲۳ یک ریسمان قابل انعطاف که تحت تأثیر وزن خود آویزان شده است.

معادلات (۵-۱۱۹) و τ_1 و τ_2 را از معادلات (۵-۱۲۰) حساب کنیم. سپس با به کار بردن این مقادیر τ_1 و τ_2 ، l_1 و l_2 را از معادلات (۵-۱۲۱) حساب می‌کنیم. مقادیر جدید l_1 و l_2 را می‌توان در معادله (۵-۱۱۹) قرار داد تا مقادیر بهتری برای α و β و از آنها مقادیر بهتری برای τ_1 و τ_2 به دست آورد. از این مقادیر می‌توان استفاده کرد و مقادیری همچنان بهتر برای l_1 و l_2 از معادلات (۵-۱۲۱) به دست آورد و الی آخر. وقتی این عمل تکرار می‌شود، مقادیر محاسبه شده متوالی α ، β ، τ_1 ، τ_2 ، l_1 و l_2 به طرف مقادیر واقعی می‌گرایند. اگر ریسمان فقط به مقدار کمی کشیده شود، چند تکرار اولی کافی است که مقادیری بسیار نزدیک به واقعی حاصل شود. روشی که اینجا پیشنهاد شده است مثالی برای گروهی بسیار کلی از روشهای حل مسائل فیزیکی از طریق تقریبهای متوالی است. این مثالی از روشهایی است که روشهای آسودگی^۱ حل مسائل استاتیکی نامیده می‌شود.

اکنون ریسمانی را در نظر می‌گیریم که تحت تأثیر نیروهای قرار گرفته باشد که به طور پیوسته در امتداد طول ریسمان توزیع شده است. هر نقطه روی ریسمان به وسیله فاصله اش s از یک سر آنکه در طول ریسمان اندازه گیری می‌شود، مشخص می‌گردد. فرض کنید $f(s)$ نیروی وارد بر واحد طول در نقطه s باشد، یعنی نیروی وارد بر قطعه کوچکی از ریسمان به طول ds باشد. در این صورت اگر ریسمان، در حال تعادل باشد، نیروی کل وارد بر طول آن بین انتهای $s = 0$ و نقطه s صفر خواهد بود:

$$F_0 + \int_0^s f ds + \tau(s) = 0. \quad (5-122)$$

که در آن F_0 نیروی نگهدارنده در انتهای $s = 0$ است و $\tau(s)$ برداری است که اندازه آن، کشش در نقطه s است و در جهت افزایش s متوجه است. از مشتق گیری معادله (۵-۱۲۲) نسبت به s ، معادله دیفرانسیلی بر حسب $\tau(s)$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{d\tau}{ds} = -f. \quad (5-123)$$

ساده ترین و مهمترین کاربرد معادله (۵-۱۲۳) در مورد ریسمانی است که دارای وزن w بر حسب واحد طول باشد. اگر ریسمان تحت تأثیر نیروی دیگری جز نیروهای انتهایی، قرار نگرفته

باشد، در صفحه‌ای قائم‌الوزن خواهد شد، و ما آن را صفحه xy می‌گیریم که محور x آن افقی و محور y آن قائم باشد. فرض کنید که θ زاویه بین ریسمان و محور x باشد، (شکل ۵-۲۳). در این صورت مؤلفه‌های افقی و قائم معادله (۵-۱۲۳) عبارت‌اند از:

$$\frac{d}{ds}(\tau \sin \theta) = w, \quad (5-124)$$

$$\frac{d}{ds}(\tau \cos \theta) = 0. \quad (5-125)$$

معادله (۵-۱۲۵) متضمن آن است که:

$$\tau \cos \theta = C. \quad (5-126)$$

مؤلفه افقی کشش ثابت است، و باید چنین باشد، زیرا نیروهای خارجی وارد بر ریسمان بجز نیروهای انتهایی، همه قائم‌اند. با تقسیم معادله (۵-۱۲۴) بر C و استفاده از معادله (۵-۱۲۶)، کشش را حذف می‌کنیم:

$$\frac{d \tan \theta}{ds} = \frac{w}{C}. \quad (5-127)$$

اگر ریسمان را از طریق تصریح تابع $y(x)$ ، نمایش دهیم، روابط زیر را خواهیم داشت.

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = y', \quad (5-128)$$

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = dx(1 + y'^2)^{1/2}, \quad (5-129)$$

به طوری که معادله (۵-۱۲۷) چنین می‌شود:

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{w}{C}(1 + y'^2)^{1/2}. \quad (5-130)$$

اگر w ثابت باشد، از معادله (۵-۱۳۰) می‌توان انتگرال گرفت:

$$\int \frac{dy'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = \int \frac{w}{C} dx, \quad (5-131)$$

$$\sinh^{-1} y' = \frac{wx}{C} + \alpha, \quad (5-132)$$

که در آن α ثابت است. y' را از معادله (۵-۱۳۲) به دست می‌آوریم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sinh \left(\frac{wx}{C} + \alpha \right). \quad (5-133)$$

می‌توان از این معادله نیز دوباره انتگرال گرفت تا y به دست آید.

$$y = \beta + \frac{C}{w} \cosh \left(\frac{wx}{C} + \alpha \right). \quad (5-134)$$

منحنی نمایش معادله (۵-۱۳۴) را منحنی زنجیری^۱ می‌نامند و آن شکل آویختگی ریسمانی

یکنواخت است، که غیر از نیروهای انتهایی تحت تأثیر هیچ نیرویی جز وزن خود قرار نگرفته باشد. ضرایب ثابت C ، β ، و α را باید چنان اختیار کرد که y در نقاط انتهایی مقدار مناسب را داشته باشد و به طوری که طول کل ریسمان دارای مقدار صحیح باشد. طول کل عبارت است از

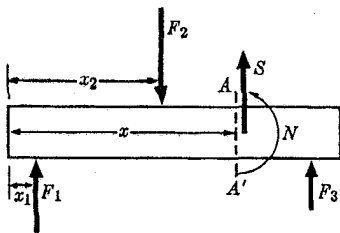
$$l = \int ds = \int_{x_0}^{x_1} (1 + y'^2)^{1/2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \cosh \left(\frac{wx}{C} + \alpha \right) dx$$

$$= \frac{C}{w} \left[\sinh \left(\frac{wx_1}{C} + \alpha \right) - \sinh \left(\frac{wx_0}{C} + \alpha \right) \right]. \quad (۱۳۵-۵)$$

۱۰-۵ تعادل تیرهای جامد

یکی از ساده‌ترین مثالها برای سازه‌ای که تحت تأثیر نیروهای برشی گشتاور خمشی قرار می‌گیرد، تیری افقی است که تحت تأثیر نیروهای قائم قرار گرفته است. برای سادگی مسئله، فقط حالتی را در نظر می‌گیریم که تیر تحت تأثیر هیچ گونه فشار یا کششی قرار نگرفته باشد، و فرض می‌کنیم که طوری ساخته شده باشد و نیروها چنان اعمال شوند که تیر فقط در یک صفحه قائم بی‌هیچ پیچشی حول محور تیر، خمیده شود. ابتدا با اطلاعاتی که در باره نیروهای خارجی داریم، تنشهای داخل تیر را پیدا می‌کنیم، و سپس تغییر شکل تیر ناشی از این تنشها را معین می‌کنیم.

نقاط طول تیر را به وسیله مختصه x که به‌طور افقی از انتهای چپ تیر اندازه‌گیری می‌شود، مشخص می‌کنیم (شکل ۲۴-۵). فرض کنید نیروهای قائم F_1 ، F_2 ، F_3 ، \dots در فاصله‌های x_1 ، x_2 ، x_3 ، \dots از انتهای چپ تیر وارد شوند. نیرویی را که به سمت بالا باشد، مثبت می‌گیریم. فرض کنید AA' صفحه عمود بر تیر در فاصله دلخواه x از انتهای تیر باشد. بنابه قضیه ۱ شماره (۵-۱۰۷) از بخش ۵-۶ دستگاه نیروهای وارد در صفحه AA' از بخش طرف راست تیر بر بخش سمت چپ آن، معادل است با تک‌نیروی S وارد بر هر نقطه از صفحه و جفت نیرویی به گشتاور-نیروی N . (توجه کنید که در به‌کار بردن قضیه ۱، صفحه AA' را به‌صورت جسمی صلب در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که صفحه سطح مقطع AA' به‌وسیله نیروهای وارد بر آن تغییر شکل پیدا نمی‌کند.) در حالتی که مورد نظر ماست، فشار یا کششی وجود ندارد و تمام نیروها قائم‌اند، به طوری که S نیز قائم است. نیروی برشی S را به‌صورت نیروی قائمی که در سطح AA' از قسمت راست تیر به قسمت چپ وارد می‌شود تعریف می‌کنیم. وقتی نیرو به سمت بالا باشد، S



شکل ۲۴-۵ نیروهای وارد بر یک تیر.

را مثبت و وقتی به سمت پایین باشد، k را منفی اختیار می‌کنیم.^۱ بنا به قانون سوم نیوتن، نیروی وارد بر AA' از چپ به راست، S - خواهد بود. چون فرض می‌کنیم که هیچ‌گونه پیچشی حول محور تیر (محور x) وجود ندارد، و چون تمام نیروها قائم‌اند، N ، گشتاور - نیروی افقی است و بر تیر عمود خواهد بود. گشتاور خمشی N را به صورت گشتاور - نیروی وارد در AA' از قسمت راست تیر به قسمت چپ آن، حول محوری افقی واقع در صفحه AA' ، تعریف می‌کنیم. وقتی N بخواید صفحه AA' را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بچرخاند، آن را مثبت اختیار خواهیم کرد. چون k قائم است، گشتاور - نیرو حول هر محور افقی واقع در صفحه AA' ، یکسان خواهد بود.

نیروی برشی k و گشتاور خمشی N را می‌توان با به کار بردن شرایط تعادل (معادلات (۵-۹۵) و (۵-۹۶)) برای قسمتی از تیر که در طرف چپ صفحه AA' واقع شده است، پیدا کرد. اگر از وزن تیر صرف‌نظر کنیم، نیروی کل و گشتاور - نیروی کل حول یک محور افقی واقع در صفحه AA' عبارت است از:

$$\sum_{x_i < x} F_i + S = 0, \quad (۱۳۶-۵)$$

$$-N_0 - \sum_{x_i < x} (x - x_i) F_i + N = 0, \quad (۱۳۷-۵)$$

که در آن جمع‌بندی‌ها روی تمام نیروهای وارد بر طرف چپ AA' هستند و N_0 گشتاور خمشی است (اگر موجود باشد) که از انتهای طرف چپ تیر بر پایه آن وارد می‌شود. N گشتاور - نیرو فقط زمانی ظاهر می‌شود که تیر در سمت چپ به وسیله گیره‌ای گرفته شده، یا در غیر این صورت در انتهای طرف چپ بسته شده باشد. نیروی وارد بر انتهای تیر به وسیله گیره یا پایه دیگر باید جزو نیروهای F_i منظور شود. اگر تیر دارای جرم w در واحد طول باشد، این نیرو نیز باید در شرایط تعادل منظور گردد:

$$\sum_{x_i < x} F_i - \int_0^x w dx + S = 0, \quad (۱۳۸-۵)$$

$$-N_0 - \sum_{x_i < x} (x - x_i) F_i + \int_0^x (x - x') w dx' + N = 0. \quad (۱۳۹-۵)$$

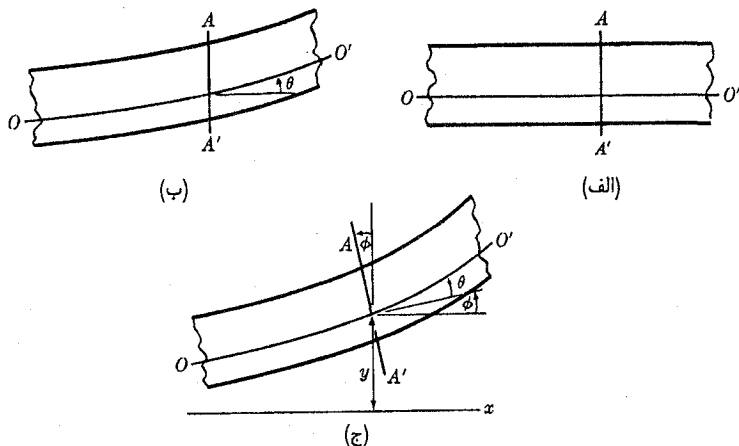
بنابراین نیروی برشی و گشتاور خمشی در فاصله x از انتهای تیر عبارت‌اند از:

$$S = - \sum_{x_i < x} F_i + \int_0^x w dx, \quad (۱۴۰-۵)$$

$$N = N_0 + \sum_{x_i < x} (x - x_i) F_i - \int_0^x (x - x') w dx'. \quad (۱۴۱-۵)$$

اگر هر نیروی اضافی دیگری موجود باشد که، به‌طور پیوسته در امتداد تیر پخش شده باشد، آن را می‌توان به صورت وزنی اضافی بر حسب واحد طول در w منظور کرد. اگر تیر در دو انتهایش آزاد

۱. این قرار علامت برای S ، با قراردادهای علامت در سراسر این کتاب سازگار است، یعنی جهت بالا، مثبت اختیار می‌شود. قراردادهای علامت برای نیروی برشی و گشتاور خمشی در کتابهای فیزیک و مهندسی یکنواخت نیست، و خواننده باید ضمن مطالعه کتب به قراری که هر نویسنده برای علامت اختیار کرده است، توجه داشته باشد.



شکل ۵-۲۵ تغییر شکل تیر به وسیلهٔ برش و خمش. (الف) تیر تغییر شکل نیافته. (ب) تیر تحت برش. (پ) تیر خمیده و تحت برش قرار گرفته است.

باشد، نیروی برشی و گشتاور خمشی در دو انتها باید برابر صفر باشد. اگر در انتهای طرف راست تیر، $S = N = 0$ باشد، دو نیروی وارد بر تیر را، اگر نیروهای دیگر معلوم باشند، می توان از معادلات (۵-۱۴۰) و (۵-۱۴۱) به دست آورد. اگر تیر در هر یک از دو انتها بسته شده، یا به وسیلهٔ گیره‌ای محکم شده باشد، S و N ممکن است هر مقداری در آن نقطه داشته باشند، وقتی تمام نیروها از جمله نیرو و گشتاور - نیروی وارد بر گیره، در انتهای طرف چپ تیر (در صورت وجود)، معلوم باشند، S و N در هر نقطه در امتداد تیر توسط معادلات (۵-۱۴۰) و (۵-۱۴۱) تعیین می شوند. نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی را می توان به صورت توابعی از x که شیبهایشان در هر نقطه به وسیلهٔ مشتق‌گیری از معادلات (۵-۱۴۰) و (۵-۱۴۱) به دست می آید، رسم کرد:

$$\frac{dS}{dx} = w \quad (\text{بعز در } x_i), \quad (۱۴۲-۵)$$

$$\frac{dN}{dx} = \sum_{x_i < x} F_i - \int_x^x w dx' = -S. \quad (۱۴۳-۵)$$

نیروی برشی از چپ به راست در نقطهٔ x_i که نیروی F_i به آن وارد می شود به اندازهٔ $-F_i$ افزایش می یابد.

اکنون تغییر شکل حاصل از نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی در تیری را در نظر می گیریم که سطح مقطع آن در سراسر طولش برابر است. در شکل ۵-۲۵ (الف)، تیر افقی تغییر شکل نیافته‌ای نشان داده شده است که خط افقی OO' و صفحهٔ قائم AA' در آن رسم شده‌اند. در شکل ۵-۲۵ (ب)، تیر تحت تأثیر تنش برشی است و اثر آن این است که صفحات قائم را نسبت به یکدیگر می لغزاند، به طوری که خط OO' با امتداد قائم بر صفحهٔ AA' زاویهٔ θ تشکیل می دهد. طبق معادلهٔ (۵-۱۱۸)، زاویهٔ θ برحسب نیروی برشی S و ضریب برشی n به وسیلهٔ رابطهٔ زیر داده می شود:

$$\theta = \frac{S}{nA}, \quad (۱۴۴-۵)$$

که در آن A مساحت سطح مقطع است و چون θ خیلی کوچک است، از تقریب $\tan \theta \doteq \theta$ استفاده کرده ایم. در شکل ۵-۲۵ (پ) اثر دیگر خمش تیر، نشان داده شده است. اکنون صفحه AA' با صفحه قائم زاویه φ تشکیل می دهد. فرض شده است که سطح مقطع AA' ، به صورت یک صفحه باقی می ماند و هنگامی که تیر تحت تنش است شکل خود را حفظ می کند، اگرچه این مطلب ممکن است در نزدیکی نقاطی که نیروها وارد می شوند، کاملاً صحیح نباشد. برای تعیین φ ، دو صفحه AA' و BB' را که از ابتدا قائم اند به فاصله کوچک l از هم در نظر می گیریم. وقتی تیر خمیده می شود، AA' و BB' با قائم زوایای φ و $\varphi + \Delta\varphi$ تشکیل می دهند (شکل ۵-۲۶). بر اثر خمش، رشته های طرف خارج تیر خمیده، کشیده و رشته های طرف داخل آن، فشرده خواهند شد. جایی در داخل تیر، لایه ای خنثی از رشته های کشیده نشده وجود خواهد داشت و قرار می گذاریم که خط OO' را چنان رسم کنیم که در این لایه خنثی قرار گیرد. خط بین AA' و BB' که به موازات OO' به فاصله z در بالای آن فرض می شود، به اندازه طول $l - \Delta l$ ، فشرده خواهد شد (شکل ۵-۲۶ را ببینید) که در آن:

$$\Delta l = z \Delta \varphi. \quad (۱۴۵-۵)$$

نیروی فشاری dF وارد بر جزء سطح dA در فاصله z بالای لایه خنثی OO' ، به وسیله معادله (۵-۱۱۴) بر حسب ضریب یانگ داده می شود:

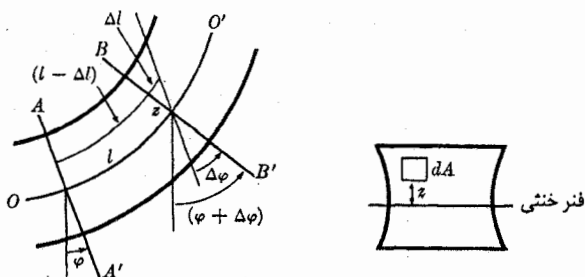
$$\frac{dF}{dA} = Y \frac{\Delta l}{l} = Yz \frac{\Delta \varphi}{l}, \quad (۱۴۶-۵)$$

یا اگر $l = ds$ ، جزء کوچک طول در امتداد خط OO' عبارت است از:

$$\frac{dF}{dA} = Yz \frac{d\varphi}{ds}. \quad (۱۴۷-۵)$$

معادله فوق در طراحی تیرها دارای اهمیت است. زیرا تنش فشاری یا کششی را در هر فاصله z از لایه خنثی، تعیین می کند. نیروی فشار کل وارد بر سطح مقطع A تیر عبارت خواهد بود از:

$$F = \int_A \int dF = Y \frac{d\varphi}{ds} \int_A \int z dA. \quad (۱۴۸-۵)$$



شکل ۵-۲۶ تنش طول نسبی در یک تیر خم شده.

چون کشش یا فشار خالص تیر را در نظر نمی‌گیریم $F = 0$ است و

$$\int_A \int z dA = 0. \quad (149-5)$$

این بدان معنی است که لایهٔ خنثی شامل شبه‌مرکز سطح A تیر است، و می‌توان انتظار داشت که OO' از شبه‌مرکز سطح مقطع تیر بگذرد. گشتاور خمشی وارد از نیروهای dF عبارت است از:

$$N = \int_A \int z dF = Y \frac{d\varphi}{ds} \int_A \int z^2 dA$$

$$= Yk^2 A \frac{d\varphi}{ds}, \quad (150-5)$$

که در آن:

$$k^2 = \frac{1}{A} \int_A \int z^2 dA, \quad (151-5)$$

و k شعاع چرخش سطح مقطع تیر حول محور افقی مار بر شبه‌مرکز آن است. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل برای φ عبارت است از:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{N}{Yk^2 A}. \quad (152-5)$$

فرض کنید که $y(x)$ انحراف تیر از محور افقی x به سمت بالا باشد که تا خط OO' اندازه‌گیری شده است، (شکل ۵-۲۵). در این صورت $y(x)$ باید به وسیلهٔ حل معادلهٔ زیر تعیین شود:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \varphi), \quad (153-5)$$

که در آن θ و φ از معادلات (۵-۱۴۴) و (۵-۱۵۲) تعیین شده‌اند. اگر فرض کنیم که θ و φ هر دو زوایای بسیار کوچکی باشند، معادلات (۵-۱۵۲) و (۵-۱۵۳) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{N}{Yk^2 A}, \quad (154-5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta + \varphi. \quad (155-5)$$

وقتی نیروهای متمرکز F_i در امتداد تیر وجود نداشته باشند، می‌توان از معادلهٔ (۵-۱۵۵) مشتق گرفت و با استفاده از معادلات (۵-۱۵۴)، (۵-۱۴۴)، (۵-۱۴۲)، و (۵-۱۴۳) روابط زیر را به دست آورد:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{nA} + \frac{N}{Yk^2 A}, \quad (156-5)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{nA} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{w}{Yk^2 A}. \quad (157-5)$$

اگر بتوانیم، چنانکه در مورد یک تیر ضخیم و کوتاه، از خمش صرف‌نظر کنیم، معادلهٔ (۵-۱۵۶) که در آن $N = 0$ ، یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم می‌شود که می‌توان $y(x)$ را از آن به دست آورد. برای

تیر بلندتر، باید از معادله (۵-۱۵۷) استفاده کرد. وقتی نیروهای متمرکز F_i وجود داشته باشند نیز می‌توان از این معادلات استفاده کرد، به این طریق که آنها را برای هر قطعه از تیر بین نقاطی که نیروهای F_i اعمال می‌شوند حل کرد و جوابها را در این نقاط به‌طور مناسب با هم سازگار کرد. جوابهای هر طرف نقطه‌ای مانند x_i که نیروی F_i به آن وارد می‌شود، باید چنان اختیار شود که y ، φ و N در x_i پیوسته باشند، در حالی که S ، dN/dx ، dy/dx ، و d^3y/dx^3 در نقطه x_i به اندازه مقداری که به وسیله معادلات (۵-۱۴۰)، (۵-۱۴۳)، (۵-۱۵۵)، و (۵-۱۵۶) معین می‌شود، افزایش یابند. جواب معادله (۵-۱۵۶) دارای دو ضریب دلخواه خواهد بود و جواب معادله (۵-۱۵۷) چهار ضریب دلخواه خواهد داشت که باید به وسیله شرایط دو انتهای تیر با قطعه تیر، معین شوند.

به‌عنوان مثال تیر یکنواختی به وزن W ، و طول L را در نظر بگیرید که در حالت افقی (یعنی به طوری که $\varphi = 0$) در انتهای طرف چپ ($x = 0$) توسط گیره‌ای محکم شده باشد و نیروی $F_1 = -W'$ در انتهای طرف راست آن ($x = L$) وارد شود. در این حالت معادله (۵-۱۵۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{W}{Yk^4AL} \quad (5-158)$$

جواب این معادله عبارت است از:

$$y = -\frac{Wx^4}{24Yk^4AL} + \frac{1}{6} C_4 x^3 + \frac{1}{2} C_3 x^2 + C_2 x + C_1 \quad (5-159)$$

برای تعیین ضرایب C_1 ، C_2 ، C_3 ، و C_4 در انتهای طرف چپ تیر داریم:

$$y = C_1 = 0, \quad (5-160)$$

$$\frac{dy}{dx} = C_2 = \theta = \frac{S}{nA} = -\frac{W+W'}{nA}, \quad (5-161)$$

که در آن معادلات (۵-۱۵۵) و (۵-۱۴۴) استفاده شده است. ما دو شرط دیگر لازم داریم که می‌توان آنها را به طرق مختلف تعیین کرد. ساده‌ترین طریق در این حالت این است که معادله (۵-۱۵۶) و مشتق آن را برای انتهای طرف چپ تیر به کار ببریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_3 = \frac{W}{nAL} - \frac{W'L + (1/2)WL}{Yk^2A}, \quad (5-162)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C_4 = \frac{1}{Yk^2A} \frac{dN}{dx} = -\frac{S}{Yk^2A} = \frac{W'+W}{Yk^2A}, \quad (5-163)$$

که در آن از معادله (۵-۱۴۳) استفاده شده است. بنابراین انحراف تیر از حالت افقی در هر نقطه x عبارت است از:

$$y = -\frac{L^4}{Yk^4A} \left[\frac{Wx^4}{4L^4} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{x}{L} + \frac{1}{6} \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{W'x^4}{2L^4} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{x}{L} \right) \right] - \frac{L}{nA} \left[\frac{Wx}{L} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{L} \right) + \frac{W'x}{L} \right] \quad (5-164)$$

۱. شرط $\varphi = 0$ به این معنی است که صفحه AA' قائم است، یعنی اگر هیچ تنش برشی موجود نباشد، تیر افقی خواهد بود.

و انحراف از حالت افقی در نقطه $x=L$ عبارت است از:

$$y = -\frac{L^3}{Yk^2A} \left[\frac{1}{8} W + \frac{1}{3} W' \right] - \frac{L}{nA} \left[\frac{1}{2} W + W' \right]. \quad (۱۶۵-۵)$$

اولین جمله در هر یک از معادلات عبارت است از انحراف تیر از حالت افقی ناشی از خمش، و دومین جمله عبارت است از انحراف ناشی از برش. جمله اول با L^3 نسبت مستقیم و با k^2 نسبت معکوس دارد. جمله دوم با L متناسب و از k مستقل است. بنابراین خمش برای تیرهای دراز و نازک و برش برای تیرهای ضخیم و کوتاه مهمتر است. اینجا تحلیل ما شاید برای تیرهای ضخیم و کوتاه چندان دقیق نباشد، زیرا همان طور که در بالا ذکر شد، بعضی از فرضیات ما در نزدیکی نقاط پایه یا نقاطی که بار به آنها وارد می شود، معتبر نیست («نزدیکی» در اینجا یعنی نسبت به ابعاد سطح مقطع تیر).

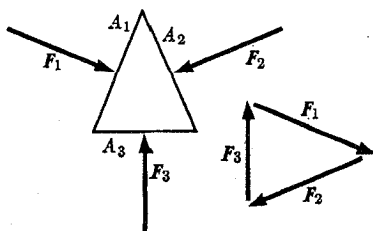
۱۱-۵ تعادل سیالات

سیال به صورت ماده ای تعریف می شود که در حال تعادل هیچ گونه برشی را تحمل نکند. مایعات و گازها شامل این تعریف اند و حتی عناصر خیلی چسبنده مانند زفت، قیر و مواد داخل هسته زمین در صورتی که به مدتی نسبتاً طولانی به حال خود باقی بمانند، ممکن است گاه به حالت تعادلی در آیند که در آن تنشهای برشی وجود نداشته باشند. تنش F/A در هر سطح کوچک A در یک سیال متعادل، باید بر A عمود باشد و عملاً در تمام حالات، فشار است و نه کشش.

ابتدا ثابت می کنیم که تنش F/A در نزدیکی هر نقطه از سیال، از طرز قرارگیری سطح A مستقل است. فرض کنید که دو جهت دلخواه داده شده باشد. منشور مثلث القاعده کوچکی با دو وجه مساوی $A_1 = A_2$ عمود بر دو جهت داده شده، بسازید. وجه سوم A_3 با دو وجه A_1 و A_2 مقطعی به شکل مثلث متساوی الساقین می سازد (شکل ۵-۲۷). فرض کنید F_1 ، F_2 و F_3 نیروهای تنشی عمود بر وجوه A_1 ، A_2 و A_3 باشند. اگر سیال داخل منشور در حال تعادل باشد، داریم:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0. \quad (۱۶۶-۵)$$

اینجا لازم نیست نیروهای وارد بر قواعد منشور منظور شوند، زیرا بر نیروهای F_1 ، F_2 و F_3 عمودند لذا مجموعشان به طور جداگانه باید برابر صفر شود. از معادله (۵-۱۶۶) و ساختمان منشور، نتیجه می شود که F_1 ، F_2 و F_3 باید تشکیل مثلث متساوی الساقین بدهند (شکل ۵-۲۷)



شکل ۵-۲۷ نیروهای وارد بر یک منشور مثلث القاعده در یک سیال.

و بنابراین:

$$F_1 = F_2. \quad (۱۶۷-۵)$$

چون جهت‌های F_1 و F_2 دو جهت دلخواه در سیال اند و چون $A_1 = A_2$ ، تنش F/A در تمام جهات یکسان است. در سیالات تنش را فشار p می‌نامند.

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}. \quad (۱۶۸-۵)$$

اکنون فرض کنید که سیال علاوه بر فشار، تحت تأثیر نیرویی خارجی مانند f بر واحد حجم قرار گرفته باشد. یعنی هر حجم کوچک dV از سیال، تحت تأثیر نیروی $f dV$ قرار گرفته باشد. چنین نیرویی را نیروی حجمی می‌نامند و f چگالی نیروی حجمی است. متداول‌ترین مثال نیروی ثقل است که در مورد آن

$$f = \rho g, \quad (۱۶۹-۵)$$

و در آن g شتاب ثقل، و ρ چگالی است. در حالت کلی، چگالی نیروی حجمی ممکن است در نقاط مختلف سیال مقادیر و امتدادهای مختلفی داشته باشد. در حالت معمولی که نیروی حجمی به وسیله معادله (۱۶۹-۵) داده می‌شود، g و امتداد f ثابت خواهد بود. اگر ρ ثابت باشد اندازه f نیز ثابت خواهد بود. فرض کنید P_1 و P_2 دو نقطه نزدیک بهم در سیال باشند که به وسیله یک بردار dr از هم جدا شده‌اند. استوانه‌ای به طول dr و مساحت سطح مقطع dA می‌سازیم که قاعده‌های آن شامل نقاط P_1 و P_2 باشند. در این صورت چون سیال در حال تعادل است، مؤلفه کل نیروی وارد بر سیال در داخل استوانه در جهت dr عبارت خواهد بود از:

$$f \cdot dr dA + p_1 dA - p_2 dA = 0,$$

که در آن p_1 و p_2 فشار در نقاط P_1 و P_2 است. بنابراین اختلاف فشار بین دو نقطه به فاصله dr عبارت است از:

$$dp = p_2 - p_1 = f \cdot dr. \quad (۱۷۰-۵)$$

اختلاف کل فشار بین دو نقطه در سیال که به وسیله بردارهای r_1 و r_2 مشخص شده‌اند، عبارت خواهد بود از:

$$p_2 - p_1 = \int_{r_1}^{r_2} f \cdot dr, \quad (۱۷۱-۵)$$

که در آن انتگرال خطی طرف راست باید در امتداد مسیری محاسبه شود که از r_1 به r_2 ، به تمامی داخل سیال قرار گرفته باشد. به کمک معادله (۱۷۱-۵) می‌توانیم با در دست داشتن فشار p_1 در r_1 ، فشار را در هر نقطه دیگری مثل r_2 که ممکن است از طریق مسیری دلخواه واقع در درون سیال به r_1 وصل شود، حساب کنیم. اختلاف فشار بین هر دو نقطه فقط به نیروی حجمی بستگی دارد. بنابراین اگر نیروی حجمی تغییر نکند باید هر تغییر فشار در هر نقطه از سیال متعادل، با تغییری مساوی در تمام نقاط دیگر همراه باشد. این قانون پاسکال است.

بنابه تعریف هندسی (۳-۱۰۷) گرادیان، معادله (۵-۱۷۰) متضمن این است که:

$$F = \nabla p. \quad (۱۷۲-۵)$$

گرادیان فشار در سیالی متعادل باید مساوی چگالی نیروی حجمی باشد. این نتیجه نشان می‌دهد که نیروی خالص ناشی از فشار وارد به واحد حجم برابر $-\nabla p$ است. فشار p نوعی انرژی پتانسیل بر حسب واحد حجم است. بدین معنی که گرادیان منفی آن نمایشگر نیرویی ناشی از فشار بر حسب واحد حجم است. مع هذا انتگرال $p dV$ روی یک حجم، مگر در حالات بسیار خاص، نمایشگر انرژی پتانسیل نخواهد بود. معادله (۵-۱۷۲) متضمن آن است که سطوح فشار ثابت در سیالها همه جا بر نیروی حجمی عمود باشند. طبق معادلات (۳-۱۸۷) و (۵-۱۷۲) چگالی نیروی f باید در معادله زیر صدق کند:

$$\nabla \times f = 0. \quad (5-173)$$

در نتیجه این شرط لازمی است برای نیروی حجمی، تا تعادل سیال ممکن گردد. از این گذشته برای امکان تعادل شرطی کافی نیز هست. این نتیجه‌ای است از بحث بخش ۳-۱۲ زیرا اگر معادله (۵-۱۷۳) برقرار باشد، اجازه داریم تابعی مانند $p(r)$ را به وسیله معادله زیر تعریف کنیم:

$$p(r) = p_1 + \int_{r_1}^r f \cdot dr, \quad (5-174)$$

که در آن p_1 فشار در نقطه‌ای ثابت مانند r_1 است و انتگرال را می‌توان در امتداد هر مسیری واقع در درون سیال از r_1 به r حساب کرد. اگر فشار سیال در هر نقطه r دارای مقدار $p(r)$ حاصل از معادله (۵-۱۷۴) باشد، در این صورت معادله (۵-۱۷۲) برقرار خواهد بود و نیروی حجمی f بر حسب واحد حجم در هر نقطه به وسیله نیروی فشاری $-\nabla p$ بر حسب واحد حجم، خنثی خواهد شد. بنابراین معادله (۵-۱۷۴) توزیع فشار در حالت تعادل را برای هر نیروی حجمی که در معادله (۵-۱۷۳) صدق کند تعریف می‌کند.

اگر چگالی نیروی حجمی معلوم باشد مسئله یافتن فشار درون سیالی متعادل به طور مسلم از نظر ریاضی مشابه است با مسئله یافتن انرژی پتانسیل تابع نیروی داده شده $f(r)$ که در بخش (۳-۱۲) مورد بحث قرار گرفت. برای آنکه مطمئن شویم که تعادل امکان‌پذیر است ابتدا می‌بینیم که آیا $\nabla \times f$ در داخل سیال همه جا صفر است یا نه. سپس نقطه r_1 را که فشارش معلوم است اختیار می‌کنیم و با گرفتن انتگرال در امتداد هر مسیر مناسب، برای یافتن فشار در هر نقطه دیگر از معادله (۵-۱۷۴) استفاده می‌کنیم.

نیروی کل وارد بر حجم V سیال عبارت است از:

$$F_b = \iiint_V f dV. \quad (5-175)$$

نیروی کل ناشی از فشار بر سطح A حجم V عبارت است از:

$$F_p = - \int_A \hat{n} p dA, \quad (5-176)$$

که در آن \hat{n} بردار یکه است که در هر نقطه از سطح به طرف خارج متوجه است. چون سیال در حال تعادل است، این دو نیرو باید مساوی و مختلف‌الجهت باشند:

$$F_p = -F_b. \quad (5-177)$$

اعم از اینکه سیال حجم V را پر کرده باشد یا نه، نیروی کل ناشی از فشار بر سطح حجم V از معادله (۵-۱۷۶) به دست می آید. لذا از معادله (۵-۱۷۷) نتیجه می گیریم که بر هر جسم فرو رفته در سیالی متعادل، نیرویی مانند F_p ناشی از فشار وارد می شود که با نیروی حجمی F_b که اگر حجم V به وسیله سیالی متعادل پر شده بود بر حجم V وارد می شد مساوی و مختلف الجهد است. این اصل ارشمیدس است. از ترکیب معادلات (۵-۱۷۲)، (۵-۱۷۵)، (۵-۱۷۶)، و (۵-۱۷۷) نتیجه می شود که:

$$\int_A \int \hat{n} p dA = \int_V \int \int \nabla p dV. \quad (5-178)$$

این معادله شبیه قضیه دیورژانس گاوس (معادله (۳-۱۱۵)) است، با این تفاوت که توابع زیر علامت انتگرال به عوض $\hat{n} \cdot A$ و $\nabla \cdot A$ ، توابع $\hat{n} p$ و ∇p اند. در واقع قضیه گاوس را می توان به شکلی بسیار کلی و مفید ثابت کرد چنانکه به کمک آن می توانیم عامل \hat{n} در یک انتگرال سطح را به وسیله ∇ در انتگرال حجمی مربوط به آن، بی هیچ گونه محدودیتی بر شکل تابع زیر علامت انتگرال جایگزین کنیم با این تفاوت که باید طوری نوشته شود که علامت مشتق گیری ∇ بر تمام تابع زیر علامت انتگرال عمل کند.^۱ با در دست داشتن این نتیجه می توان از معادلات (۵-۱۷۵)، (۵-۱۷۶)، و (۵-۱۷۷) شروع کرد و معادله (۵-۱۷۲) را به دست آورد:

$$F_b + F_p = \int_V \int \int f dV - \int_A \int \hat{n} p dA = \int_V \int \int (f - \nabla p) dV = 0. \quad (5-179)$$

چون معادله فوق باید برای هر حجم V برقرار باشد، معادله (۵-۱۷۲) نتیجه می شود. تا به حال فقط فشار، یعنی تنش در سیالات را در نظر گرفتیم. تغییر شکل نسبی ناشی از فشار درون یک سیال عبارت است از تغییر حجم سیال بر حسب واحد جرم آن یا به عبارت دیگر، تغییری در چگالی آن. اگر قانون هوک برقرار و ضریب حجمی هم معلوم باشد، تغییر dV در حجم V ناشی از تغییر کوچک dp در فشار را می توان از معادله (۵-۱۱۶) به دست آورد:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{B}. \quad (5-180)$$

اگر جرم سیال موجود در حجم V ، M باشد، در این صورت چگالی عبارت است از:

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (5-181)$$

و تغییر چگالی dp مربوط به یک تغییر خیلی کوچک dV در حجم از معادله زیر حاصل می شود:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}, \quad (5-182)$$

به طوری که تغییر تولید شده در چگالی به وسیله تغییر فشار کوچک dp عبارت است از:

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{B}. \quad (5-183)$$

۱. برای اثبات این قضیه به بخش ۳۴ فصل ۳ کتاب زیر مراجعه کنید:

بعد از یک تغییر متناهی فشار از p_0 به p ، چگالی عبارت خواهد بود از:

$$\rho = \rho_0 \exp \left(\int_{p_0}^p \frac{dp}{B} \right). \quad (۱۸۴-۵)$$

در هر حال، چگالی یک سیال به وسیله معادله حالت آن بر حسب فشار و درجه حرارت تعیین می شود. معادله حالت برای یک گاز کامل عبارت است از:

$$pV = RT, \quad (۱۸۵-۵)$$

که در آن T درجه حرارت مطلق، و V حجم هر مول، و R ثابت کیهانی گاز است:

$$R = ۸,۳۱۴ \times ۱۰^۷ \text{ erg-deg}^{-1} \text{ C-mole}^{-1}. \quad (۱۸۶-۵)$$

و با استفاده از معادله (۱۸۱-۵)، چگالی بر حسب فشار و درجه حرارت به دست می آید:

$$\rho = \frac{Mp}{RT}, \quad (۱۸۷-۵)$$

که در آن M وزن ملکولی است.

اکنون این نتایج را در مورد متداول ترین حالت که در آن نیروی حجمی همان نیروی ثقل وارد بر سیال در یک میدان ثقل قائم یکنواخت است (معادله (۱۶۹-۵)) به کار می بریم. اگر معادله (۱۷۳-۵) را برای این حالت به کار ببریم، نتیجه می شود که:

$$\nabla \times f = \nabla \times (\rho g) = 0. \quad (۱۸۸-۵)$$

چون g ثابت است علامت مشتق گیری که در علامت ∇ مستتر است، فقط بر ρ عمل می کند، و می توان اسکالر (شمارواره) ρ را از یک عامل حاصل ضرب خارجی به عامل دیگر انتقال داد و رابطه زیر را به دست آورد:

$$(\nabla \rho) \times g = 0, \quad (۱۸۹-۵)$$

یعنی گرادینان چگالی باید به موازات میدان ثقل باشد. چگالی باید در هر صفحه افقی درون سیال، ثابت باشد. همچنین معادله (۱۸۹-۵) را می توان از طریق نوشتن مؤلفه های بردارهای $\nabla \times (\rho g)$ و $(\nabla \rho) \times g$ به طور صریح، و نشان دادن یکسانی آنها، از معادله (۱۸۸-۵) به دست آورد. طبق معادله (۱۷۲-۵)، فشار نیز در هر صفحه افقی درون سیال ثابت است. بنابراین فشار و چگالی فقط توابعی از ارتفاع قائم z درون سیال اند. از معادلات (۱۷۲-۵) و (۱۶۹-۵) معادله دیفرانسیل زیر را برای فشار به صورت تابعی از z ، به دست می آوریم:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (۱۹۰-۵)$$

اگر سیال تراکم ناپذیر و ρ یکنواخت باشد، جواب این معادله عبارت است از:

$$p = p_0 - \rho g z, \quad (۱۹۱-۵)$$

که در آن p_0 فشار در نقطه $z = 0$ است. اگر سیال، گازی کامل باشد، p یا ρ را می توان به وسیله

۱. چون بنا به معادله (۲۱-۶) $\nabla \times g = 0$ ، معادله (۱۸۹-۵) برای میدان ثقل غیریکنواخت نیز معتبر است.

معادله (۵-۱۸۷)، از معادله (۵-۱۹۰) حذف کرد. اگر چگالی را حذف کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT} p. \quad (5-192)$$

به عنوان مثال، اگر فرض کنیم که جو از نظر درجه حرارت و ترکیب یکنواخت باشد، می توانیم فشار جو را به صورت تابعی از ارتفاع از معادله (۵-۱۹۲) به دست آوریم:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT} z\right). \quad (5-193)$$

مسائل

۱. (الف) ثابت کنید که انرژی جنبشی کل دستگاهی از ذرات که جسم صلبی را می سازند و به وسیله معادله (۴-۳۷) تعریف می شود، وقتی جسم حول محور ثابتی دوران کند، به وسیله معادله (۵-۱۶) به طور صحیح داده می شود. (ب) اگر N_z مجموع گشتاور-نیروهای ناشی از نیروهای خارجی حول محور دوران باشد، ثابت کنید که وقتی جسم از θ_0 به θ دوران می کند، انرژی پتانسیل داده شده به وسیله معادله (۵-۱۴) همان کار کل انجام شده در مقابل نیروهای خارجی است.

۲. طرح تشابهی بخش ۵-۲ را به کار برده قضیه‌ای مشابه قضیه داده شده به وسیله معادله (۲-۸) تنظیم کنید، و با شروع از معادله (۵-۱۳) آن را ثابت کنید.

۳. با در دست داشتن معادله حرکت دورانی (۵-۱۳) ثابت کنید که اگر N_z فقط تابعی از θ باشد، در این صورت $T + V$ ثابت است.

۴. چرخ رفاصک یک ساعت شامل حلقه‌ای به جرم M و شعاع a و پره‌هایی به جرم ناچیز است. فنر تنظیم‌کننده گشتاور-نیروی بازگرداننده $-k\theta$ را به آن وارد می کند. اگر چرخ تا زاویه θ چرخانده و سپس رها شود، معادله حرکت را پیدا کنید.

۵. چرخشی به جرم M ، و شعاع چرخش k ، به نرمی حول محور افقی ثابتی به شعاع a می چرخد که از سوراخ مرکز چرخ که شعاع آن اندکی بزرگتر است، می گذرد. ضریب اصطکاک بین سطوح یاطاقان μ است. اگر چرخ از ابتدا با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد، زمان و تعداد دوران را تا هنگام توقف پیدا کنید.

۶. چرخشی به جرم M و شعاع چرخش k روی محوری افقی سوار شده است. فنر مدوری که به محور وصل است گشتاور-نیروی $N = -K\theta$ را اعمال می کند که منجر می شود به برگرداندن چرخ به حالت تعادلش در $\theta = 0$. جرم m روی حاشیه چرخ در نقطه‌ای که به طور عمودی بالای محور و به فاصله $2k$ از محور است، وقتی $\theta = 0$ ، قرار داده شده است. انواع حرکت‌هایی را که می توانند رخ دهند، توصیف کنید. مکان تعادل پایدار یا ناپایدار چرخ را، در صورت وجود، مشخص کنید، و فرکانسهای نوسانات کوچک حول نقاط تعادل را به دست آورید. دو حالت را در نظر بگیرید: (الف) $K > 2mgk$. (ب) $K = 2mgk/\pi$. اگر $K < 2mgk/\pi$ چه [راهنمایی. معادله مثلثاتی را به طور تریسیمی حل کنید].

۷. ملخ هواپیمایی به گشتاور ماند I ، تحت تأثیر گشتاور-نیروی راننده $(1 + \alpha \cos \omega t) N = N_0$ و گشتاور-نیروی اصطکاکی ناشی از مقاومت هوای $N_f = -b\dot{\theta}$ قرار می گیرد. حرکت حالت پاینده آن را پیدا کنید.

۸. دستگاه چرخندهٔ موتوری ۲ کیلوگرم وزن دارد و شعاع چرخش آن ۵ سانتی متر است. تندی بی باری دستگاه چرخنده به ۱۵۰۰ دور در دقیقه می رسد و سیم پیچی آن طوری است که گشتاور - نیروی آن مستقل از سرعتش باشد. جریان موتور در حداکثر سرعت و ولتاژ ۱۱۰ ولت، ۲ آمپر است. فرض کنید که بازده الکتریکی ۸۰٪ و نیروی اصطکاک با مجذور سرعت زاویه ای متناسب باشد. اگر موتور بی بار روشن شود زمان لازم برای آنکه سرعتش به ۱۲۰۰ دور در دقیقه برسد چقدر است؟

۹. معادلات (۳۵-۵) و (۳۶-۵) را به دست آورید.

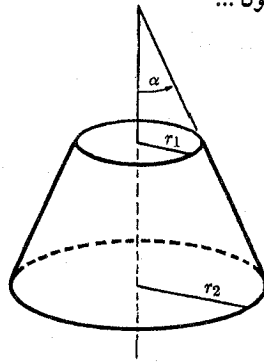
۱۰. فرض کنید که آونگ ساده ای تحت تأثیر گشتاور-نیروی اصطکاک $mb\dot{\theta}$ - ناشی از اصطکاک نقطهٔ آویزش و نیروی اصطکاک $b\dot{\varphi}$ (وارد بر گلوله) ناشی از مقاومت هوا قرار گرفته باشد، که در آن φ سرعت گلوله است. گلوله دارای جرم m است و به وسیلهٔ ریسمانی به طول l آویزان شده است. زمان لازم برای آنکه دامنهٔ نوسان به $1/e$ مقدار اولیهٔ (کوچک) خود برسد چقدر است؟ m و l چقدر باید اختیار شوند تا آونگ هرچه بیشتر نوسان کند؟ m و l چگونه باید اختیار شوند تا آونگ تا جایی که ممکن است بیشتر دور بزند؟

۱۱. بچه ای به جرم m روی تابی (به جرم قابل اغماض) که به وسیلهٔ طنابی به طول l حمایت می شود، می نشیند. فرض کنید که ابعاد بچه در مقایسه با l قابل اغماض اند. پدرش بچه را به عقب می کشد تا طناب زاویه ای برابر با یک رادیان با محور عمودی بسازد، سپس با نیروی $F = mg$ در امتداد کمان یک دایره هل می دهد تا طناب عمودی شود و بعد تاب را رها می کند. (الف) تاب چقدر بالا خواهد رفت؟ (ب) برای چه مدت زمانی پدر بچه تاب را هل داد؟ (فرض کنید که اجازه داریم بنویسیم $\theta = \sin \theta$ برای $\theta < 1$). مقایسه کنید با زمان لازم برای اینکه تاب به حالت عمودی برسد اگر پدر بچه تاب را بدون هل دادن، رها کند.

۱۲. یک چوب بیسبال که در حالت سکون به طور افقی نگه داشته شده است در یک نقطهٔ O' مورد اصابت توپی قرار می گیرد که ضربهٔ افقی J عمود بر چوب را تولید می کند. وانمود کنید که چوب ابتدا موازی محور x و توپ بیسبال در جهت منفی موازی محور y حرکت می کند. مرکز جرم چوب G در ابتدا در مبدأ است، و نقطهٔ O' به فاصلهٔ h' از G است. با این فرض که به مجرد اصابت توپ به چوب، چوب رها می شود و با صرف نظر کردن از اثر جاذبه (گرائش)، حرکت مرکز جرم، $x(t)$ و مرکز ضرب، $y(t)$ ، را در طول چند لحظهٔ اولیه بعد از ضربه، مثلاً تا اینکه چوب 45° چرخیده شود، به دست آورید و ترسیم کنید. در مورد اختلاف بین حرکت اولیهٔ مرکز جرم و حرکت اولیهٔ مرکز ضرب نظر دهید.

۱۳. آونگ مرکبی چنان تنظیم شده است که بتواند حول هر یک از دو محور موازی مار بر نقاط O و O' نوسان کند. نقاط O و O' بر روی خطی مار بر مرکز جرم، قرار دارند. فواصل h و h' از O و O' تا مرکز جرم، و زمانهای متناوب τ و τ' ارتعاشهای کم دامنهٔ حول محورهای O و O' اندازه گیری می شوند. O و O' چنان قرار گرفته اند که هر یک نسبت به دیگری تقریباً مرکز نوسان است. اگر $\tau = \tau'$ باشد، فرمولی برای g بر حسب کمیت های اندازه گیری شده پیدا کنید. اگر $\tau = \tau'(1 + \delta)$ و $\delta \ll 1$ باشد، اصلاحیه ای را که باید به فرمول قبلی اضافه کرد تا اینکه فرمول تا جملات مرتبهٔ δ صحیح باشد، پیدا کنید.

۱۴. ثابت کنید که اگر جسمی متشکل از دو یا بیشتر از دو قسمت باشد که مراکز جرم آنها معلوم



شکل ۵-۲۸ مخروط ناقص.

باشند، مرکز جرم جسم مرکب را می توان با در نظر گرفتن قسمتهای متشکله اش به عنوان ذرات مجردی که در مراکز جرم مربوطه شان قرار داده شده اند، حساب کرد. فرض کنید که هر قسمت متشکله k به وسیله یک چگالی $\rho_k(r)$ از جرم توصیف می شود که به طور پیوسته روی ناحیه اشغال شده توسط قسمت k توزیع می شود.

۱۵. قرص دایره ای شکلی به شعاع a در صفحه xy چنان قرار دارد که مرکز آن در مبدأ مختصات است. نیمه بالای محور x قرص دارای چگالی σ به واحد سطح و نیمه پایین محور x آن دارای چگالی 2σ است. مرکز جرم G ، و گشتاورهای ماند حول محورهای x ، y ، و z و حول محورهای موازی مار بر G را پیدا کنید. تا آنجا که می توانید از قضایای ساده کننده محاسبات استفاده کنید.

۱۶. (الف) فرمولی برای گشتاورهای ماند مخروطی به جرم m و ارتفاع h و زاویه مولد α ، حول محور تقارن آن و حول محوری مار بر رأس و عمود بر محور تقارن، پیدا کنید. مرکز جرم مخروط را بیابید. (ب) از این نتایج استفاده کنید و مرکز جرم مخروط ناقصی را که در شکل ۵-۲۸ نشان داده شده است، تعیین کنید و همچنین گشتاورهای ماند حول محورهای افقی مار بر هر قاعده و مرکز جرم را حساب کنید. جرم مخروط ناقص M است.

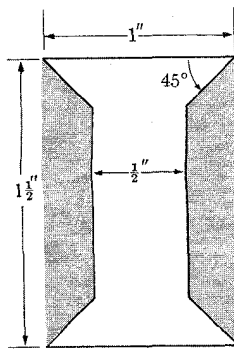
۱۷. گشتاورهای ماند شیء نشان داده شده در شکل ۵-۸ را حول محورهایی که از مرکز جرمش می گذرند و موازی هریک از سه جدار شیء می باشند، به دست آورید.

۱۸. کره ای به جرم M و شعاع R به طور افقی طوری بریده می شود که فاصله مرکز برش تا مرکز کره $1/2 R$ است. قسمت کوچکتر کره دور انداخته می شود. مطلوب است مرکز جرم قسمت باقیمانده، و گشتاورهای ماند حول محور تقارن، و حول محوری عمودی که از مرکز جرم می گذرد.

۱۹. چند یارد نخ به قطر $0/03$ اینچ را می توان دور قرقه شکل ۵-۲۹ پیچید؟

۲۰. اگر حجم یک مخروط حاصل ضرب سطح قاعده در $1/3$ ارتفاع باشد، به کمک قضیه پاپوس شبه مرکز مثلث قائم الزاویه ای را تعیین کنید که ساقهایش به طول a و b باشند.

۲۱. ثابت کنید که قانون دوم پاپوس حتی اگر محور دوران سطح را قطع کند، به شرط آنکه حجم را تفاضل بین دو حجم ایجاد شده به وسیله دو قسمت دو طرف محور فرض کنیم، معتبر خواهد بود. تعمیم مشابه در مورد قانون اول چگونه است؟



شکل ۲۹-۵ چند یارد نخ می توان روی این فرقره پیچید؟

۲۲. مرکز جرم سیمی را پیدا کنید که به صورت نیم دایره‌ای به شعاع a خم شده است. شعاعهای چرخش حول محورهای x ، y ، و z مار بر مرکز جرم را وقتی z بر صفحه نیم دایره عمود است و x نیم دایره را نصف می کند، پیدا کنید. ابتکاری به کار برید تا محاسبات لازم به حداقل کاهش یابد.

۲۳. (الف) فرمولی برای شعاع چرخش میله یکنواختی به طول l حول محوری مار بر یکی از دو انتهای آنکه با آن زاویه α می سازد، پیدا کنید. (ب) هرم مثلث القاعده مستطمی از شش میله یکنواخت ساخته شده است. با استفاده از قسمت (الف)، گشتاور ماند این هرم را حول محوری مار بر شبه مرکز و یکی از رئوس آن، پیدا کنید.

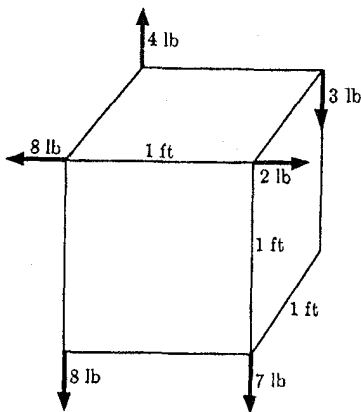
۲۴. شعاعهای چرخش یک لایه مسطح بیضی شکل را که نصف قطر بزرگ آن a و ضریب خروج از مرکزش e است حول محورهای اطول و اقصر، و نیز حول محور دیگری مار بر یکی از کانونها و عمود بر سطح لایه، پیدا کنید.

۲۵. نیروهای ۱، ۲، ۳، و ۴ کیلوگرم - وزن به صورت دنباله‌ای در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در امتداد چهار ضلع مربعی به مساحت 0.5×0.5 متر مربع، وارد می شوند. جهت نیروها نیز در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به دور مربع است. نیروهای متعادل کننده را پیدا کنید.

۲۶. نیروهای ۱، ۲، ۳، و ۴ پوندی به صورت دنباله‌ای در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در امتداد سه ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع، وارد می شوند. طول ضلع مثلث ۴ پا است. نیروهای متوجه را به دست آورید.

۲۷. (الف) دستگاه نیروهای وارد بر مکعبی که در شکل ۵-۳۰ نشان داده شده است را به یک تک نیروی معادل وارد بر مرکز مکعب و یک جفت متشکل از دو نیرو که بر دو گوشه مجاور مربع وارد می شوند، تبدیل کنید. (ب) این دستگاه را به یک دستگاه دو نیرویی تبدیل و نقاط عمل آنها را مشخص کنید. (پ) این دستگاه را به یک تک نیرو و یک گشتاور - نیروی موازی با آن تبدیل کنید.

۲۸. کره‌ای به وزن ۵۰۰ گرم بین انگشت شصت و انگشت اول در دو انتهای مقابل یک قطر افقی نگه داشته شده است. ریسمانی به نقطه‌ای روی سطح کره وصل شده است که انتهای یک قطر افقی قائم (بر قطر افقی بالا) است. ریسمان با نیروی ۳۰۰ گرمی در جهتی موازی خط از انگشت اول به شصت، کشیده می شود. مطلوب است نیروهایی که انگشت اول و شصت باید اعمال کنند تا کره را ساکن نگه دارند. آیا جواب منحصر به فرد است؟ آیا جوابتان با درک فیزیکی تان درباره مسئله تطابق دارد؟



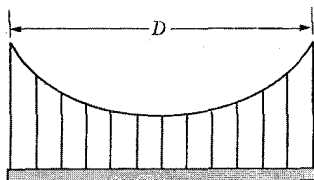
شکل ۵-۳۰ دستگاهی از نیروهای وارد بر یک مکعب.

۲۹. یک قایق بادبانی در جهتی حرکت می‌کند که با جهت وزش باد زاویه α می‌سازد. فرض کنید که بادبان یک سطح مسطح است و آنقدر کشیده می‌شود تا با تیر ته قایق زاویه β بسازد. (اگر بادبان باید جلوی باد را بگیرد، $\beta < \alpha$). فرض کنید که نیروی وارده به بادبان به وسیله باد بر بادبان عمود و متناسب با مؤلفه سرعت باد است که بر بادبان عمود است. مطلوب است زاویه β که اگر در آن زاویه بادبان را کوتاه کنید، مؤلفه نیرو در جهت حرکت قایق حداکثر خواهد شد. اگر قایقران با حرکت دادن قایق (طبق وزش باد) به عقب و جلو در یک زاویه α از باد، بخواهد به نقطه‌ای مستقیماً در جهت باد برسد، و اگر اصطکاک که سرعت قایق را محدود می‌کند متناسب با سرعتش باشد، زاویه بهترین حالت ممکنه α (به فرض اینکه β نیز بهترین حالت ممکنه گرفته شده باشد) چه باشد که مؤلفه سرعت در جهت مخالف باد را حداکثر کند؟ چند تا نادرستی می‌توانید در فرضهای مذکور پیدا کنید، و چه اثری هر یک از آنها روی زوایای بهترین حالت ممکن β و α دارد؟

۳۰. طنابی به طول ۱۰ متر بین دو نقطه به فاصله ۵ متر افقی از هم بسته شده است. یک جرم ۵۰ کیلوگرمی از وسط طناب آویزان شده است. مساحت سطح مقطع طناب ۱ سانتی‌متر مربع و $Y = ۵۰۰$ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع است. کشش در طناب را با در نظر گرفتن کشیدگی اش به اولین تقریب، پیدا کنید.

۳۱. کابلی را باید طوری طراحی کرد که به طور قائم آویزان شود و باری به وزن W را در فاصله l زیر نقطه آویزش نگه دارد. کابل باید از ماده‌ای درست شود که دارای ضریب یانگ Y و وزن w بر حسب واحد حجم باشد. می‌خواهیم تا جایی که طول l کابل نسبتاً بزرگ باشد وزن کابل را به کوچکترین مقدار مکمل نگه داریم. برای این کار مساحت سطح مقطع عرضی $A(z)$ را در ارتفاع z در بالای انتهای پایینی کابل به اندازه‌ای انتخاب می‌کنیم که فقط بتواند بار زیر خود را تحمل کند. کابل از ماده‌ای ساخته شده است که باری که آن را تا ۱٪ می‌کشد تحمل کند و پاره نشود. تابع $A(z)$ را وقتی کابل، بار داده شده را تحمل می‌کند، معین کنید.

۳۲. کابلی به خط مستقیم بین دو نقطه ثابت وصل شده است. اگر نیروی جانبی W را به مرکز کابل وارد کنیم می‌توان نیروی بسیار بزرگتر τ را به نقاط تکیه‌گاه در هر یک از دو انتهای کابل وارد کرد. به فرض آنکه زاویه‌ای که کابل تحت آن کشیده می‌شود کوچک باشد، فرمولی برای τ بر حسب W ، مساحت مقطع A و ضریب یانگ Y کابل پیدا کنید. (ب) نشان دهید که این فرض، اگر $W = ۱۰۰$ پوند، $A = ۳$ اینچ مربع و $Y = ۶۰۰۰۰ \text{ lb-in}^{-۲}$ باشد کاملاً برقرار است. τ را پیدا کنید.



شکل ۵-۳۱ یک پل معلق.

۳۳. کابلی به طول ۲۰ فوت بین دو نقطه A و B به فاصله ۱۵ فوت از هم بسته شده است. خط AB با افق زاویه 30° می‌سازد (نقطه B بالاتر از نقطه A قرار گرفته است). وزنه‌ای ۲۰۰۰ پوندی از نقطه C به فاصله ۸ فوت از انتهای A کابل آویزان شده است. (الف) به فرض اینکه کابل کشیده نشود، مکان نقطه C و کشش کابل را پیدا کنید. (ب) اگر قطر کابل $1/2$ اینچ و ضریب یانگ آن $5 \times 10^5 \text{ lb-in}^{-2}$ باشد، مکان نقطه C و کششها را با در نظر گرفتن کشیدگی کابل پیدا کنید. دو تقریب متوالی را رعایت کنید و دقت نتیجه را تخمین بزنید.

۳۴. (الف) کابلی به طول l و وزن w بر حسب واحد طول از نقاط $x = \pm a$ واقع بر محور x آویزان شده است. محور y قائم است. با شرط آنکه y در نقطه $x = \pm a$ صفر و l طول کل کابل باشد، نشان دهید که در معادله (۵-۱۳۴)، زاویه $\alpha = 0$. معادلاتی که بتوان β و C را از آنها حساب کرد، بنویسید. (ب) نشان دهید که اگر کابل نسبت به محور y متقارن باشد و نیروهای انتهایی وزن آن را خنثی کنند، همان نتایج را می‌توان برای α و C به دست آورد.

۳۵. پلی که وزن واحد طول آن w است باید از کابلهایی که وزنشان ناچیز فرض می‌شود، مطابق شکل ۵-۳۱ آویزان شود. می‌خواهیم شکل کابلهای معلق را طوری تعیین کنیم که کابلهای قائمی که به فواصل مساوی از هم قرار گرفته‌اند، وزنه‌های مساوی تحمل کنند. فرض کنید که کابلهای قائم آنقدر به هم نزدیک‌اند که می‌توانیم وزن w به واحد طول را به طور پیوسته در امتداد کابلهای معلق توزیع شده در نظر بگیریم. در این صورت تفاوت این مسئله با مسئله‌ای که در متن مورد بحث قرار گرفت در این است که در آن مسئله، ریسمان دارای وزن w بر حسب واحد طول s در امتداد ریسمان بود در حالی که در اینجا وزن w در واحد فاصله افقی x توزیع شده است. معادله دیفرانسیلی برای شکل تابع $y(x)$ کابل معلق بنویسید و به فرض اینکه دو انتها در نقاط $x = \pm (1/2)D$ ، $y = 0$ و حداکثر کشش کابل τ باشد، تابع $y(x)$ را از معادله دیفرانسیل به دست آورید.

۳۶. کابلی به طول l و وزن واحد طول w از نقاط $x = \pm a$ واقع بر محور x آویزان شده است. محور y قائم است. وزنه W از نقطه وسط کابل آویزان شده است. معادلاتی را بنویسید که از آنها بتوان β ، α و C را تعیین کرد.

۳۷. یک تیر یکنواخت با سطح مقطع مربع ($l \times l$) که دو سرش به طور مربع بریده شده‌اند از ماده‌ای ساخته شده است که برای آن $Y = n$ است. این تیر به طور محکم در یک کانال افقی مربع نگه داشته شده است و از انتهای کانال به اندازه L بیرون آمده است. برای چه مقداری از L انحراف در انتها به طور مساوی در اثر بریدگی و خمیدگی است؟ برای آن مقدار L ، زاویه بین سطح انتهایی و

صفحه‌ای عمودی چقدر است؟ زاویه بین سطح بالایی تیر در انتها و سطح افقی چقدر است؟ فرض کنید $YI^2 \ll W$.

۳۸. الکلنگی از تیر چوبی مکعب مستطیل شکلی به سطح مقطع 12×2 اینچ مربع و به طول ۱۰ فوت و وزن ۶۰ پوند تشکیل شده است. ضریب یانگ $10^{10} \text{ lb-in}^{-2}$ است. تیر بر روی پایه نازکی در مرکز آن در تعادل است. دو بچه که وزن هر یک ۱۰ lb است به فاصله ۱ ft از هر انتهای الوار می‌نشینند. شکل الوار را وقتی در حالت افقی متعادل است، پیدا کنید. از نیروی برشی صرف‌نظر کنید.

۳۹. لوله‌ای خالی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b از ماده‌ای با ضریب یانگ Y ، و ضریب برشی n و چگالی ρ ساخته شده است. دو قطعه افقی به طول L از هر دو سر در دو گیره ثابت شده است. مقدار افت را در مرکز بیابید. وقتی لوله از سیالی به چگالی ρ پر شده باشد، افزایش افت را پیدا کنید.

۴۰. عرض لبه‌های زیرین و زبرین تیری به مقطع I و a است و ارتفاع دیواره میان آنها b و ضخامت لبه‌ها و دیواره c است که در مقایسه با a و b قابل اغماض است. تیر از ماده‌ای ساخته شده است که ضریب یانگ آن Y و ضریب برشی آن n است. وزن تیر W و طول آن L است و در هر یک از دو انتها بر روی پایه‌ای متکی است. وزنه W' بر نقطه وسط تیر قرار دارد. مقدار افت تیر را در نقطه وسطی آن پیدا کنید و آن را به عبارتی ناشی از برش و خمش و همچنین عبارتی ناشی از وزن W و W' تقسیم کنید.

۴۱. زمانی پیشنهاد شده بود که یک سکوی فضایی دائم به این ترتیب ساخته شود که یک بالون هرم‌شکلی که ۶۰ میل ارتفاع دارد را روی سطح زمین علم کرده و با هوایی که فشارش کمی از فشار جوئی بیشتر است پُر کنند. یک فشار ۱ پوند بر اینچ مربع در نوک برای حمایت بارهای به نسبت سنگین کفایت می‌کند. بی در نظر گرفتن ایرادهای دیگر، با محاسبه فشار در بالون در سطح دریا، به فرض اینکه بالون از هوای صفر درجه سانتیگراد پُر شده است و فشار در ۶۰ میل ۱ پوند بر اینچ مربع است، نشان دهید که این عقیده عملی نیست.

۴۲. اگر ضریب حجمی آب B و فشار جو در سطح اقیانوس p باشد با در نظر گرفتن قابلیت تراکم آب فشار را به صورت تابعی از عمق اقیانوس پیدا کنید. فرض کنید که B ثابت است. B آب را از جدول پیدا کنید و خطایی را که در عمق ۵ میلی به سبب اغماض قابلیت تراکم آب به وجود می‌آید تخمین بزنید.

۴۳. با فرض آنکه درجه حرارت با ارتفاع کم می‌شود و این کاهش با ارتفاع متناسب است، فشار جو را به صورت تابعی از ارتفاع پیدا کنید.

۴۴. نقض کوچکی در بحث مقدماتی بخش ۵-۱۱ به خاطر صرف‌نظر کردن از یک نیروی جسمی ممکن در معادله (۵-۱۶۶)، موجود است. نشان دهید که حتی وقتی نیروهای جسمی حاضرند، تنش در هر نقطه در یک سیال در حالت تعادل، در تمام جهات یکی است. [راهنمایی. بگذارید اندازه منشور به صفر کاهش یابد و نشان دهید که در این حد، نیروی جسمی در مقایسه با تنش در سراسر سطح‌اش قابل اغماض است.]

۱-۶ مرکز ثقل اجسام گسترده

همان طور که به خاطر دارید ما در بخش ۱-۵ قانون ثقل را به زبان ریاضی بیان کردیم. هر یک از دو ذره به اجرام m_1 و m_2 و به فاصله r از یکدیگر، دیگری را با نیرویی که به وسیله معادله (۱-۱) داده می شود، جذب می کنند:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}, \quad (1-6)$$

که در آن

$$G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ dyne-cm}^2\text{-g}^{-2}, \quad (2-6)$$

G با اندازه گیری نیروهای وارد بین دو کره بزرگ سربی به وسیله ترازوی پیچشی دقیقی معین می شود. معادله (۱-۶) را می توان به صورت برداری، که اندازه و جهت نیروهای جاذب را مشخص می کند، نوشت. فرض کنید r_1 و r_2 بردارهای مکانی دو ذره باشند. در این صورت نیروی ثقل وارد

از m_1 بر m_2 عبارت است از:

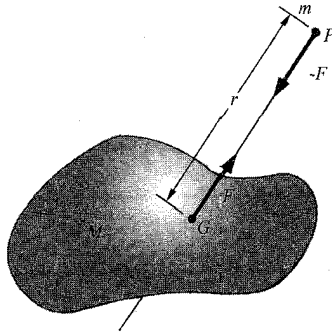
$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{G m_1 m_2}{|r_1 - r_2|^3} (r_1 - r_2). \quad (3-6)$$

بردار $(r_1 - r_2)$ جهت صحیح نیرو را مشخص می کند و اندازه نیرو بر عامل اضافی $|r_1 - r_2|$ تقسیم شده است.

قانون ثقل که در معادله (۳-۶) بیان شده است فقط در مورد ذرات یا اجسامی به کار می رود که ابعاد آنها در مقایسه با فاصله شان از هم کوچک باشند، وگرنه فاصله $|r_1 - r_2|$ به طور دقیق معین نیست و نیز نمی توان به وضوح و سادگی معلوم کرد که نیروها در چه امتداد و برچه نقطه وارد می شوند. برای اجسام گسترده باید تصور کنیم که هر جسم به قطعات یا اجزایی تقسیم شده است که ابعاد آنها نسبت به فواصل بین اجسام کوچک اند. سپس نیروهای وارد بر هر یک از اجزاء هر جسم در اثر هر یک از اجزاء اجسام دیگر را حساب کنیم.

اکنون جسمی گسترده به جرم M و ذره ای به جرم m را در نقطه P مطابق شکل ۱-۶ در نظر بگیریم. اگر جسم M را به اجزای کوچکی به جرم m_i تقسیم کنیم، هر جزء با نیروی F_i به سوی جرم m جذب می شود. اکنون طبق قضیه ۱ بخش ۵-۵، (۵-۱۰۷) دستگاه نیروهای F_i را می توان به یک تک نیروی مار بر یک نقطه دلخواه و یک جفت نیرو تجزیه کرد. فرض کنید که این نیرو F باشد:

$$F = \sum_i F_i, \quad (4-6)$$



شکل ۶-۱ نیروی جاذب ثقل بین یک ذره و یک جسم گسترده.

و فرض کنید که نقطه دلخواه نقطه P باشد. چون هیچ یک از نیروهای F_i نمی‌توانند گشتاور-نیرویی حول نقطه P اعمال کنند، گشتاور کل نیروها حول نقطه P صفر است و جفت نیرو از بین می‌رود. بنابراین دستگاه نیروها دارای منتجه F است که در امتداد خطی مار بر جرم m عمل می‌کند. نیروی وارد بر m ، $-F$ است، زیرا قانون سوم نیوتن برای هر یک از نیروهای F_i در معادله (۶-۴) صادق است. بر روی خط عمل نیروی F نقطه G را به فاصله r از نقطه P چنان اختیار می‌کنیم که:

$$|F| = \frac{GmM}{r^2}. \quad (۵-۶)$$

بنابراین دستگاه نیروهای ثقل بین جسم M و ذره m معادل است با تک نیروهای منتجه F بر M و $-F$ بر m که اگر تمام جرم جسم M در نقطه G متمرکز می‌بود، عمل می‌کرد. نقطه G را مرکز ثقل جسم M نسبت به نقطه P می‌گویند. در حالت کلی G نه تنها در مرکز جرم جسم M نیست بلکه حتی بر روی خط واصل P و مرکز جرم نیز قرار ندارد. اجزایی از جسم M که نزدیک به نقطه P اند با نیرویی بیشتر و اجزای دور با نیرویی کمتر جذب می‌شوند، در حالی که برای پیدا کردن مرکز جرم، تمام اجزای جسم یکسان در نظر گرفته می‌شوند. به علاوه مکان نقطه G به مکان نقطه P بستگی دارد. وقتی نقطه P با مقایسه با ابعاد جسم خیلی دور است، شتاب ثقل ناشی از m برای تمام جسم M تقریباً ثابت خواهد بود و در این حالت در بخش ۵-۶ نشان دادیم که G بر روی مرکز جرم قرار خواهد گرفت. در بخش بعدی نشان خواهیم داد که در حالت یک کره یکنواخت یا یک توزیع متقارن کروی جرم، مرکز ثقل همیشه در مرکز کره قرار دارد. مفهوم مرکز ثقل به سبب کیفیت نسبی آن، جز در مورد کره یا جسمی که در میدان ثقل یکنواختی قرار گرفته، زیاد به کار نمی‌رود.

به‌طور کلی برای دو جسم گسترده مرکز ثقل منحصر به فردی حتی نسبت به یکدیگر نمی‌توان تعریف کرد مگر در موارد خاصی که اجسام از هم بسیار دورند یا وقتی که یکی از آنها یک کره است. دستگاه نیروهای ثقل وارد بر هر یک از دو جسم به وسیله دیگری ممکن است دارای منتجه‌ای باشد یا نباشد. اگر دارای منتجه باشد، منتجه‌ها مساوی و مختلف‌الجهت‌اند و در امتداد یک خط عمل می‌کنند. با این همه حتی در این حالت نمی‌توانیم مراکز ثقلی قطعی مانند G_1 ، G_2 را برای دو جسم نسبت به یکدیگر تعریف کنیم. زیرا معادله (۵-۶) فقط فاصله $\overline{G_1G_2}$ را مشخص می‌کند.

مسئله کلی تعیین نیروهای ثقل بین اجسام معمولاً به وسیله مفاهیم نظریه میدان ثقل که در بخش بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد، به بهترین صورت بررسی می‌شود.

۶-۲ میدان ثقل و پتانسیل ثقل

نیروی ثقل F_m وارد بر جرم m واقع در نقطه r از اجرام m_i واقع در نقاط r_i عبارت است از حاصل جمع برداری نیروهایی که از هر یک از اجرام دیگر به طور جدا بر آن وارد می‌شوند:

$$F_m = \sum_i \frac{m m_i G (r_i - r)}{|r_i - r|^3}. \quad (6-6)$$

اگر به جای اجرام نقطه‌ای m_i ، جرم به طور پیوسته با چگالی $\rho(r)$ در فضا توزیع شده باشد، نیروی وارد به یک جرم نقطه‌ای m در r عبارت است از:

$$F_m = \iiint \frac{m G (r' - r) \rho(r')}{|r' - r|^3} dV'. \quad (7-6)$$

انتگرال فوق ممکن است روی ناحیه‌ای که شامل جرمی است که جاذبه آن را حساب می‌کنیم، یا روی تمام فضا گرفته شود، به شرط آن که در خارج از این ناحیه $\rho = 0$ فرض کنیم. اکنون نیروی F_m با جرم m متناسب است و ما شدت میدان ثقل (یا فقط میدان ثقل) $g(r)$ را در هر نقطه r از فضا، در اثر هر نوع توزیع جرمی به صورت نیروی وارد بر واحد جرم در آن نقطه تعریف می‌کنیم، لذا:

$$g(r) = \frac{F_m}{m}, \quad (8-6)$$

که در آن F_m نیرویی است که به جرمی نقطه‌ای مانند m در نقطه r وارد می‌شود. می‌توانیم $g(r)$ را برای اجرام نقطه‌ای یا جرمی که به طور پیوسته توزیع شده باشد، بنویسیم:

$$g(r) = \sum_i \frac{m_i G (r_i - r)}{|r_i - r|^3}, \quad (9-6)$$

$$g(r) = \iiint \frac{G (r' - r) \rho(r')}{|r' - r|^3} dV'. \quad (10-6)$$

میدان $g(r)$ دارای بعد شتاب است و در واقع شتاب ذره‌ای در نقطه r است که فقط تحت تأثیر نیروی ثقل قرار گرفته باشد.

محاسبه میدان ثقل $g(r)$ از معادلات (۹-۶) یا (۱۰-۶) دشوار است بجز در محدودی حالت ساده. علت آن تا اندازه‌ای لزوم انجام عمل جمع و انتگرال برای تعدادی بردار است. از آنجا که نیروهای ثقل وارد بین هر دو ذره نیروهای مرکزی‌اند همان‌طور که در بخش ۳-۱۲ نشان دادیم این نیروها کنسرواتیوند و می‌توان انرژی پتانسیلی برای یک جرم m که تحت تأثیر نیروهای ثقل قرار گرفته است تعریف کرد. انرژی پتانسیل در مورد دو ذره به اجرام m و m_i به وسیله

معادلات (۳-۲۲۹) و (۳-۲۳۰) داده می‌شود:

$$Vmm_i = \frac{-Gmm_i}{|r-r_i|}. \quad (۱۱-۶)$$

بنابراین انرژی پتانسیل ذره‌ای به جرم m در نقطه r در اثر دستگاهی از ذرات m_i عبارت است از:

$$V_m(r) = \sum_i \frac{-Gmm_i}{|r-r_i|}. \quad (۱۲-۶)$$

پتانسیل ثقل $\mathcal{G}(r)$ در نقطه r را به صورت انرژی پتانسیل بر واحد جرم ذره‌ای در نقطه r با علامت منفی تعریف می‌کنیم. (انتخاب این علامت برای $\mathcal{G}(r)$ در نظریه ثقل مرسوم است.)

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{V_m(r)}{m}. \quad (۱۳-۶)$$

برای دستگاهی از ذرات،

$$\mathcal{G}(r) = \sum_i \frac{m_i G}{|r-r_i|}. \quad (۱۴-۶)$$

اگر $\rho(r)$ نمایشگر توزیع پیوسته جرم باشد، پتانسیل ثقل آن عبارت است از:

$$\mathcal{G}(r) = \iiint \frac{G\rho(r')}{|r-r'|} dV'. \quad (۱۵-۶)$$

چون $\mathcal{G}(r)$ تابع نقطه‌ای اسکالری (شمارواره‌ای) است لذا به کار بردن آن به مراتب ساده‌تر از استفاده از میدان $g(r)$ است. با در نظر گرفتن رابطه (۳-۱۸۵) بین نیرو و انرژی پتانسیل، g را می‌توان به سادگی با در دست داشتن \mathcal{G} از رابطه زیر حساب کرد:

$$g = \nabla \mathcal{G}. \quad (۱۶-۶)$$

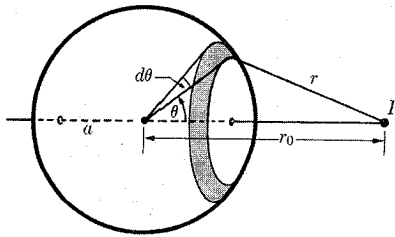
رابطه معکوس آن عبارت است از:

$$\mathcal{G}(r) = \int_{r_s}^r g \cdot dr. \quad (۱۷-۶)$$

تعریف $\mathcal{G}(r)$ مانند انرژی پتانسیل $V(r)$ ، شامل عدد ثابت دلخواهی به صورت عامل جمع یا به عبارت دیگر نقطه دلخواهی مانند r_s است که در آن $\mathcal{G} = 0$. معمولاً r_s در معادلات (۶-۱۴) و (۶-۱۵) در فاصله‌ای بی‌نهایت دور از تمام اجرام اختیاری می‌شود.

مفاهیم میدان ثقل و پتانسیل ثقل، از نظر ریاضی همانند مفاهیم شدت میدان الکتریکی و پتانسیل الکترواستاتیکی در مباحث الکتروسیسته ساکن‌اند با این تفاوت که علامت منفی در معادله (۶-۱۳) در نظریه ثقل قراردادی است و نیز اینکه در اینجا تمام اجرام مثبت، و تمام نیروهای ثقل جاذب‌اند به طوری که نیروی ثقل و نیروی الکترواستاتیکی مختلف‌العلامه‌اند. مبحث نظریه پتانسیل بسیار طولانی است و ما در اینجا نمی‌توانیم جز مقدمه‌ای مختصر بر آن ارائه دهیم.

به‌عنوان مثال برای کاربرد مفهوم پتانسیل، می‌توان پتانسیل ناشی از پوسته کروی همگنی به



شکل ۶-۲ روش محاسبه پتانسیل پوسته‌ای کروی.

جرم M و چگالی سطحی σ و شعاع a را حساب کرد:

$$M = 4\pi a^2 \sigma. \quad (18-6)$$

پتانسیل نقطه P را می‌توان با انتگرال‌گیری مجموعه‌ای از اجزای حلقه‌ای، مطابق شکل ۶-۲، حساب کرد. پتانسیل یک حلقه به شعاع $a \sin \theta$ و پهنای $a d\theta$ که تمامی جرمش به فاصله مساوی r از نقطه P باشد، عبارت خواهد بود از:

$$d\mathcal{G} = \frac{G\sigma(4\pi a \sin \theta) a d\theta}{r},$$

و پتانسیل کل پوسته کروی در نقطه P عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(P) &= \int_0^\pi \frac{G\sigma(4\pi a \sin \theta) a d\theta}{r} \\ &= \frac{MG}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \theta)^{1/2}} \\ &= \frac{MG}{4\pi ar_0} [(r_0 + a) - |r_0 - a|]. \end{aligned} \quad (19-6)$$

بر حسب اینکه P داخل یا خارج پوسته باشد، دو حالت وجود دارد:

$$\mathcal{G}(P) = \frac{MG}{r}, \quad r_0 \geq a, \quad \mathcal{G}(P) = \frac{MG}{a}, \quad r_0 \leq a. \quad (20-6)$$

بنابراین در خارج پوسته کروی، پتانسیل همان پتانسیل ناشی از نقطه‌ای به جرم M است که در مرکز پوسته قرار گرفته باشد. بنابراین میدان جاذبه ثقل یک پوسته کروی در خارج از آن درست چنان است که گویی جرم آن پوسته در مرکز قرار دارد. بنابراین همین بیان در مورد میدان ثقل خارج جرمی که با تقارن کروی توزیع شده باشد برقرار است زیرا میدان کل عبارت است از حاصل جمع میدانهای ناشی از پوسته‌هایی که آن را تشکیل می‌دهند. این موضوع، بیان بخش قبلی را ثابت می‌کند یعنی جرمی که با تقارن کروی توزیع شده باشد هر جرم دیگری واقع در خارج خود را طوری جذب می‌کند، (و در نتیجه توسط آن جذب می‌شود)، که گویی تمام جرمش در مرکزش قرار دارد. پتانسیل در داخل یک پوسته کروی ثابت است و از معادله (۶-۱۶) نتیجه می‌شود که میدان ثقل در آنجا صفر

است. بنابراین یک نقطه در داخل و به فاصله ۲ از مرکز جرمی که با تقارن کروی توزیع شده باشد چنان جذب می‌شود که گویی جرم داخل کره به شعاع ۲ در مرکز آن قرار گرفته است. جرم واقع در خارج این کره هیچ نیروی خالصی وارد نمی‌کند. همان‌طور که خواننده به آسانی می‌تواند تحقیق کند، اثبات این نتایج به وسیله محاسبه مستقیم نیروهای ثقل قدری مشکل‌تر است. در واقع نیوتن بیست سال وقت صرف این کار کرد. محاسبه نیروی ثقل وارد از زمین به ماه توسط نیوتن که در فصل ۱ مورد بحث قرار گرفت بیست سال قبل از انتشار قانون ثقل انجام شد. احتمال دارد که تأمل او به آن سبب بود که بتواند فرضی را که در این محاسبات نهفته بود یعنی این که زمین، هر جسم واقع در خارج خود را چنان جذب می‌کند که گویی جرم زمین در مرکزش متمرکز است، ثابت کند. این حقیقت که امروزه یک دانشجوی دوره لیسانس می‌تواند در ظرف بیست دقیقه مسئله‌ای را حل کند که نیوتن را بیست سال به مبارزه طلبید، معیاری نه چندان از مهارت‌های ریاضی نسبی دانشجویست، بلکه معیاری است از اصلاحات متعددی که در روش‌های ریاضی در حساب دیفرانسیل و انتگرال از آن موقع که نیوتن آن را کشف کرد، به وجود آمده است.

۳-۶ معادلات میدان ثقل

پیدا کردن معادلات دیفرانسیلی که توابع $g(r)$ و $\mathcal{G}(r)$ در آنها صدق کنند مهم است از معادله (۶-۱۶) نتیجه می‌شود:

$$\nabla \times g = 0. \quad (۶-۲۱)$$

این معادله برداری در هر دستگاه مختصاتی که نوشته شود، به صورت دستگاهی از سه معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی که مؤلفه‌های میدان ثقل را بهم مربوط می‌کنند، درمی‌آید. در مختصات دکارتی:

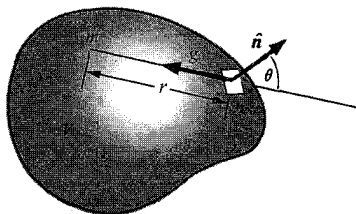
$$\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} = 0. \quad (۶-۲۲)$$

این معادلات به تنهایی میدان ثقل موردنظر را معین نمی‌کنند، زیرا در هر میدان ثقلی صدق می‌کنند. برای معین کردن میدان ثقل، به معادله‌ای احتیاج داریم که g را به توزیع ماده مربوط کند.

حال میدان ثقل g ناشی از جرم نقطه‌ای m را مطالعه می‌کنیم. هر حجم V شامل جرم m را در نظر بگیرید و فرض کنید که \hat{n} بردار یکه عمود بر سطح S است که حجم V را دربرگیرد (شکل ۶-۳). انتگرال سطحی زیر را حساب می‌کنیم:

$$I = \int_S \int \hat{n} \cdot g dS. \quad (۶-۲۳)$$

اگر مفهوم خطوط نیرو را چنان تعریف کنیم که همه جا در امتداد g به طریقی باشند که تعداد آنها در هر سانتی متر مربع در هر نقطه برابر شدت میدان ثقل در آن نقطه باشد، معنی فیزیکی یا هندسی این انتگرال بهتر آشکار می‌شود. بنابراین I تعداد خطوطی است که از سطح S خارج می‌شود و آن را شار g از سطح S می‌نامند. عنصر زاویه فضایی $d\Omega$ که در مکان m ، عنصر سطح dS را دربر می‌گیرد بنا به تعریف، مساحت روفته شده‌ای است از کره‌ای به شعاع واحد، توسط شعاعی که از m به



شکل ۳-۶ جرم m محصور در حجم V .

عنصر سطح dS وصل می‌شود. این سطح عبارت است از:

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}. \quad (24-6)$$

از شکل ۳-۶ می‌توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$\hat{n} \cdot \mathbf{g} = -\frac{m G \cos \theta}{r^2}. \quad (25-6)$$

وقتی که از این دو رابطه استفاده کنیم، انتگرال I [معادله (۲۳-۶)] چنین می‌شود:

$$I = \iint_S -m G d\Omega = -4\pi m G. \quad (26-6)$$

انتگرال I از مکان m در داخل سطح S مستقل است. این نتیجه مشابه نتیجه‌ای است در الکترواستاتیک که از هر بار واحد، 4π خطوط نیرو صادر می‌شود. از آنجا که میدان ثقل تعدادی اجرام برابر مجموع میدانهای حاصل از هر یک از آنهاست، برای سطح S که مجموعه‌ای از اجرام m_i را دربر می‌گیرد، رابطه زیر برقرار است:

$$I = \iint_S \hat{n} \cdot \mathbf{g} dS = -\sum_i 4\pi m_i G. \quad (27-6)$$

این معادله در مورد جرمی که به‌طور پیوسته در داخل سطح S توزیع شده باشد، چنین می‌شود:

$$\iint_S \hat{n} \cdot \mathbf{g} dS = -\iiint_V 4\pi G \rho dV. \quad (28-6)$$

اکنون قضیه دیورژانس گوس [معادله (۳-۱۱۵)] را در مورد طرف چپ این معادله به کار می‌بریم:

$$\iint_S \hat{n} \cdot \mathbf{g} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{g} dV. \quad (29-6)$$

اگر معادله (۲۸-۶) را از معادله (۲۹-۶) کم کنیم، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{g} + 4\pi G \rho) dV = 0. \quad (30-6)$$

معادله فوق باید برای هر حجم V برقرار باشد، و این فقط در صورتی صحیح است که تابع زیر علامت انتگرال صفر شود یعنی:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho. \quad (۳۱-۶)$$

این معادله در مختصات دکارتی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = -4\pi G\rho(x, y, z). \quad (۳۲-۶)$$

وقتی که $\rho(x, y, z)$ داده شده باشد با اضافه کردن شرط مرزی $\mathbf{g} \rightarrow 0$ وقتی $|r| \rightarrow \infty$ می توان ثابت کرد که دستگاه معادلات (۲۲-۶) و (۳۲-۶) میدان ثقل (g_x, g_y, g_z) را به طور یگانه معلوم می کنند. با جایگزین کردن معادله (۱۶-۶)، می توان معادله ای به دست آورد که پتانسیل در آن صدق کند:

$$\nabla^2 \mathcal{G} = -4\pi G\rho, \quad (۳۳-۶)$$

یا

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2} = -4\pi G\rho. \quad (۳۴-۶)$$

اگر شرط $\mathcal{G} \rightarrow 0$ وقتی که $|r| \rightarrow \infty$ را اضافه کنیم همین یک معادله، $\mathcal{G}(x, y, z)$ را به طور یگانه معلوم می کند. این نتیجه را از نظریه پتانسیل بی اثبات نقل می کنیم جواب معادله (۳۳-۶) در واقع معادله (۱۵-۶) است. اغلب به جای محاسبه انتگرال معادله (۱۵-۶) راحت تر است که معادله دیفرانسیل جزئی (۳۴-۶) را مستقیماً حل کنیم. معادلات (۳۳-۶)، (۱۶-۶)، و (۸-۶) مانند معادلات (۳۱-۶)، (۲۱-۶)، و (۸-۶)، خلاصه کاملی از نظریه ثقل نیوتن اند. یعنی تمام نتایج نظریه را می توان از هر یک از این دسته معادلات به دست آورد.

معادله (۳۳-۶) به نام معادله پواسون^۱ معروف است. این شکل معادلات در نظریه های فیزیکی به کرات ظاهر می شوند. برای مثال، پتانسیل در الکتریسیته ساکن در معادله ای به همین شکل صدق می کند که در آن ρ چگالی بار الکتریکی است. اگر $\rho = 0$ ، معادله (۳۳-۶) به صورت زیر درمی آید:

$$\nabla^2 \mathcal{G} = 0. \quad (۳۵-۶)$$

که آن را معادله لاپلاس^۲ می نامند. نظریه ریاضی جامعی از معادلات (۳۳-۶) و (۳۵-۶) بیان شده است.^۳ با این حال بحث نظریه پتانسیل خارج از حدود این کتاب است.

1. Poisson

2. Laplace

۳. رجوع شود به کتاب:

مسائل

۱. (الف) با استفاده از قوانین حرکت نیوتن و دو قانون اول کپلر در خصوص حرکت سیارات (بخش ۳-۱۵) نشان دهید که نیروی وارد به یک سیاره در جهت خورشید و متناسب با عکس مجذور فاصله از خورشید است. (ب) با استفاده از قانون سوم کپلر نشان دهید که نیروهای وارد به سیارات با اجرام آنها متناسب اند. (پ) اگر این حال مستلزم وجود یک قانون جاذبه کیهانی بین هر دو جرم باشد، با استفاده از قانون سوم نیوتن نشان دهید که نیرو باید با هر دو جرم متناسب باشد.

۲. دو جرم مساوی m به فاصله a از هم هستند. مطلوب است مرکز ثقل (گرانی) دو جرم نسبت به یک نقطه P روی عمود منصف خطی که آنها را بهم وصل می‌کند و فاصله‌اش از نقطه میانی بین آنها y است. نشان دهید که وقتی $y \rightarrow \infty$ ، مرکز ثقل (گرانی) به سمت مرکز جرم میل می‌کند، چه خواهد شد وقتی $y \rightarrow 0$ ؟

۳. جرم αM ، $0 < \alpha < 1$ ، در $x = a$ و $y = 0$ و جرم دوم $(1 - \alpha)M$ در $x = 0$ و $y = b$ گذاشته می‌شوند. مطلوب است مؤلفه‌های x ، y مرکز ثقل (گرانی) دو جرم نسبت به مبدأ. نشان دهید فرمولهای شما برای x ، y وقتی $\alpha \rightarrow 0$ یا $b \rightarrow \infty$ ، حد عادی دارند.

۴. (الف) میدان ثقل و پتانسیل ثقل را در هر نقطه Z واقع بر روی محور تقارن یک نیمکره توپر به شعاع a و جرم M حساب کنید. مرکز نیمکره در $Z = 0$ است. (ب) مرکز ثقل نیمکره را نسبت به نقطه‌ای واقع در خارج نیمکره روی محور Z به دست آورید و نشان دهید که وقتی $Z \rightarrow \pm \infty$ مرکز ثقل به سمت مرکز جرم میل خواهد کرد.

۵. فرض کنید که زمین، کره‌ای به شعاع a و جرم M و چگالی یکنواختی است. شدت میدان ثقل و پتانسیل ثقل را برای تمام نقاط داخل و خارج زمین حساب کنید، \odot را در فاصله بی‌نهایت دور برابر صفر فرض کنید.

۶. فرض کنید که چگالی ستاره‌ای فقط تابعی از شعاع r آن است که از مرکز ستاره اندازه‌گیری و به وسیله فرمول زیر داده می‌شود:^۱

$$\rho = \frac{Ma^2}{2\pi r(r^2 + a^2)^2}, \quad 0 \leq r < \infty,$$

که در آن M جرم ستاره و a عدد ثابتی است که اندازه ستاره را مشخص می‌کند. شدت میدان ثقل و پتانسیل ثقل را به صورت تابعی از r به دست آورید.

۷. نشان دهید که اگر خورشید توسط غباری کروی با چگالی ثابت ρ احاطه شده باشد، میدان ثقل در داخل غبار عبارت است از:

$$g = - \left(\frac{MG}{r^2} + \frac{4\pi}{3} \rho Gr \right) \frac{r}{r},$$

که در آن M جرم خورشید و r برداری است از خورشید تا هر نقطه‌ای از غبار.

۱. ρ چنان اختیار شده است که حل مسئله آسان شود و نه به سبب اینکه شباهتی نه چندان دور با تغییرات چگالی در داخل هر ستاره واقعی داشته باشد.

توجه. برای حل مسائل ۸ تا ۱۳ اطلاع از ماده در بخش ۵-۱۱ ضروری است.

۸. فرض کنید که داخل زمین را می توان سیال تراکم ناپذیر متعادلی دانست. (الف) فشار داخل زمین را به صورت تابعی از فاصله نسبت به مرکز آن حساب کنید. (ب) با استفاده از مقادیر مناسب برای جرم زمین و شعاع آن، فشار را در مرکز زمین، بر حسب تن به اینچ مربع حساب کنید.

۹. فرض کنید که گازی از قوانین گازهای کامل پیروی می کند و درجه حرارت آن به صورت تابعی از شعاع معلوم است. معادلاتی را که باید برای پیدا کردن فشار گاز به صورت تابعی از شعاع حل کرد، برای جرم M از این گاز که دارای تقارن کروی است، بنویسید.

۱۰. (الف) فرض کنید که ماده سرد معمولی تحت تأثیر فشاری که از فشار بحرانی p تجاوز کند، به حالتی که دارای چگالی بسیار زیاد ρ_1 است فرو فشرده می شود. سیاره ای به جرم M در حالت عادی از ماده ای به چگالی متوسط ρ ساخته شده است. با فرض یکنواخت بودن چگالی و برقراری شرایط تعادل سیالها، به ازای چه مقدار جرم M و شعاع r فشار در مرکز سیاره به مقدار بحرانی p می رسد؟ (ب) اگر $M > M_c$ باشد سیاره دارای هسته متراکمی به چگالی ρ_1 خواهد بود که به وسیله پوسته ای به چگالی ρ احاطه شده است. توزیع فشار حاصل در داخل سیاره را برحسب شعاع هسته r_1 و شعاع سیاره r_2 حساب کنید. نشان دهید که اگر M قدری بزرگتر از M_c باشد، شعاع r_2 سیاره کوچکتر از r_1 می شود. (می گویند که سیاره مشتری دارای جرمی نزدیک به جرم بحرانی M_c است به طوری که اگر سنگین تر می بود به احتمال کوچکتر می شد.)

۱۱. فشار و درجه حرارت را به صورت تابعی از شعاع برای ستاره مسئله ۶ با فرض اینکه ستاره از گازی کامل به وزن اتمی A تشکیل شده است، پیدا کنید.

۱۲. چگالی و شدت میدان ثقل را در داخل سیاره ای کوچک با تقارن کروی به صورت تابعی از شعاع تا مرتبه $1/B^2$ ، با فرض اینکه ضریب حجمی B ثابت است، به دست آورید. جرم سیاره M و شعاع آن a است. [راهنمایی. $g(r)$ را با فرض یکنواخت بودن چگالی حساب کنید و سپس فشار $p(r)$ و بعد $\rho(r)$ را تا مرتبه $1/B$ به دست آورید. با در دست داشتن $\rho(r)$ جدید $g(r)$ را دوباره حساب کنید. با روش تقریبهای متوالی تا جملات مرتبه $1/B^2$ پیش بروید.]

۱۳. کوهی کروی به شعاع a و جرم M در نظر بگیرید که در حالت تعادل در زمین موج است و چگالی آن نصف چگالی زمین است. فرض کنید که شعاع a بسیار کوچکتر از شعاع زمین است به طوری که می توان سطح زمین را در نزدیکی کوه مسطح گرفت. اگر کوه وجود نمی داشت شدت میدان ثقل در نزدیکی سطح زمین g می شد. (الف) تفاوت بین g و مقدار واقعی g در نوک کوه را حساب کنید. (ب) اگر نوک کوه ساییده و فروشسته و هم سطح زمین اطراف شده باشد و با این فرض که این عمل در مقایسه با زمان لازم برای برقراری مجدد تعادل کوه در زمان کوتاهی رخ دهد، تفاوت بین g و مقدار واقعی g در سطح زمین در مرکز کوه را حساب کنید.

۱۴. (الف) پتانسیل ثقل و شدت میدان ثقل ناشی از میله ای باریک به طول l و جرم M را در نقطه ای به فاصله r از مرکز میله در امتدادی که با میله زاویه θ می سازد، به دست آورید. فرض کنید که $l \gg r$ و محاسبات را فقط تا مرتبه $(l/r)^2$ پیش ببرید. (ب) مرکز ثقل میله را نسبت به این نقطه معین به دست آورید.

۱۵. (الف) پتانسیل ثقل حلقهٔ مدوری به شعاع a و جرم یکنواخت M را در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از مرکز حلقه در جهتی که با محور حلقه زاویهٔ θ می‌سازد، به دست آورید. فرض کنید که $r \gg a$ و پتانسیل را فقط تا مرتبهٔ $(a/r)^2$ حساب کنید. (ب) مؤلفه‌های میدان ثقل حلقه را در این نقطهٔ معین تا همین درجهٔ تقریب به دست آورید.

۱۶. چگالی جسم کوچکی با تقارن استوانه‌ای، در مختصات کروی $\rho(r, \theta)$ است که برای $r > a$ صفر می‌شود. کانون $r = 0$ در مرکز جرم قرار گرفته است. پتانسیل ثقل را در نقطهٔ (r, θ) ، دور از جسم، ($r \gg a$)، از طریق بسط به صورت سری بر حسب نمایی (a/r) به طور تقریب به دست آورید و نشان دهید که دارای شکل زیر است:

$$\mathcal{G}(r, \theta) = \frac{MG}{r} + \frac{QG}{r^3} P_2(\cos \theta) + \frac{EG}{r^5} P_4(\cos \theta) + \dots,$$

که در آن $P_2(\cos \theta)$ و $P_4(\cos \theta)$ چندجمله‌ایهایی از $\cos \theta$ به درجات ۲ و ۳ اند که به جسم بستگی ندارند و E, Q اعدادی ثابت‌اند که به توزیع جرم بستگی دارند. روابطی برای P_2, P_4, Q ، و E به دست آورید و نشان دهید که اندازهٔ Q از مرتبهٔ Ma^2 و E از مرتبهٔ Ma^3 است. معمولاً P_2 و P_4 را نرمالیزه می‌کنند به طوری که جملهٔ ثابت برابر $1/2$ - و جملهٔ خطی برابر $\cos \theta$ (۳/۲) - گردد. در این صورت پارامترهای Q, E را گشتاور چهار قطبی و گشتاور هشت قطبی گویند. چندجمله‌ایهای \dots, P_4, P_2 را چندجمله‌ایهای لژاندر^۱ می‌نامند.

۱۷. زمین تقریباً به شکل بیضوی دوار پختی است که قطر قطبی آن $(1 - \eta)2a$ ، کمی کوچکتر از قطر استوایی آن $2a$ است. ($\eta = 0.0034$) برای تعیین اثر پختی زمین بر روی میدان ثقل تا مرتبهٔ اول تقریب η ، می‌توان به جای زمین بیضوی، کره‌ای به شعاع R که دارای همان حجم است، در نظر گرفت. بنابراین میدان ثقل زمین مجموع میدان کره‌ای یکنواخت به شعاع R و جرم زمین و میدان ثقل جرمی با توزیع سطحی (مثبت یا منفی) است که نمایشگر جرمی برحسب واحد سطح است که باید به کره اضافه یا کم کرد تا بیضوی واقعی پدید آید. (الف) نشان دهید که چگالی سطحی لازم تا مرتبهٔ اول η عبارت است از:

$$\sigma = \frac{1}{3} \eta a \rho (1 - 3 \cos^2 \theta),$$

که در آن θ متمم زاویهٔ عرض جغرافیایی و ρ چگالی حجمی زمین (که یکنواخت فرض شده) است. چون جرم کلی که بدین ترتیب به سطح اضافه می‌شود برابر صفر است، میدان ثقل آن نمایشگر اثر پختی زمین خواهد بود. (ب) نشان دهید که اصلاح حاصل بر پتانسیل ثقل در نقطهٔ بسیار دور $r \gg a$ از زمین تا مرتبهٔ (a^3/r^3) عبارت است از:

$$\delta \mathcal{G} \cong \frac{1}{5} \eta \frac{MGa^3}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad (r \gg a).$$

۱۸. (الف) با استفاده از قضیه گاوس (۶-۲۶)، میدان ثقل را در داخل و خارج پوسته‌ای کروی به شعاع a و جرم M به چگالی یکنواخت، حساب کنید. (ب) پتانسیل ثقل حاصل را نیز به دست آورید.

۱۹. (الف) میدان ثقل را در فاصله x از صفحه‌ای بی‌نهایت وسیع به چگالی سطحی σ برحسب واحد سطح حساب کنید. (ب) این نتیجه را با میدان ثقل بلافاصله در خارج پوسته‌ای کروی با همان چگالی سطحی مقایسه کنید. کدام قسمت از میدان ناشی از ماده مجاور بی‌واسطه و کدام قسمت ناشی از ماده دورتر است؟

۲۰. نشان دهید که پتانسیل و شدت میدانی که در مسئله ۵ حساب کردید، در معادلات میدان ثقل (۶-۲۱)، (۶-۳۱)، و (۶-۳۳) صدق می‌کنند.

* ۲۱. (الف) نشان دهید که \mathcal{G} که در مسئله ۱۷ (ب) به دست آمد، در معادله لاپلاس (۶-۳۵) صدق می‌کند. این نتیجه همراه با این واقعیت که \mathcal{G} و چگالی جرمی که آن را به وجود می‌آورد دارای همبستگی زاویه‌ای یکسان‌اند، حاکی از آن است که فرمول داده شده برای \mathcal{G} ممکن است در واقع همه جا در خارج زمین معتبر باشد. (ب) برای نشان دادن این مطلب، معادله پواسون (۶-۳۳) را با چگالی $\rho = f(r)(1 - 3\cos^2\theta)$ در نظر بگیرید. نشان دهید که یک جواب $\mathcal{G} = h(r)(1 - 3\cos^2\theta)$ در معادله (۶-۳۳) با این شکل ρ صدق می‌کند به شرط اینکه:

$$\frac{d^2h}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dh}{dr} - \frac{6h}{r^2} = -4\pi Gf.$$

(پ) نشان دهید که $h = r^{-3}$ در معادله فوق در ناحیه $f = 0$ صدق می‌کند. آیا می‌توانید اثبات این را که \mathcal{G} به دست آمده در قسمت (ب) مسئله ۱۷ واقعاً در همه جا در خارج زمین معتبر است، کامل کنید؟

دستگاههای مختصات متحرک

۱-۷ مبدأ مختصات متحرک

فرض کنید که نقطه‌ای به وسیله بردارهای r و r^* نسبت به دو مبدأ مختصات O و O^* مشخص شده باشد و همچنین فرض کنید که O^* به وسیله بردار h نسبت به O در فضا مشخص شده باشد (شکل ۱-۷). رابطه بین مختصات r و r^* عبارت است از:

$$r = r^* + h, \quad (۱-۷)$$

$$r^* = r - h. \quad (۲-۷)$$

در مختصات دکارتی که محورهای x^* ، y^* ، و z^* آن به ترتیب موازی محورهای x ، y ، و z اند، این معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = x^* + h_x, \quad y = y^* + h_y, \quad z = z^* + h_z; \quad (۳-۷)$$

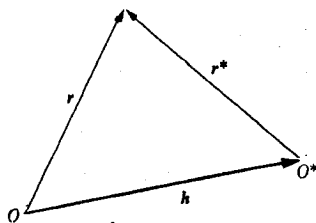
$$x^* = x - h_x, \quad y^* = y - h_y, \quad z^* = z - h_z. \quad (۴-۷)$$

حال اگر مبدأ O^* نسبت به مبدأ O که آن را ثابت فرض می‌کنیم در حرکت باشد، رابطه سرعتها نسبت به دو دستگاه به وسیله مشتق‌گیری از معادله (۱-۷) به دست می‌آید:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr^*}{dt} + \frac{dh}{dt} = v^* + v_h, \quad (۵-۷)$$

که در آن v و v^* سرعتهای نقطه متحرک نسبت به مبدأهای O و O^* اند و v_h سرعت مبدأ O^* نسبت به مبدأ O است. البته ما فرض می‌کنیم که محورهای x^* ، y^* ، و z^* موازی x ، y ، و z باقی می‌مانند. این را انتقال دستگاه ستاره‌دار نسبت به دستگاه بی‌ستاره می‌نامند. معادله (۵-۷) برحسب مؤلفه‌های دکارتی به صورت مشتق زمانی معادله (۳-۷) درمی‌آید. رابطه بین شتابهای نسبی عبارت است از:

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r^*}{dt^2} + \frac{d^2h}{dt^2} = a^* + a_h. \quad (۶-۷)$$



شکل ۱-۷ تغییر مبدأ مختصات.

این معادلات را هم می‌توان به سادگی بر حسب مؤلفه‌های دکارتی آنها نوشت. معادلات حرکت نیوتن در دستگاه مختصات ثابت معتبر است به طوری که برای ذره‌ای به جرم m که تحت تأثیر نیروی F قرار گرفته است، داریم:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = F. \quad (۷-۷)$$

با استفاده از معادله (۷-۶)، معادله فوق را می‌توان در دستگاه ستاره‌دار به صورت زیر نوشت:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{dt^2} + m \mathbf{a}_h = F. \quad (۸-۷)$$

اگر O^* با سرعت ثابت نسبت به O حرکت کند، $\mathbf{a}_h = 0$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{dt^2} = F. \quad (۹-۷)$$

بنابراین اگر معادلات حرکت نیوتن در هر دستگاه مختصاتی برقرار باشد، در هر دستگاه مختصات دیگری که نسبت به دستگاه اولی با سرعت یکنواخت حرکت کند نیز برقرار خواهد بود. این را اصل نسبیت نیوتنی می‌گویند. این اصل متضمن آن است که از نظر مکانیکی نمی‌توانیم هیچ دستگاه مختصات ثابت منحصر به فرد یا دستگاهی مقایسه‌ای مشخص کنیم که قوانین نیوتن نسبت به آن معتبر باشد. اگر چنین دستگاهی را مشخص کنیم، هر دستگاه دیگری که نسبت به آن با سرعت ثابت حرکت کند نیز مناسب خواهد بود. این خاصیت معادله (۷-۷) گاهی به این طریق بیان می‌شود که معادلات حرکت نیوتن از نظر شکل غیر قابل تغییرند یا اینکه نسبت به انتقالهای یکنواخت محورها کوواریان^۱ اند. توجه کنید که مفهوم دستگاه مقایسه کاملاً همان مفهوم دستگاه مختصات نیست. چون اگر دستگاه مختصاتی را چنان تغییر دهیم که مستقل از زمان باشد، این تغییر را تغییر دستگاه مقایسه تلقی نمی‌کنیم. یک دستگاه مقایسه شامل تمام دستگاههای مختصاتی است که نسبت به هر دستگاه مختصات خاص ساکن باشند. بنابه اصل نسبیت اینشتین، اصل نسبیت به مکانیک محدود نیست، بلکه در مورد تمام پدیده‌های فیزیکی برقرار است. نظریه نسبیت خاص، نتیجه به کار بردن این اصل در مورد تمام پدیده‌ها مخصوصاً پدیده‌های الکترومغناطیسی است. چنین برمی‌آید که این کار تنها از طریق اصلاح و تکمیل مختصر معادلات حرکت نیوتن انجام‌شدنی است و در واقع حتی معادلات (۷-۵) و (۷-۶) احتیاج به ترمیم دارند، همانگونه که در فصل ۱۳ خواهیم دید.

برای هر نوع حرکت O^* ، معادله (۷-۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{dt^2} = F - m \mathbf{a}_h. \quad (۱۰-۷)$$

این معادله دارای همان شکل معادله حرکت (۷-۷) در یک دستگاه مختصات ثابت است. با این تفاوت که به جای نیروی F ، نیروی $F - m \mathbf{a}_h$ آمده است. جمله $- m \mathbf{a}_h$ را ممکن است نیرویی کاذب نامید. می‌توانیم با استفاده از معادلات حرکت نیوتن، حرکت جرم m را در دستگاه مختصات متحرک با اضافه کردن این نیروی کاذب به نیروهای واقعی مؤثر بررسی کنیم. از نظر مکانیک

کلاسیک، نیروی کاذب به هیچ روی نیرو نیست، بلکه قسمتی از حاصل ضرب جرم در شتاب است که به سمت دیگر معادله منتقل شده است. تمایز اساسی این است که نیروهای واقعی F وارد به جرم m ، به مکان و حرکات اجسام دیگر بستگی دارد، در حالی که نیروی کاذب به شتاب دستگاه ستاره‌دار نسبت به دستگاه ثابت بستگی دارد. در نظریه نسبیت عام عباراتی از قبیل $-ma_{\mu}$ را در دستگاه مختصات ستاره‌دار نیروهای موجه، هم‌پایه با نیروی F در نظر می‌گیرند به طوری که در کلیه دستگاههای مختصات، قانون حرکت یکسانی برقرار است. البته این کار فقط زمانی عملی است که بتوان نشان داد که چگونه نیروی $-ma_{\mu}$ را از مکان و حرکت دیگر اجسام نتیجه می‌گیریم. البته این کار آن‌طور که ممکن است به نظر آید به سادگی انجام‌پذیر نیست و برای انجام آن لازم است که قوانین حرکت اصلاح شوند.^۱

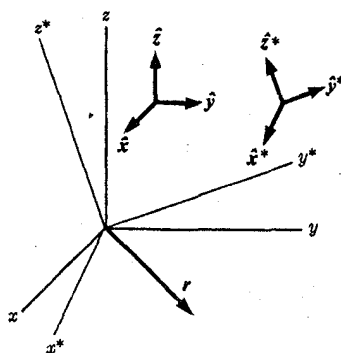
۷-۲ دستگاههای مختصات دوران‌کننده

اینک دو دستگاه مختصات x, y, z و x^*, y^*, z^* را در نظر می‌گیریم که محورهایشان طبق شکل ۷-۲ نسبت به یکدیگر دوران کرده است و مبدأهایشان فعلاً بر هم منطبق‌اند. اگر بردارهای $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ را برای محورهای x, y, z و بردارهای $\hat{x}^*, \hat{y}^*, \hat{z}^*$ را برای محورهای x^*, y^*, z^* فرض کنیم، می‌توانیم بردار مکانی r را برحسب مؤلفه‌هایش در هر یک از دو دستگاه مختصات بنویسیم:

$$r = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad (11-7)$$

$$r = x^*\hat{x}^* + y^*\hat{y}^* + z^*\hat{z}^*. \quad (12-7)$$

توجه کنید که چون مبدأها برهم منطبق‌اند، یک نقطه در فضا در هر دو دستگاه مختصات به وسیله یک بردار r نمایش داده می‌شود. فقط مؤلفه‌های بردار r در امتداد محورهای مختلف متفاوت‌اند. رابطه بین دو دستگاه مختصات را می‌توان به وسیله تشکیل حاصل ضرب داخلی بردارهای یک ستاره‌دار یا بی‌ستاره با معادلات (۱۱-۷) و (۱۲-۷) به دست آورد. برای مثال اگر $\hat{x} \cdot r$ و $\hat{y} \cdot r$



شکل ۷-۲ دوران محورهای مختصات.

1. P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*. New York: Prentice-Hall, 1946. (Part 2.)

را از معادلات (۷-۱۱) و (۷-۱۲) حساب کنیم و نتایج را مساوی یکدیگر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x &= x^*(\hat{x}^* \cdot \hat{x}) + y^*(\hat{y}^* \cdot \hat{x}) + z^*(\hat{z}^* \cdot \hat{x}), \\ y &= x^*(\hat{x}^* \cdot \hat{y}) + y^*(\hat{y}^* \cdot \hat{y}) + z^*(\hat{z}^* \cdot \hat{y}), \\ z &= x^*(\hat{x}^* \cdot \hat{z}) + y^*(\hat{y}^* \cdot \hat{z}) + z^*(\hat{z}^* \cdot \hat{z}). \end{aligned} \quad (7-13)$$

حاصل ضربهای داخلی $(\hat{x}^* \cdot \hat{x})$ و غیره، کسینوسهای زوایای بین محورهای متناظرند. به همین ترتیب می توان به آسانی فرمولهایی برای محورهای x^* ، y^* و z^* بر حسب x ، y و z به دست آورد. معادلات (۷-۱۱)، (۷-۱۲) و (۷-۱۳) به این واقعیت که بردار r از مبدأ کشیده شده است، بستگی ندارند. فرمولهای مشابهی را می توان در مورد هر بردار نامشخص A بر حسب مؤلفه های آن در امتداد دو دستگاه محورها به کار برد. اگر محورهای ستاره دار دوران کنند، کسینوسهای زوایای بین محورهای ستاره دار و بی ستاره توابعی از زمان هستند.

مشتق هر بردار A نسبت به زمان به وسیله معادله (۳-۵۲) تعریف شده است:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}. \quad (7-14)$$

در به کار بردن تعریف فوق در این مورد، هرگاه دستگاههای مختصات نسبت به یکدیگر دوران کنند، با مشکلی مواجه می شویم. برداری که در یک دستگاه مختصات ثابت باشد، در دستگاه دیگر ثابت نیست بلکه دوران می کند. بنا به این تعریف باید بردار $A(t)$ را از بردار $A(t + \Delta t)$ کم کنیم. در این فاصله زمانی Δt ، دستگاه مختصات x^* ، y^* و z^* نسبت به محورهای x ، y و z دوران کرده است به طوری که در زمان $t + \Delta t$ ، دو دستگاه در مورد اینکه کدام بردار $A(t)$ است (یا بود)، یعنی کدام بردار در مکانی که بردار A در زمان t بود، قرار دارد توافق ندارند. بنابراین مشتق یک بردار نسبت به زمان در دو دستگاه مختصات متفاوت خواهد بود. فرض کنید که d/dt نماینده مشتق نسبت به زمان در دستگاه مختصات بی ستاره d^*/dt نشان مشتق نسبت به زمان در دستگاه مختصات ستاره دار باشد. این تمایز را فقط در مورد بردارها منظور می کنیم. در مورد کمیت های عددی هیچ گونه ابهامی موجود نیست و ما مشتقهای زمانی آنها را با d/dt یا نقطه ای روی آنها مشخص می کنیم و معنی آن در تمام دستگاههای مختصات یکسان خواهد بود. فرض کنید که بردار A به صورت زیر داده شده است:

$$A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}, \quad (7-15)$$

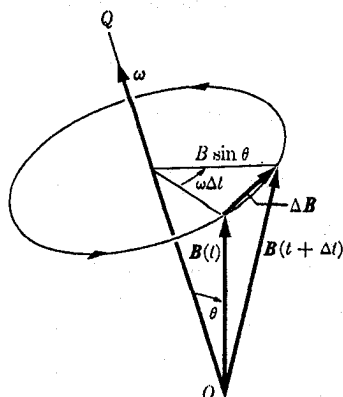
$$A = A_x^* \hat{x}^* + A_y^* \hat{y}^* + A_z^* \hat{z}^*, \quad (7-16)$$

مشتق بی ستاره A را می توان از طریق مشتق گیری از معادله (۷-۱۵) و با در نظر گرفتن $\dot{\hat{x}}$ ، $\dot{\hat{y}}$ و $\dot{\hat{z}}$ به عنوان بردارهای ثابت در دستگاه مختصات ثابت، به دست آورد:

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A}_x \hat{x} + \dot{A}_y \hat{y} + \dot{A}_z \hat{z}. \quad (7-17)$$

به همین ترتیب مشتق ستاره دار A بر حسب مؤلفه های ستاره دار آن چنین است:

$$\frac{d^*A}{dt} = \dot{A}_x^* \hat{x}^* + \dot{A}_y^* \hat{y}^* + \dot{A}_z^* \hat{z}^*. \quad (7-18)$$



شکل ۳-۷ مشتق یک بردار دوار نسبت به زمان.

می توان معادلات (۷-۱۷) و (۷-۱۸) را به عنوان تعاریف مشتقهای بی ستاره و ستاره دار یک بردار نسبت به زمان تلقی کرد. همچنین می توان به وسیله گرفتن مشتق بی ستاره از معادلات (۷-۱۶) فرمولی برای d/dt برحسب مؤلفه های ستاره دار به دست آورد به شرط آن که در نظر داشته باشیم که بردارهای یکه \hat{x}^* , \hat{y}^* , و \hat{z}^* نسبت به دستگاه بی ستاره حرکت می کنند و دارای مشتقات زمانی اند:

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A}_x^* \hat{x}^* + \dot{A}_y^* \hat{y}^* + \dot{A}_z^* \hat{z}^* + A_x^* \frac{d\hat{x}^*}{dt} + A_y^* \frac{d\hat{y}^*}{dt} + A_z^* \frac{d\hat{z}^*}{dt} \quad (۷-۱۹)$$

به همین ترتیب می توان فرمولی برای d^*A/dt برحسب مؤلفه های بی ستاره اش به دست آورد. اینک فرض می کنیم که دستگاه مختصات ستاره دار حول محوری مانند OQ مار بر مبدأ با سرعت زاویه ای ω دوران می کند (شکل ۳-۷). سرعت زاویه ای برداری ω را برداری با اندازه ω در امتداد محور OQ در جهت پیشروی پیچ راست گردی که با دستگاه ستاره دار دوران می کند، تعریف می کنیم. بردار B را در دستگاه ستاره دار ساکن فرض کنید. مشتق ستاره دار آن صفر است. اکنون نشان می دهیم که مشتق بی ستاره آن عبارت است از:

$$\frac{dB}{dt} = \omega \times B. \quad (۷-۲۰)$$

برای کم کردن بردار $B(t)$ از بردار $B(t + \Delta t)$ ، این بردارها را چنان رسم می کنیم که انتهای آنها با هم باشد، و راحت تر این است که انتهای آنها را بر روی محور دوران قرار دهیم، (مشتق بردار B نسبت به زمان فقط به مؤلفه آن در امتداد محورها بستگی دارد نه به مکان آن در فضا). اول با یادآوری تعریف ضرب خارجی (معادله ۳-۲۴) و شکل ۳-۱۱)، به وسیله شکل ۳-۷ تحقیق می کنیم که جهت بردار dB/dt به طور صحیح به وسیله معادله (۷-۲۰) داده می شود. اندازه dB/dt همان طور که به وسیله معادله (۷-۲۰) داده شده است، عبارت است از:

$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = |\omega \times B| = \omega B \sin \theta. \quad (۷-۲۱)$$

و فرمول صحیح همین است، زیرا از شکل ۳-۷ دیده می شود که وقتی Δt کوچک است:

$$|\Delta B| = (B \sin \theta) (\omega \Delta t).$$

هنگامی که معادله (۷-۲۰) برای بردارهای \hat{x}^* ، \hat{y}^* و \hat{z}^* به کار برده شود، معادله (۷-۱۹) با استفاده از معادلات (۷-۱۸) و (۷-۱۶) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d^*A}{dt} + A_x^*(\omega \times \hat{x}^*) + A_y^*(\omega \times \hat{y}^*) + A_z^*(\omega \times \hat{z}^*) = \frac{d^*A}{dt} + \omega \times A. \quad (۷-۲۲)$$

فرمول فوق رابطه اساسی بین مشتقات یک بردار نسبت به زمان برای دستگاههای مختصات دوران کننده است. ممکن است این فرمول را با توجه به این مطلب به خاطر بیاوریم که مشتق زمانی هر بردار در دستگاه مختصات بی ستاره عبارت است از مشتق زمانی آن در دستگاه ستاره دار به اضافه مشتق بی ستاره آن به شرط آنکه در دستگاه ستاره دار ساکن باشد. معادله (۷-۲۲) حتی در مواردی که اندازه و جهت ω با زمان تغییر می کند، به کار می رود. با مشتق گیری از طرف راست و چپ معادله (۷-۲۲) و با به کار بردن دوباره معادله (۷-۲۲) برای بردار A و d^*A/dt ، مشتق هر بردار A چنین خواهد شد.

$$\begin{aligned} \frac{d^2A}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^*A}{dt} \right) + \omega \times \frac{dA}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times A \\ &= \frac{d^{**}A}{dt^2} + \omega \times \frac{d^*A}{dt} + \omega \times \left(\frac{d^*A}{dt} + \omega \times A \right) + \frac{d\omega}{dt} \times A \\ &= \frac{d^{**}A}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d^*A}{dt} + \omega \times (\omega \times A) + \frac{d\omega}{dt} \times A. \end{aligned} \quad (۷-۲۳)$$

از آنجایی که $\omega \times A = 0$ اگر ω موازی A باشد، معادله (۳-۲۹)، طبق معادله (۷-۲۲) مشتقاتی ستاره دار و بی ستاره هر بردار موازی محور دوران برابرند. به ویژه

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^*\omega}{dt}.$$

توجه کنید که بردار ω در طرفین معادله فوق، سرعت زاویه ای دستگاه ستاره دار نسبت به دستگاه بی ستاره است اگرچه مشتق آن نسبت به زمان در طرف چپ نسبت به دستگاه بی ستاره و در طرف راست نسبت به دستگاه ستاره دار گرفته شده است. سرعت زاویه ای دستگاه بی ستاره نسبت به دستگاه ستاره دار ω - است.

اکنون نشان می دهیم که روابطی که در بالا برای یک دستگاه مختصات دوران کننده به دست آوردیم کاملاً کلی اند زیرا در مورد هر نوع حرکت دستگاه ستاره دار نسبت به دستگاه بی ستاره به کار می روند. فرض کنید که میزان تغییر بی ستاره بردارهای \hat{x}^* ، \hat{y}^* و \hat{z}^* نسبت به زمان بر حسب مؤلفه ها در امتداد محورهای ستاره دار به وسیله روابط زیر داده شده باشند

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}^*}{dt} &= a_{11}\hat{x}^* + a_{12}\hat{y}^* + a_{13}\hat{z}^*, \\ \frac{d\hat{y}^*}{dt} &= a_{21}\hat{x}^* + a_{22}\hat{y}^* + a_{23}\hat{z}^*, \\ \frac{d\hat{z}^*}{dt} &= a_{31}\hat{x}^* + a_{32}\hat{y}^* + a_{33}\hat{z}^*. \end{aligned} \quad (۷-۲۴)$$

به وسیله مشتق‌گیری از معادله

$$\hat{x}^* \cdot \hat{x}^* = 1, \quad (25-7)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d\hat{x}^*}{dt} \cdot \hat{x}^* = 0. \quad (26-7)$$

از این معادله و معادلات متناظر آن برای \hat{y}^* و \hat{z}^* داریم:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0. \quad (27-7)$$

به وسیله مشتق‌گیری از معادله:

$$\hat{x}^* \cdot \hat{z}^* = 0, \quad (28-7)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d\hat{x}^*}{dt} \cdot \hat{z}^* = -\hat{x}^* \cdot \frac{d\hat{z}^*}{dt}. \quad (29-7)$$

از این معادله و دو معادله مشابه دیگر نتیجه می‌شود که:

$$a_{31} = -a_{13}, \quad a_{12} = -a_{21}, \quad a_{23} = -a_{32}. \quad (30-7)$$

از معادلات (۲۷-۷) و (۳۰-۷) واضح است که اگر سه ضریب a_{12} ، a_{23} ، و a_{31} مشخص باشند، شش ضریب دیگر معین می‌شوند. بردار ω را این طور تعریف می‌کنیم که مؤلفه‌هایش در دستگاه مختصات x^* ، y^* ، z^* عبارت باشند از:

$$\omega_x^* = a_{23}, \quad \omega_y^* = a_{31}, \quad \omega_z^* = a_{12}. \quad (31-7)$$

در اینجا باید بگوییم که اینها تعاریفی دلخواه‌اند. همواره می‌توان برداری را با معرفی مؤلفه‌هایش در هر دستگاه مختصات تعریف کرد. ما این بردار را ω می‌نامیم تا نشان دهیم این بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات مربوط به یک ستاره است. با کمک معادلات (۲۷-۷) و (۳۰-۷) و (۳۱-۷)، معادلات (۲۴-۷) را اکنون می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\hat{x}^*}{dt} = \omega \times \hat{x}^*,$$

$$\frac{d\hat{y}^*}{dt} = \omega \times \hat{y}^*, \quad (32-7)$$

$$\frac{d\hat{z}^*}{dt} = \omega \times \hat{z}^*.$$

طبق معادلات (۲۵-۷) این مشتقات \hat{x}^* ، \hat{y}^* ، و \hat{z}^* نسبت به زمان درست همانهایی‌اند که اگر بردارهای یکه ستاره‌دار با سرعت زاویه‌ای ω دوران کنند باید انتظار داشت، بنابراین محورهای مختصات ستاره‌دار به هر شکل که حرکت کنند، می‌توانیم، در هر لحظه، یک سرعت زاویه‌ای ω ، طبق معادلات (۳۱-۷) تعریف کنیم به طوری که مشتق‌های هر بردار نسبت به زمان در دستگاه‌های مختصات ستاره‌دار و بی ستاره به وسیله معادلات (۲۲-۷) و (۲۳-۷) به هم مربوط شوند.

فرض کنید که دستگاه مختصات ستاره‌دار چنان حرکت کند که مبدأ O^* آن همواره در O ، مبدأ

مختصات دستگاه ساکن، ثابت بماند. بنابراین هر نقطه‌ای از فضا طبق معادلات (۷-۱۱) و (۷-۱۲) به وسیله یک بردار مکانی r در هر دو مختصات مشخص می‌شود. با به کار بردن معادلات (۷-۲۲) و (۷-۲۳) بردار مکانی r ، فرمولهایی برای رابطه بین سرعتها و شتابها در هر دو دستگاه مختصات به دست می‌آوریم:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^*r}{dt} + \omega \times r, \quad (۷-۳۳)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^{*2}r}{dt^2} + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times \frac{d^*r}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r. \quad (۷-۳۴)$$

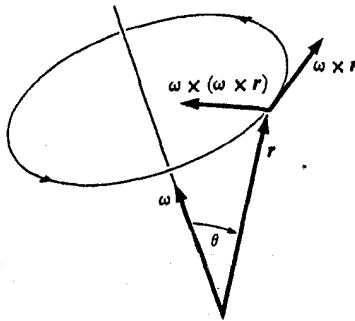
فرمول (۷-۳۴) را قضیه کوریولی^۱ می‌نامند. جمله اول طرف راست، شتاب نسبت به دستگاه ستاره‌دار است. جمله دوم را شتاب رو به مرکز^۲ یک نقطه دوار حول یک محور می‌نامند. با استفاده از علامت شکل ۷-۴ به آسانی می‌توان نشان داد که بردار $\omega \times (\omega \times r)$ مستقیماً به سمت محور دوران و عمود بر آن است، و اندازه آن برابر است با:

$$\begin{aligned} |\omega \times (\omega \times r)| &= \omega^2 r \sin \theta \\ &= \frac{v^2}{r \sin \theta} \end{aligned} \quad (۷-۳۵)$$

که در آن $v = \omega r \sin \theta$ تندی حرکت دورانی و $(r \sin \theta)$ فاصله از محور دوران است. جمله سوم فقط هنگامی وجود دارد که نقطه r در دستگاه ستاره‌دار حرکت می‌کند، و آن را شتاب کوریولی می‌نامند. هنگامی که سرعت زاویه‌ای ω حول محور ثابتی، ثابت باشد، جمله آخر از بین می‌رود. اگر فرض کنیم که قانون حرکت نیوتن (۷-۷) در دستگاه بی‌ستاره معتبر باشد رابطه زیر در دستگاه ستاره‌دار برقرار است:

$$m \frac{d^{*2}r}{dt^2} + m \omega \times (\omega \times r) + 2m \omega \times \frac{d^*r}{dt} + m \frac{d\omega}{dt} \times r = F. \quad (۷-۳۶)$$

اگر جملات دوم و سوم و چهارم را به طرف راست معادله منتقل کنیم، معادله حرکتی به دست



شکل ۷-۴ شتاب رو به مرکز.

می‌آوریم که از نظر شکل مشابه معادله حرکت نیوتن است:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F - m \omega \times (\omega \times r) - 2m \omega \times \frac{dr}{dt} - m \frac{d\omega}{dt} \times r. \quad (37-7)$$

جمله دوم طرف راست را نیروی گریز از مرکز^۱، و جمله سوم را نیروی کوریولی می‌نامند. جمله آخر نام به‌خصوصی ندارد و تنها زمانی ظاهر می‌شود که دوران غیریکنواخت باشد. اگر نیروهای کاذب گریز از مرکز و کوریولی را به کار وارد کنیم، قوانین حرکت نسبت به دستگاه مختصات دوران‌کننده و دستگاه مختصات ثابت، یکسان‌اند. اصطلاح «نیروی گریز از مرکز» موجب گمراهی بسیار بوده است. این نیرو، لااقل در مکانیک کلاسیک نیرویی واقعی نیست، و اگر به دستگاه مختصات ثابتی در فضا رجوع کنیم، این نیرو ظاهر نمی‌شود. لکن می‌توانیم دستگاهی دوران‌کننده را با وارد کردن نیروهای کوریولی و گریز از مرکز مانند دستگاه ثابتی در نظر بگیریم. بنابراین به ذره‌ای که بر دایره‌ای حرکت می‌کند، نه نیروی گریز از مرکز بلکه نیروی رو به مرکزی وارد می‌شود که شتاب رو به مرکز ذره را ایجاد می‌کند. ولی اگر دستگاه مختصاتی را در نظر بگیریم که با ذره دوران کند، در این دستگاه ذره ساکن است و نیروی رو به مرکز به وسیله نیروی گریز از مرکز خنثی می‌شود. اغلب بهتر این است که دستگاه مختصات دوران‌کننده‌ای اختیار کنیم. مثلاً در بررسی عمل یک چرخ خامه‌گیری، بسیار مناسب‌تر است که دستگاه مختصاتی اختیار کنیم که مایع در آن ساکن است و با استفاده از قوانین پخش، پخش خامه به سمت محور را تحت تأثیر میدان نیروی گریز از مرکز مطالعه کنیم، تا اینکه بکشیم حرکت را از منظر ناظر ثابتی که مایع چرخان را مشاهده می‌کند، مطالعه کنیم. با به کار بردن معادله (۷-۱) جهت بیان رابطه بین بردارهای r و r^* نسبت به مبدهای O و O^* (که لازم نیست برهم منطبق باشند)، می‌توانیم دستگاه‌های مختصاتی را که نسبت بهم در حرکت انتقالی و در عین حال دورانی‌اند، بررسی کنیم. در به دست آوردن معادلات (۷-۳۲) هیچ فرضی راجع به مبدأ دستگاه مختصات ستاره‌دار نشد، و بنابراین معادلات (۷-۲۲) و (۷-۲۳) را هنوز می‌توان برای بیان مشتق‌های زمانی هر بردار در دستگاه بی‌ستاره بر حسب مشتق‌های زمانی آن در دستگاه ستاره‌دار به کار برد. اگر به جای dr^*/dt و d^2r^*/dt^2 در معادلات (۷-۵) و (۷-۶) معادل آنها بر حسب مشتق‌های ستاره‌دار در دستگاه ستاره‌دار را که به وسیله معادلات (۷-۳۳) و (۷-۳۴) داده شده است، قرار دهیم، برای مکان، سرعت و شتاب یک نقطه در دستگاه‌های مختصاتی که نسبت به هم حرکت انتقالی و دورانی دارند، فرمولهای زیر را به دست می‌آوریم:

$$r = r^* + h, \quad (38-7)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr^*}{dt} + \omega \times r^* + \frac{dh}{dt}, \quad (39-7)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r^*}{dt^2} + \omega \times (\omega \times r^*) + 2\omega \times \frac{dr^*}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r^* + \frac{d^2h}{dt^2}. \quad (40-7)$$

۳-۷ قوانین حرکت بر روی زمین چرخان

معادله حرکت ذره‌ای به جرم m را که تحت تأثیر نیروی جاذبه mg و هر نیروی غیرجاذبه F قرار دارد در یک دستگاه مختصات ثابت در فضا می‌نویسیم:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m\mathbf{g}. \quad (41-7)$$

حال اگر حرکت ذره را در یک دستگاه مختصات ثابت نسبت به زمین، که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند، در نظر بگیریم و اگر بردار مکان آن \mathbf{r} ، را از مرکز زمین اندازه بگیریم، بنا به معادله (۳۴-۷) داریم:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{F} + m\mathbf{g} \\ &= m \frac{d^{*2} \mathbf{r}}{dt^2} + m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d^* \mathbf{r}}{dt}, \end{aligned} \quad (42-7)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$m \frac{d^{*2} \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m [\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] - 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d^* \mathbf{r}}{dt}. \quad (43-7)$$

معادله فوق با معادله حرکت نیوتن هم‌شکل است. عبارات مربوط به نیروی ثقل و گریز از مرکز را ترکیب کرده‌ایم زیرا هر دو نیرو با جرم متناسب‌اند و هر دو فقط به مکان ذره بستگی دارند. این دو نیرو را از نظر اثرات مکانیکی نمی‌توان از هم تمیز داد. می‌توان شتاب ثقل مؤثر \mathbf{g}_e را در هر نقطه از سطح زمین به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{g}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (44-7)$$

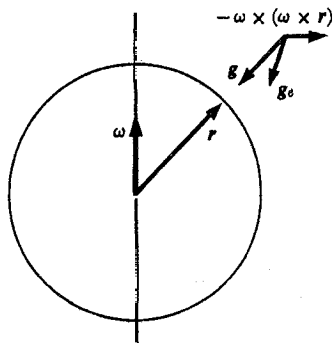
نیروی ثقلی که از طریق تجربه بر روی جسم ساکنی^۱ به جرم m روی سطح زمین اندازه می‌گیریم، $m\mathbf{g}_e$ است. چون بردار $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ از محور زمین به سمت خارج است، \mathbf{g}_e در هر نقطه از نیمکره شمالی اندکی به سمت جنوب مرکز زمین خواهد بود (به شکل ۷-۵ توجه کنید). جسمی که در نزدیکی سطح زمین رها شود، با شتاب \mathbf{g}_e شروع به افتادن می‌کند. امتدادی که به وسیله شاقول تعیین می‌شود همان جهت \mathbf{g}_e است و سطح تعادل سیالات بر \mathbf{g}_e عمود است. به همین دلیل است که زمین به شکل بیضوی پختی با قطبینه مسطح در تعادل آمده است. درجه پختی چنان است که باعث می‌شود سطح زمین، صرف‌نظر از بی‌نظمیهای محلی، در هر نقطه عمود بر \mathbf{g}_e باشد.

اکنون معادله (۴۳-۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m \frac{d^{*2} \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m \mathbf{g}_e - 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d^* \mathbf{r}}{dt}. \quad (45-7)$$

سرعت و شتابی که در معادله فوق ظاهر می‌شوند با تغییر مکان مبدأ مختصات به هر نقطه مناسب‌تر در سطح زمین، تغییر نمی‌کنند، بنابراین معادله فوق در مورد حرکت ذره‌ای به جرم m در سطح زمین نسبت به دستگاه مختصات محلی ساکنی روی سطح زمین، به کار می‌رود. تنها جمله

۱. یک جسم متحرک تحت تأثیر نیروی کوریولی نیز قرار می‌گیرد.

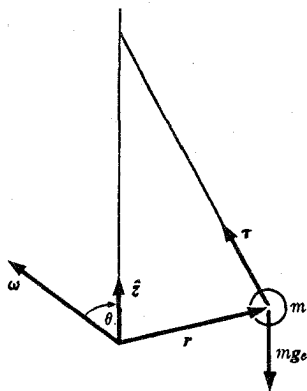


شکل ۵-۷ شتاب مؤثر ثقل بر زمین چرخان.

ناآشنا، نیروی کوریولی است که بر ذره‌ای متحرک وارد می‌شود. خواننده می‌تواند به وسیلهٔ چند محاسبه متقاعد شود که این نیرو در سرعت‌های معمولی d^2r/dt^2 نسبتاً کوچک است. تمرینی آموزنده این است که سعی کنید امتداد نیروی کوریولی را برای امتدادهای مختلف حرکت در مکان‌های مختلف روی سطح زمین به دست آورید. نیروی کوریولی در حرکت توده‌های عظیم هوا دارای اهمیت بسیار است، و موجب می‌شود که در نیمکرهٔ شمالی گردبادها و کولاکها در جهت جنوب به شرق به شمال به غرب بچرخند. نیروی کوریولی در نیمکرهٔ شمالی، باعث انحراف اجسام متحرک به سمت راست می‌شود. وقتی که بادها به سمت ناحیه‌ای که فشار هوا در آن کم است می‌وزند، به سمت راست منحرف می‌شوند به طوری که در جهت عکس عقربه‌های ساعت به دور ناحیهٔ کم فشار می‌چرخند. تودهٔ هوایی که به این صورت می‌چرخد، در سمت چپ دارای فشار کم و در سمت راست دارای فشار زیاد خواهد بود. این درست همان نیرویی است که برای به راست گرداندن و خشتی کردن نیروی کوریولی لازم است. یک تودهٔ هوا فقط زمانی می‌تواند دائماً در امتدادی مستقیم حرکت کند که فشار زیادی در سمت راست آن باشد تا نیروی کوریولی را خشتی کند. بر عکس گردبان فشار روی سطح زمین طوری است که تمایل دارد بادهایی به وجود آورد که تحت زاویهٔ 90° نسبت به آن حرکت کنند. بادهای غالبی که در منطقهٔ معتدلهٔ شمالی از شرق به غرب می‌وزند، نشان می‌دهند که افزایش فشار جو، لااقل در سطح زمین، به سمت استوا بزرگتر است تا در جهت قطبین. بادهای تجارتی که در منطقهٔ استوایی از غرب به شرق می‌وزند ناشی از این واقعیت‌اند که هر بادی که به سمت استوا حرکت کند بر اثر نیروی کوریولی وارد بر آن سرعتی به سمت غرب می‌گیرد. بادهای تجارتی در اثر وجود مناطق فشار زیاد در هر دو طرف منطقهٔ استوایی برقرارند.

۴-۷ آونگ فوکو

یکی از موارد استعمال جالب نظریهٔ دستگاه‌های مختصات دوران‌کننده، مسئلهٔ آونگ فوکو است. آونگ فوکو دارای گلوله‌ای است که از ریسمانی آویزان شده و طوری قرار داده شده است که بتواند آزادانه در هر صفحهٔ قائمی نوسان کند. آونگ در صفحهٔ قائم مشخصی شروع به نوسان می‌کند و



شکل ۶-۷ آونگ فوکو.

مشاهده می شود که پس از چندین ساعت صفحه نوسان به تدریج حول محور قائم حرکتی تقدیمی انجام می دهد. گلوله باید بسیار وزین و ریسمان بسیار طویل و نقطه آویز تقریباً بی اصطکاک باشد تا آونگ بتواند آزادانه به مدتی طولانی به نوسان خود ادامه دهد. اگر مبدأ مختصات را درست در زیر نقطه آویز یعنی در نقطه تعادل گلوله آونگ به جرم m اختیار کنیم، بردار r برای دامنه های کوچک نوسان آونگ تقریباً افقی خواهد بود. در نیمکره شمالی، ω یک زاویه حاده با قائم می سازد، همان طوری که در شکل ۶-۷ نشان داده شده است. اگر نیروی کشش ریسمان باشد، معادله حرکت گلوله طبق معادله (۴۵-۷) چنین است:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \tau + m g_e - \gamma m \omega \times \frac{d^* r}{dt} \quad (46-7)$$

اگر نیروی کوریولی وجود نمی داشت معادله فوق معادله یک آونگ ساده در زمینی ساکن می بود. اگر سرعت ۵ میل در ساعت یا کمتر باشد، نیروی کوریولی کمتر از ۰/۱٪ نیروی ثقل خواهد بود، و بنابراین مؤلفه قائم آن در مقایسه با نیروی ثقل قابل اغماض است. (نیروی قائم است که اندازه کشش ریسمان را معلوم می کند). لکن مؤلفه افقی نیروی کوریولی بر سرعت $d^* r/dt$ عمود است و چون وقتی آونگ نوسان می کند هیچ گونه نیروی دیگری در این جهت وجود ندارد، می تواند طبیعت حرکت را تغییر دهد. هر نیرویی که دارای یک مؤلفه افقی عمود بر سرعت $d^* r/dt$ باشد، مانع ادامه حرکت آونگ در یک صفحه قائم می شود. برای حل مسئله ای که شامل نیروی کوریولی باشد، از نتیجه تجربی استفاده می کنیم، و می کوشیم دستگاه مختصات جدیدی پیدا کنیم که حول محور قائم مار بر نقطه آویز با چنان سرعت زاویه ای دوران کند که جمله های حاوی نیروی کوریولی یا لافل مؤلفه های افقی آن در این دستگاه ظاهر نشوند. دستگاه مختصات جدیدی در نظر می گیریم که با سرعت زاویه ای ثابت $\Omega \hat{z}$ (نسبت به زمین)، که در آن \hat{z} بردار یکه قائم است، حول محور قائم دوران می کند. این دستگاه مختصات تقدیمی را زبرداری می خوانیم (') و مشتق را نسبت به زمان در این دستگاه با d'/dt نمایش می دهیم. در این صورت طبق

معادلات (۳۳-۷) و (۳۴-۷) خواهیم داشت:

$$\frac{d^*r}{dt} = \frac{d'r}{dt} + \Omega \hat{z} \times r, \quad (۴۷-۷)$$

$$\frac{d^{*2}r}{dt^2} = \frac{d'^2r}{dt^2} + \Omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times r) + 2\Omega \hat{z} \times \frac{d'r}{dt}. \quad (۴۸-۷)$$

معادله (۴۶-۷) به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} m \frac{d^{*2}r}{dt^2} &= \tau + m g_e - 2m \omega \times \left(\frac{d'r}{dt} + \Omega \hat{z} \times r \right) \\ &\quad - m \Omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times r) - 2m \Omega \hat{z} \times \frac{d'r}{dt} \\ &= \tau + m g_e - 2m \Omega \omega \times (\hat{z} \times r) - m \Omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times r) \\ &\quad - 2m (\omega + \hat{z} \Omega) \times \frac{d'r}{dt}. \end{aligned} \quad (۴۹-۷)$$

با استفاده از معادله (۳۵-۳)، حاصل ضربهای سه گانه را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned} m \frac{d^{*2}r}{dt^2} &= \tau + m g_e - m (\Omega \omega \cdot r + \Omega^2 \hat{z} \cdot r) \hat{z} \\ &\quad + m (\Omega \hat{z} \cdot \omega + \Omega^2) r - 2m (\omega + \hat{z} \Omega) \times \frac{d'r}{dt}. \end{aligned} \quad (۵۰-۷)$$

هر بردار طرف راست معادله (۵۰-۷)، بجز آخرین بردار، در صفحه قائمی که شامل آونگ است، قرار دارد. چون برای نوسانهای کوچک، $d'r/dt$ عملاً افقی است، می توان جمله آخر را نیز با افقی ساختن $(\omega + \hat{z} \Omega)$ در این صفحه قائم گنجاناند. بنابراین لازم است که:

$$\hat{z} \cdot (\omega + \hat{z} \Omega) = 0. \quad (۵۱-۷)$$

این معادله، Ω را تعیین می کند:

$$\Omega = -\omega \cos \theta, \quad (۵۲-۷)$$

که در آن ω سرعت زاویه ای زمین دوران کننده و Ω سرعت زاویه ای دستگاه مختصات تقدیمی نسبت به زمین، و θ زاویه بین محور قائم و محور زمین است همان طور که در شکل ۷-۶ نشان داده شده است. امتداد قائم با $g_e -$ موازی است و چون این امتداد تقریباً همان امتداد $g -$ است (به شکل ۷-۵ توجه کنید)، θ عملاً برابر زاویه متمم عرض، یعنی زاویه بین r و ω در شکل ۷-۵ خواهد شد. برای نوسانهای کوچک اگر Ω به وسیله معادله (۵۲-۷) تعیین شود، حاصل ضرب خارجی در آخرین جمله معادله (۵۰-۷) قائم خواهد بود و چون تمام جملات طرف راست معادله (۵۰-۷) اکنون در یک صفحه قائم شامل آونگ قرار گرفته اند، شتاب d'^2r/dt^2 گلوله در دستگاه تقدیمی همواره به سمت محور قائم است و اگر آونگ از ابتدا حرکت نوسانی داشته باشد، حرکت نوسانی خود را در همان صفحه قائم در دستگاه مختصات تقدیمی ادامه خواهد داد. صفحه حرکت نسبت به زمین با سرعت زاویه Ω که جهت و اندازه اش به وسیله معادله (۵۲-۷) داده می شود، حرکتی تقدیمی می کند. اگر در نیمکره شمالی به سمت پایین نگاه کنیم حرکت تقدیمی با حرکت عقربه های ساعت هم جهت است.

چون سه جمله آخر طرف راست معادله (۷-۵۰) به مراتب از دو جمله اول کوچکترند، حرکت واقعی در دستگاه مختصات تقدیمی عملاً همان حرکت آونگ روی زمین ساکن است. حتی در دامنه‌های بزرگ که سرعت d^2r/dt^2 دارای مؤلفه‌ای قائم است، یک بررسی دقیق نشان خواهد داد که جمله آخر معادله (۷-۵۰) وقتی Ω طبق معادله (۷-۵۲) انتخاب شود، باعث هیچ‌گونه حرکت تقدیمی اضافی نسبت به دستگاه مختصات تقدیمی نمی‌گردد. بلکه فقط باعث می‌شود که گلوله بر روی قوسی نوسان کند که از شرق محور قائم از نقطه آویز می‌گذرد، Ω در خط استوا صفر است و آونگ فوکو حرکت تقدیمی ندارد. اگر اندکی در باره آن فکر کنید شاید از نظر فیزیکی به علت آن پی ببرید. در قطب شمال یا جنوب $\Omega = \pm\omega$ و آونگ فقط در یک صفحه قائم ثابت در فضا نوسان می‌کند و زمین هم در زیر آن می‌چرخد.

توجه کنید که با دو دفعه استفاده از قضیه کوریولی، توانستیم بحث کاملی از آونگ فوکو را ارائه دهیم، بی‌اینکه معادلات حرکت را حل کنیم.

۷-۵ قضیه لارمور^۱

نیروی کوریولی در معادله (۷-۳۷) با نیروی مغناطیسی وارد بر ذره‌ای باردار (معادله (۳-۲۸۱)) از این نظر هم‌شکل است که هر دو نیرو حاصل ضرب خارجی سرعت ذره‌اند، با برداری که نمایشگر نیروی میدانی است. در واقع در نظریه نسبیت عام، نیروهای کوریولی وارد بر یک ذره در دستگاهی دوران‌کننده را می‌توان نیروهای ناشی از حرکت نسبی باقی اجرام کائنات دانست تقریباً همان‌طور که نیروی مغناطیس وارد به یک ذره باردار ناشی از حرکت نسبی باقی بارها است. از تشابه شکل این دو نیرو چنین برمی‌آید که اثر میدانی مغناطیسی بر دستگاهی از ذرات باردار را می‌توان با انتخاب مناسبی از دستگاه مختصات دوران‌کننده حذف کرد. این اندیشه منجر به قضیه لارمور می‌شود که ابتدا آن را بیان و سپس ثابت می‌کنیم:

قضیه لارمور. اگر دستگاهی از ذرات باردار که همه دارای نسبت بار به جرم (q/m) یکسان‌اند تحت تأثیر نیروهای (مرکزی) متقابل و نیروی مرکزی رو به مرکز مشترکی و همچنین نیروی مغناطیسی یکنواخت ضعیفی قرار گیرد، حرکات ممکن آن همان حرکاتی خواهند بود که دستگاه می‌توانست بی‌تأثیر میدان مغناطیسی انجام دهد و بر حرکت تقدیمی آهسته تمامی دستگاه حول مرکز نیرو با سرعت زاویه‌ای

$$\omega = -\frac{q}{\gamma mc} B \quad (\text{واحد گاوسی}) \quad (7-53)$$

سوار شده باشند.

تعریف میدان مغناطیسی ضعیف طی اثبات قضیه به دست خواهد آمد. فرض می‌کنیم که تمام ذرات دارای بار و جرم یکسان q و m باشند، اگرچه خواهیم دید که تنها چیزی که لازم است فرض

شود این است که نسبت q/m ثابت باشد. عملاً مهمترین کاربردهای قضیه لارمور در مورد رفتار یک اتم در میدانی مغناطیسی است. اینجا ذرات الکترونیایی به جرم m و بار $q = -e$ هستند که تحت تأثیر نیروهای دافع الکترواستاتیکی متقابل و نیروی جاذبه الکترواستاتیکی هسته قرار می‌گیرند.

فرض کنید که نیروی مرکزی وارد بر k امین ذره F_k^c و مجموع نیروهای ناشی از دیگر ذرات F_k^i باشد. در این صورت معادلات حرکت دستگاه ذرات در غیاب میدانی مغناطیسی عبارت‌اند از:

$$m \frac{d^2 r_k}{dt^2} = F_k^c + F_k^i, \quad k = 1, \dots, N, \quad (54-7)$$

که در آن N تعداد کل ذرات است. نیروی F_k^c فقط به فاصله k امین ذره از مرکز نیرو که آن را مبدأ خواهیم گرفت، بستگی دارد، در حالی که نیروهای F_k^i فقط به فواصل ذرات از یکدیگر بستگی دارند. وقتی که میدان مغناطیسی اعمال می‌شود، معادلات حرکت طبق معادله (۳-۲۸۱) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$m \frac{d^2 r_k}{dt^2} = F_k^c + F_k^i + \frac{q}{c} \frac{dr_k}{dt} \times B, \quad k = 1, \dots, N. \quad (55-7)$$

برای اینکه جمله آخر را از بین ببریم، دستگاه مختصات ستاره‌داری با همان مبدأ قبلی اختیار می‌کنیم که با سرعت زاویه‌ای ω حول این مبدأ دوران کند. با استفاده از معادلات (۷-۳۳) و (۷-۳۴) می‌توان معادلات حرکت را در دستگاه مختصات ستاره‌دار نوشت:

$$m \frac{d^{*2} r_k}{dt^{*2}} = F_k^c + F_k^i - m \omega \times (\omega \times r_k) + \frac{q}{c} (\omega \times r_k) \times B + \frac{d^{*2} r_k}{dt^{*2}} \times \left(\frac{qB}{c} + \gamma m \omega \right). \quad (56-7)$$

می‌توان با قرار دادن

$$\omega = -\frac{q}{\gamma m c} B. \quad (57-7)$$

جمله آخر را از بین برد. در این صورت معادله (۷-۵۶) چنین می‌شود:

$$m \frac{d^{*2} r_k}{dt^{*2}} = F_k^c + F_k^i + \frac{q^2}{\gamma m c^2} B \times (B \times r_k) \quad k = 1, \dots, N. \quad (58-7)$$

نیروهای F_k^c و F_k^i فقط به فواصل ذرات از مبدأ و فواصل خودشان از یکدیگر بستگی دارند و این فواصل در دستگاههای مختصات ستاره‌دار و بی‌ستاره یکسانند. بنابراین اگر از جمله آخر صرف‌نظر کنیم، معادله (۷-۵۸) در مختصات ستاره‌دار درست همان شکلی را دارد که معادله (۷-۵۴) در مختصات بی‌ستاره دارد. در نتیجه جوابهای آنها نیز یکسان خواهند بود و حرکات دستگاه در مختصات ستاره‌دار همان حرکات دستگاه در مختصات بی‌ستاره در غیاب میدان مغناطیسی خواهند بود. این قضیه لارمور است.

شرط ضعیف بودن میدان مغناطیسی بدین معنی است که جمله آخر معادله (۷-۵۸) در مقایسه با دو جمله اول قابل اغماض باشد. توجه کنید که جمله‌ای که ما از آن صرف نظر می‌کنیم متناسب با B^2 است حال آن که جمله‌ای که در معادله (۷-۵۵) حذف کردیم متناسب با B است. بنابراین برای میدانهایی که به قدر کافی ضعیف باشند، می‌توان از اولی صرف نظر کرد اگرچه دومی قابل اغماض نیست. جمله آخر در معادله (۷-۵۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{q^2}{4\pi mc^2} B \times (B \times r_k) = m \omega \times (\omega \times r_k). \quad (۷-۵۹)$$

راه دیگر بیان ریاضی شرط لازم برای میدان مغناطیسی ضعیف این است که بگوییم فرکانس لارمور ω که به وسیله معادله (۷-۵۷) داده می‌شود، باید در مقایسه با فرکانسهای حرکت در غیاب میدان مغناطیسی کوچک باشد.

خواننده‌ای که مطالب فوق را به وضوح درک کرده باشد باید قادر باشد به دو سؤال زیر جواب دهد. فرکانس سیکلوترون برای حرکت یک ذره باردار در میدان مغناطیسی، که به وسیله معادله (۳-۲۹۹) داده شده است، دو برابر فرکانس لارمور است که به وسیله معادله (۷-۵۷) داده شده است. چرا قضیه لارمور را نمی‌توان برای ذرات باردار در یک سیکلوترون به کار برد؟ معادله (۷-۵۸) را می‌توان بی‌هیچ‌گونه فرض در مورد مبدأ مختصات در دستگاه ستاره‌دار به دست آورد. چرا لازم است که محور دوران دستگاه مختصات ستاره‌دار از مرکز نیروی دستگاه ذرات بگذرد؟

۷-۶ مسئله سه جسم در حالت خاص

در بخش ۴-۹ نشان دادیم که مسئله سه جسم را که در آن سه جرم تحت تأثیر نیروهای ثقلی متقابل خود حرکت می‌کنند، نمی‌توان به هیچ روش کلی حل کرد. در این بخش مسئله ساده شده یعنی مسئله محدود شده سه جسم در حالت خاص را در نظر می‌گیریم که بسیاری از خصوصیات مسئله کلی‌تر را در بر دارد از جمله اینکه راه‌حلی کلی برای آن موجود نیست. در مسئله محدود شده، دو جسم به اجرام M_1 و M_2 داده شده‌اند که تحت تأثیر جاذبه ثقل متقابل خود حول مرکز مشترکشان در مدارهای دایره‌ای شکل می‌چرخند، جسم سومی به جرم بسیار کوچک m در میدان ثقل M_1 و M_2 حرکت می‌کند. باید فرض کنیم که جرم m آنقدر کوچک است که اختلالی که در حرکات اجسام M_1 و M_2 به وجود می‌آورد، قابل اغماض است. برای سهولت بیشتر فرض می‌کنیم که m در صفحه دوران M_1 و M_2 باقی می‌ماند، بنابراین مسئله به یک مسئله یک جسمی تبدیل می‌شود که در آن باید حرکت ذره m را در میدان ثقل (متحرک) دو جسم دیگر پیدا کنیم. یک مثال واضح حرکت موشکی در میدانهای ثقل زمین و ماه است که حول مرکز جرم مشترکشان در مدارهای تقریباً دایره‌ای شکل می‌چرخند.

اگر M_1 و M_2 به فاصله a از یکدیگر قرار گرفته باشند، بنابه نتایج بخش ۴-۷، سرعت زاویه‌ای آنها به وسیله مساوی قرار دادن نیروی ثقل با حاصل ضرب جرم در شتاب در مسئله خلاصه شده

معین می شود، که در آن M_1 ساکن و M_2 دارای جرم μ است که به وسیله معادله (۴-۹۸) داده شده است.

$$\mu \omega^2 a = \frac{M_1 M_2 G}{a^2}, \quad (۶۰-۷)$$

به طوری که

$$\omega^2 = \frac{(M_1 + M_2) G}{a^3}. \quad (۶۱-۷)$$

مرکز جرم، مسافت a را به قسمتهایی تقسیم می کند که با اجرام متناسب اند.

اکنون دستگاه مختصاتی را معرفی می کنیم که با سرعت زاویه ای ω حول مرکز جرم M_1 و M_2 دوران می کند. در این دستگاه M_1 و M_2 ساکن اند و ما آنها را بر روی محور x در نقاط زیر در نظر می گیریم:

$$x_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} a, \quad x_2 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} a. \quad (۶۲-۷)$$

سرعت زاویه ای ω در امتداد محور z منظور می شود. در این صورت m در صفحه xy حرکت می کند و معادله حرکت آن عبارت است از:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = F_1 + F_2 - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (۶۳-۷)$$

که در آن F_1 و F_2 جاذبه ثقل M_1 و M_2 روی m است. معادله فوق را می توان بر حسب مؤلفه ها به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{M_1 G (x - x_1)}{[(x - x_1)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{M_2 G (x - x_2)}{[(x - x_2)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{(M_1 + M_2) G x}{a^3} + 2\omega \dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\frac{M_1 G y}{[(x - x_1)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{M_2 G y}{[(x - x_2)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{(M_1 + M_2) G y}{a^3} - 2\omega \dot{x}. \end{aligned} \quad (۶۴-۷)$$

توجه کنید که جرم m در این معادلات حذف می شود.

چون نیروی کوریولی عمود بر سرعت است، در دستگاه مختصات متحرک هیچ گونه «کاری» انجام نمی دهد، به علاوه، نیروی گریز از مرکز دارای کرل صفر است و می توان آن را از «انرژی پتانسیل» به دست آورد:

$$V_c = -\frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (۶۵-۷)$$

بنابراین «انرژی» کل در دستگاه مختصات متحرک یک ثابت حرکت است:

$$'E' = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 'V', \quad (۶۶-۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned} 'V' &= -\frac{m M_1 G}{[(x - x_1)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{m M_2 G}{[(x - x_2)^2 + y^2]^{1/2}} \\ &\quad - \frac{m (M_1 + M_2) G (x^2 + y^2)}{2a^3}, \end{aligned} \quad (۶۷-۷)$$

معادله انرژی (۶۶-۷) ما را قادر می‌سازد که راجع به انواع مدارهای ممکن اظهارنظریهایی بنماییم. برای اینکه عملیات جبری را آسان کنیم، تغییر متغیرهای زیر را می‌دهیم:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad (68-7)$$

$$\xi_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \xi_2 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \xi_1 - 1. \quad (69-7)$$

در این صورت معادله (۶۷-۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V' = \frac{m(M_1 + M_2)G}{a} \left\{ \frac{\xi_2}{[(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2]^{3/2}} - \frac{\xi_1}{[(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2]^{3/2}} - \frac{1}{\gamma} (\xi^2 + \eta^2) \right\}. \quad (70-7)$$

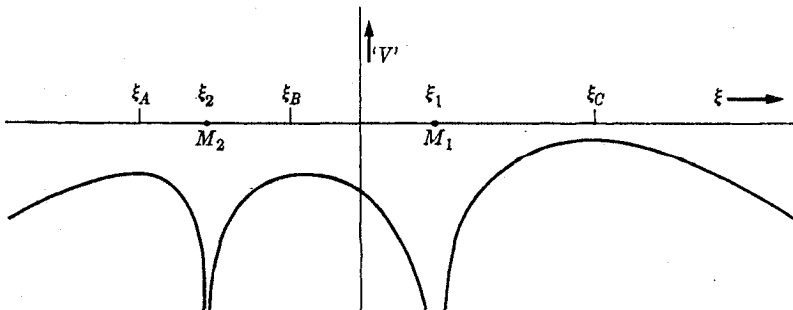
برای اینکه به نوع این تابع پی ببریم، ابتدا نقاط منفرد آن یعنی نقاطی را که به ازای آنها $\partial V' / \partial \xi = 0$ و $\partial V' / \partial \eta = 0$ هر دو صفر می‌شوند، پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -\frac{\xi_2(\xi - \xi_1)}{[(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2]^{3/2}} + \frac{\xi_1(\xi - \xi_2)}{[(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2]^{3/2}} - \xi &= 0, \\ -\frac{\xi_2\eta}{(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2} + \frac{\xi_1\eta}{(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2} - \eta &= 0. \end{aligned} \quad (71-7)$$

نقطه (x, y) که برای آن این معادلات برقرارند نقطه تعادلی برای جرم m (در دستگاه مختصات دوران‌کننده) است، زیرا معادلات (۶۴-۷) وقتی m در این نقطه در حال سکون باشد، برقرارند. ابتدا نقاط روی محور $\eta = 0$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت معادله دوم برقرار است و معادله اول به صورت زیر درمی‌آید:

$$-\frac{\xi_2(\xi - \xi_1)}{|\xi - \xi_1|^3} + \frac{\xi_1(\xi - \xi_2)}{|\xi - \xi_2|^3} - \xi = 0. \quad (72-7)$$

در شکل ۷-۷، تابع V' را که به وسیله معادله (۷۰-۷) داده شده است در امتداد محور $\eta = 0$ رسم می‌کنیم. ریشه‌های معادله (۷۲-۷)، نقاط ماکزیمم تابع $V'(\xi, 0)$ در شکل ۷-۷ اند و دیده



شکل ۷-۷ منحنی پتانسیل $V'(\xi, 0)$.

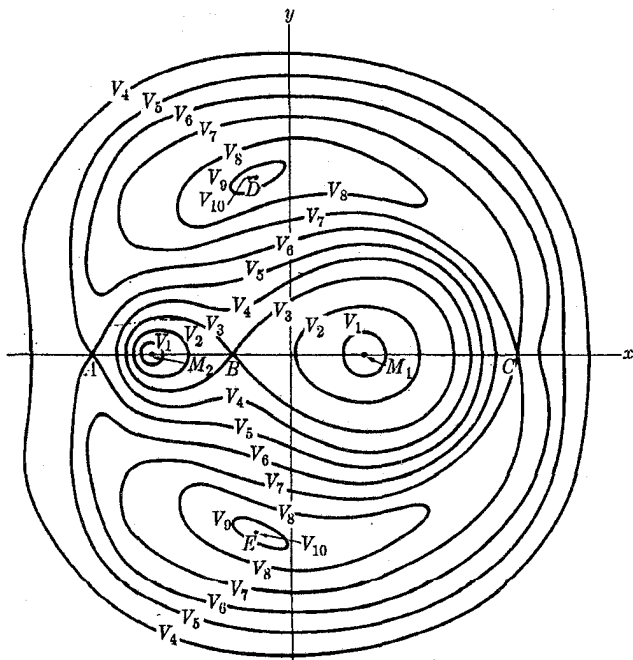
می شود که سه ریشه از این نوع موجود است. همانند شکل، آنها را ξ_A ، ξ_B ، و ξ_C می نامیم. هر یک از آنها ریشه های معادله درجه پنجمی هستند که می توان از معادله (۷-۷۲) به دست آورد. می توان نشان داد که در نقاط A ، B ، و C ، $\partial^2 V / \partial \xi \partial \eta = 0$ ، $\partial^2 V / \partial \xi^2 < 0$ ، و $\partial^2 V / \partial \eta^2 > 0$. اگر تابع V را حول هر یک از این نقاط طبق سری تیلور بسط دهیم و فقط جملات درجه دوم را در نظر بگیریم، مشاهده می کنیم که منحنیهای V ثابت در صفحه $\xi\eta$ و در همسایگی نقاط A ، B ، و C هذلولی اند. در شکل ۷-۸ طرازهای V ثابت رسم شده اند. این نقاط، نقاط زین تابع V اند، یعنی V در هر یک از نقاط A ، B ، و C دارای یک ماکزیمم محلی در امتداد محور ξ و یک مینیمم محلی در امتداد عمود بر محور ξ است. اگر $\eta \neq 0$ باشد، می توان در معادله دوم (۷-۷۱) از آن فاکتور گرفت. سپس معادله دوم (۷-۷۱) را در $(\xi - \xi_1)$ ضرب و از معادله اول کم می کنیم. پس از کمی محاسبه و به کار بردن معادله (۷-۶۹) داریم:

$$(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2 = 1, \quad (73-7)$$

و به همین ترتیب:

$$(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2 = 1. \quad (74-7)$$

این معادلات نشان می دهند که دو نقطه منفرد D و E خارج از محور $\eta = 0$ وجود دارند که به فاصله واحد از نقاط $(\xi_1, 0)$ و $(\xi_2, 0)$ که خود نیز به فاصله واحد از یکدیگر قرار گرفته اند، واقع



شکل ۷-۸ طرازهای هم پتانسیل برای $V(x, y)$.

شده‌اند. به وسیله بسط تیلوری تابع V حول نقطه D یا E ، می‌توان نشان داد که منحنیهای V ثابت در همسایگی D یا E بیضی‌اند و V در D و E دارای ماکزیممی است. با دانستن رفتار تابع در نزدیکی نقاط منفرد، می‌توان شکل کلی طرازهای V ثابت را، همان‌طور که در شکل ۷-۸ نشان داده شده است، رسم کرد. منحنیها بر حسب افزایش V نمره‌گذاری شده‌اند.

اگر دستگاه مختصات ثابت می‌بود، می‌توانستیم بی‌درنگ نتیجه بگیریم که نقاط تعادل A ، B ، C ، D ، و E همگی ناپایدارند، زیرا اگر m در نقاط نزدیک باشد، نیروی ∇V - به سمت خارج هر نقطه تعادل است. اما این بحث در اینجا معتبر نیست زیرا نیروی کوریولی در معادلات (۷-۶۴) از نظر دور مانده است. اگر عبارات طرف راست معادله (۷-۶۴) را بر حسب توانهای جابه‌جایی (مثلاً $x - x_D$ و $y - y_D$) از یکی از نقاط تعادل (مثلاً D) بسط دهیم، و فقط عبارات خطی را نگه داریم، می‌توانیم حرکت را در نزدیکی نقطه تعادل به‌طور تقریب معین کنیم. برای مثال اگر این کار را در نزدیکی نقطه D (یا E) انجام دهیم، مشاهده می‌کنیم که در تقریب خطی، حرکت نزدیک D هنگامی پایدار است که یکی از اجرام M_1 یا M_2 بیش از ۹۶٪ جرم کل ($M_1 + M_2$) باشد (مسئله ۱۸ را ببینید). برای حرکات خیلی نزدیک به D ، ممکن است انتظار داشته باشیم که تقریب خطی به جوابی منجر شود که برای مدت مدیدی معتبر باشد. این که آیا حرکاتی که در تقریب خطی پایدارند به‌راستی، به این معنی که همیشه در نزدیکی نقطه D باقی می‌مانند، پایدارند، یکی از مسائل حل نشده مکانیک کلاسیک است. بحث راجع به این موضوع در انتهای بخش ۱۲-۶ ادامه خواهد یافت.^۱

می‌توان نشان داد که حتی در تقریب خطی، نقاط تعادل A ، B ، و C ناپایدارند. اگر حرکت در تقریب خطی ناپایدار باشد، در این صورت جواب دقیق نیز محققاً ناپایدار است. یعنی هر قدر هم که m در ابتدا به نقطه تعادل نزدیک اما نه بر آن منطبق باشد، در حالت کلی به همان نزدیکی باقی نمی‌ماند بلکه به‌صورت تابعی نامایی، لااقل در ابتدا، دور خواهد شد. البته عبارات غیرخطی که از آنها صرف‌نظر شده است گاه ممکن است مانع شوند که جواب بیش از یک فاصله متناهی از نقطه تعادل دور شود.

۱. بحث کامل‌تر و در سطح پیشرفته‌تر مسئله سه جسم را می‌توان در:
Aurel Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1947,

به‌دست آورد. اثبات آنکه حرکت نزدیک نقاط D (یا E) برای تمام زمان پایدار است، اولین بار در سال ۱۹۶۲ میلادی توسط الف. م. لئونوویچ ارائه شده بود و این موضوع در مقاله زیر بحث شده است:

J. K. Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems*, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, No. 81, 1968.

اگر می توانستیم یک ثابت دیگر حرکت مثلاً $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ را پیدا کنیم، می توانستیم مسئله را به وسیله روشهایی نظیر آنچه در فصل ۳ برای مسئله نیروی مرکزی که در آن اندازه حرکت زاویه‌ای نیز ثابت است، به کار برده شده حل کنیم. متأسفانه چنین ثابت حرکتی شناخته نشده است و با در نظر گرفتن آخرین جمله بند پیش محتمل به نظر می رسد که وجود هم نداشته باشد. این مسئله به طور خیلی وسیعی مطالعه شده است.^۱

در برابر چنین وضعی، ممکن است به بررسی امکان محاسبه مدارهای خاص از شرایط اولیه داده شده روی آوریم. این را می توان به طور تحلیلی از طریق روشهای تقریبی یا به طور عددی انجام داد و از نظر اصولی می توان آن را با هر دقت دلخواه و برای هر مدت زمان متناهی مورد نظر انجام داد. در فصل ۱۲ حالت خاصی از مسئله سه جسم را که خیلی به این حالت مربوط می شود، مورد بحث قرار خواهیم داد.

مسائل

۱. (الف) مسئله جسمی افتان را به وسیله وارد کردن دستگاه مختصاتی در حرکت انتقالی با شتاب g حل کنید. معادلات حرکت در دستگاه مختصات شتاب دار را به دست آورید و حل کنید و سپس نتیجه را به دستگاه مختصاتی که نسبت به زمین ثابت است، تبدیل کنید. (از دوران زمین صرف نظر کنید). (ب) در همان دستگاه مختصات شتاب دار، معادلات حرکت جسمی افتان را به دست آورید که تحت تأثیر نیروی مقاوم هوا که با سرعت جسم نسبت به هوای ساکن متناسب است، قرار می گیرد.

۲. جرم m به وسیله فنری (با ضریب ثابت k) به نقطه آویزی که در امتداد محور x با سرعت زاویه‌ای ω و دامنه a به جلو و عقب در حرکت نوسانی ساده‌ای است، متصل است. به فرض اینکه جرم فقط در امتداد محور x و در صفحه افقی حرکت کند، معادله حرکت را در دستگاه مختصاتی که مبدأ آن نقطه آویز است، به دست آورید و حل کنید.

۳. معادله (۵-۵) را به وسیله اضافه کردن گشتاور نیروهای کاذب وارد بر هر ذره، برای حالتی تعمیم دهید که مبدأ دستگاه مختصات در حرکت است. گشتاور نیروهای کاذب را بر حسب جرم کل M و مختصات مرکز جرم R^* و a_i بیان کنید. نتیجه خود را با معادله (۴-۲۵) مقایسه کنید.

۴. فرمولی برای d^3A/dt^3 بر حسب مشتقهای ستاره دار نسبت به دستگاه مختصات دوران کننده، به دست آورید.

۵. در نیمکره شمالی بادهای غربی با تندی متوسط v از غرب به شرق می وزند. اگر چگالی هوا ρ باشد چه گرادیان فشاری لازم است تا سیلان دائمی هوا از غرب به شرق با همین تندی حفظ شود؟ تخمینهایی منطقی برای مقادیر v و ρ بزنید و گرادیان فشار را بر حسب $\text{lb-in}^{-2}\text{-mile}^{-1}$ تخمین بزنید. (معادله (۵-۱۷.۲) از فصل ۵ را لازم خواهید داشت).

۶. (الف) گفته شده است که پرندگان عرض جغرافیایی خود را از طریق احساس نیروی کوریولی تعیین می کنند. مطلوب است محاسبه نیرویی که پرنده‌ای باید در پرواز در ارتفاع ثابت با سرعت

۳۰ میل بر ساعت برخلاف مؤلفه جانبی نیروی کوریولی وارد کند تا مسیر حرکتش خطی مستقیم باشد. نتیجه خود را بر حسب g یعنی بر حسب نسبت نیروی کوریولی به نیروی ثقل، به صورت تابعی از عرض جغرافیایی و جهت پرواز، بیان کنید. (ب) اگر مسیر پرواز پرنده کمی انحنای داشته باشد، نیروی گریز از مرکزی وجود خواهد داشت که به نیروی کوریولی اضافه، و موجب بروز خطایی در تخمین عرض جغرافیایی خواهد شد. در 45° درجه عرض شمالی، اگر قرار باشد عرض جغرافیایی با دقت ± 100 میل تعیین شود، مسیر پرواز (برحسب درجه برمیل) چقدر می تواند انحنای داشته باشد؟ (فرض کنید که نیروی کناری به دقت لازم قابل اندازه گیری باشد)

۷. جسم ساکنی از ارتفاع h بالای سطح زمین رها می شود. (الف) نیروی کوریولی را با فرض اینکه اثر ناچیزی بر حرکت دارد، به صورت تابعی از زمان حساب کنید. از مقاومت هوا صرف نظر کنید و فرض کنید که h آنقدر کوچک است که g_e را می توان ثابت در نظر گرفت. (ب) تغییر مکان خالص نقطه اصابت ناشی از نیروی کوریولی محاسبه شده را به دست آورید.

* ۸. جواب قسمت (ب) مسئله ۷ را از طریق به دست آوردن معادله حرکت در دستگاه مختصاتی بی دوران، به دست آورید. چه تقریبهایی برای رسیدن به همان نتیجه لازم است؟

۹. هواپیمایی با سرعت 500 میل در ساعت روی قطب شمال در یک زاویه عرض جغرافیایی (که با زمین دوران می کند) پرواز می کند. مطلوب است زاویه بین جهت خط شاقولی که آزادانه در هواپیما آویزان است و خط شاقول دیگری که آزادانه در سطح زمین روی قطب آویزان است، وقتی هواپیما از قطب می گذرد. ۱۰. فرض کنید که زمین کره ای یکنواخت به جرم M و شعاع R است. تصور کنید که لوله ای به طور عمودی از قطب شمال به مرکز زمین می آید و با سطح استوا در محل ورود و خروج زوایای قائم می سازد. لوله از سیالی پُر شده است که تراز سیال در قطب شمال برابر تراز در سطح زمین است. مطلوب است تراز سیال نسبت به سطح زمین در استوا. آیا جواب تغییری چندان می کند اگر لوله نزدیک سطح زمین کشیده شود؟ آیا جواب تغییری چندان می کند اگر شکل واقعی زمین به کار برود؟ (برای جواب دادن به این مسئله به مطالب بخش ۵-۱۱ نیاز دارید).

۱۱. ژيروسکوپ از چرخشی به شعاع r که تمام جرمش در لبه آن قرار گرفته است، تشکیل شده است. ژيروسکوپ با سرعت زاویه ای θ حول محور خود که نسبت به سطح زمین ساکن است، می چرخد. دستگاه مختصاتی انتخاب می کنیم که نسبت به زمین ساکن است و محور z آن منطبق بر محور ژيروسکوپ و مبدأ آن در مرکز چرخ باشد. سرعت زاویه ای زمین ω در صفحه xz قرار دارد و با محور ژيروسکوپ زاویه α می سازد.

مطلوب است مؤلفه های x ، y ، و z گشتاور-نیروی N حول مرکز چرخ ناشی از نیروی کوریولی موجود در دستگاه مختصات $(x-y-z)$ ، که بر جرم m واقع بر لبه چرخ ژيروسکوپ که مختصات قطبی آن، در صفحه xy ، θ و r است، وارد می شود. از این نتیجه استفاده کنید و نشان دهید که اگر جرم چرخ M باشد، گشتاور-نیروی کل کوریولی وارد بر ژيروسکوپ عبارت است از:

$$N = -\frac{1}{2}jMr^2\omega\dot{\theta}\sin\alpha.$$

این معادله اساس کار قطب نمای ژيروسکوپ است.

۱۲*. گاز کاملی به جرم m و وزن ملکولی M در درجه حرارت T در داخل استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع h قرار گرفته است و به تندی با سرعت زاویه‌ای ω حول محور استوانه می‌چرخد. با در نظر گرفتن دستگاه مختصاتی که با گاز دوران می‌کند و به کار بردن قوانین تعادل استاتیکی، و فرض اینکه نیروهای حجمی دیگر با مقایسه با نیروی گریز از مرکز قابل چشم‌پوشی اند، نشان دهید که:

$$p = \frac{RT}{M} \rho \cdot \exp\left(\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}\right),$$

که در آن p فشار و r فاصله از محور و

$$\rho = \frac{mM\omega^2}{2\pi hRT [\exp(M\omega^2 a^2 / 2RT) - 1]}.$$

۱۳*. ذره‌ای در صفحه xy تحت تأثیر نیروی:

$$F = -kr,$$

که جهت آن به سمت مرکز است، حرکت می‌کند. حرکات ممکن آن را با انتخاب دستگاه مختصاتی که با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z دوران می‌کند، به دست آورید. ω باید طوری اختیار شود که نیروی گریز از مرکز، نیروی F را خنثی کند. معادلات حرکت را در این دستگاه مختصات حل کنید. حرکات حاصل را تشریح کنید و نشان دهید که نتیجه شما با نتیجه مسئله ۴۵ از فصل ۳ توافق دارند. ۱۴. توپ به جرم m در سطح زمین بر روی صفحه‌ای افقی، بی‌اصطکاک سر می‌خورد. نشان دهید که حرکت آن همانند حرکت گلوله یک آونگ فوکو با طولی معادل شعاع زمین است، به شرط اینکه در نزدیکی نقطه تماس باقی بماند. فرکانس نوسانش را پیدا کنید. فرض کنید که زمین کروی است.

۱۵. گلوله آونگی طوری شروع به نوسان می‌کند که مسیر آن دایره‌ای باشد. با به کار بردن معادله (۷-۴۶)، سرعت زاویه‌ای را بیابید و نشان دهید که اثرات ناشی از نیروی کوریولی با تقریب بسیار نزدیک، به وسیله معادله (۷-۵۲) داده می‌شود. پس از آنکه نشان دادید که مقدار متوسط مؤلفه قائم نیروی کوریولی برای حرکت فرض شده صفر است، از آن صرف‌نظر کنید.

۱۶. الکترونی حول پروتون ثابتی در مدار بیضوی با نیم محور بزرگ 10^{-8} سانتی‌متر دوران می‌کند. نشان دهید که اگر همین حرکت در میدانی مغناطیسی به شدت 10000 گاوس رخ دهد، قضیه لارمور قابل استفاده است و سرعت زاویه‌ای تقدیمی بیضی را حساب کنید.

۱۷. انرژی پتانسیلی برای جمله آخر معادله (۷-۵۸) بنویسید. اگر صفحه مدار در مسئله ۱۶ بر B عمود و تقریباً دایره‌ای باشد، (به وسیله روش فصل ۳) میزان تقدیم بیضی را که از جمله آخر معادله (۷-۵۸) در دستگاه مختصات دوران‌کننده ناشی است، حساب کنید. آیا این تقدیم را باید به تقدیم حساب شده در مسئله ۱۶ اضافه و یا از آن کم کرد؟

۱۸. سه مشتق دوم تابع V ، را نسبت به ξ و η برای نقطه D در شکل ۷-۷ به دست آورید. معادله حرکت (۷-۶۴) را با خطی نگه داشتن جملات نسبت به $\xi - \xi'$ و $\eta - \eta'$ بسط دهید. با

استفاده از روش بخش ۴-۱۰ شرط لازم برای M_1 و M_2 را برای آن که وجوه طبیعی نوسان پایدار باشند، پیدا کنید. اگر $M_1 > M_2$ کوچکترین مقدار $M_1/(M_1 + M_2)$ چقدر است؟

* ۱۹. گزاره‌های بخش ۷-۶ را در مورد مشتقهای دوم تابع 'V' در نقاط A, B, C و شکل ۷-۷ ثابت کنید. با خطی نگه داشتن جملات بر حسب η و $\xi_{A,B} - \xi = \xi'$ ، معادلات حرکت را حول نقاط A و B بسط دهید. با استفاده از روش بخش ۴-۱۰، نشان دهید که بعضی از جوابها برای هر مقدار از جرمها، ناپایدارند. (نمی‌توان مشتقها را به‌طور صریح پیدا کرد ولی اثبات فقط به علامتهای آن بستگی دارد.)

* ۲۰. (الف) معادله درجه پنجمی را که ریشه آن ξ_A شکل ۷-۷ است، بنویسید. نشان دهید که اگر $M_2 = 0$ ، $\xi_A = -1$ جواب آن است. (ب) ξ_A را به روش عددی تا دو رقم اعشار برای دستگاه ماه-زمین به‌دست آورید. (پ) حداقل سرعت لازم را برای آن که انرژی موشک برای ترک دستگاه ماه-زمین کافی باشد، به‌دست آورید و آن را با سرعت فرار از زمین مقایسه کنید.

۲۱. دو سیاره هر یک به جرم M و شعاع R به فاصله a از یکدیگر در دایره‌ای حول یکدیگر دوران می‌کنند. حداقل سرعتی را پیدا کنید که موشکی می‌تواند با آن یک سیاره را ترک کند و به سیاره دیگر برسد. نشان دهید که سرعت موشک باید از آنچه در صورت چشم‌پوشی از حرکت سیارات به‌دست می‌آید بیشتر باشد.

۲۲. (الف) برای حالت حدی $M_2 \rightarrow 0$ ، تمام نقاط ثابت را مشخص کنید و برای آن شکلی شبیه شکل ۷-۷ طرح‌وار رسم کنید. نشان دهید که نتایج به‌کار برده شده در بخش ۷-۶، در این حالت با جواب کامل داده شده در بخش ۳-۱۴، سازگارند. (ب) از این مثال که جواب کاملش معلوم است، نشان دهید که حداقل سرعت فرار «از نظر کافی بودن انرژی» که در بخش (پ) مسئله ۲۰ حساب شده است، لازم نیست که حداقل سرعت فرار حقیقی باشد.

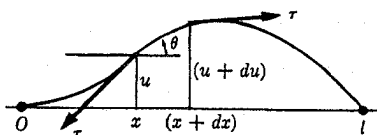
مقدمه‌ای بر مکانیک محیط‌های پیوسته

در این فصل، مکانیک محیط‌های پیوسته، جامدات، سیالها، ریسمانها و غیره را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در چنین مسائلی، تعداد ذرات آنقدر زیاد است که مطالعه حرکت یک‌یک آنها عملی نیست و ما در عوض فرض می‌کنیم که ماده به‌طور پیوسته در فضا توزیع، و به‌وسیله چگالی اش مشخص شده است. ما در وهله نخست بیشتر علاقمندیم با مفاهیم و روشهای بررسی مفید آشنا شویم، تا اینکه روشهای حل مسائل عملی را به تفصیل به‌دست آوریم. در چهار بخش اول، مسئله ریسمان مرتعش را با استفاده از مفاهیمی که تعمیم مستقیم مکانیک ذره‌ای‌اند، بررسی می‌کنیم. در بخشهای بعدی مکانیک سیالات را به روشی که کمتر به‌طور مستقیم به مکانیک ذره‌ای مربوط می‌شود، بسط خواهیم داد.

۱-۸ معادله حرکت ریسمان مرتعش

در این بخش حرکت ریسمانی به‌طور l را بررسی می‌کنیم که به‌طور افقی کشیده شده، و دو انتهای آن بسته شده و به ارتعاش در آمده است. به منظور ساده کردن مسئله، فرض می‌کنیم که ریسمان فقط در یک صفحه قائم در ارتعاش است و دامنه ارتعاش آنقدر کوچک است که هر نقطه از ریسمان فقط به‌طور قائم حرکت می‌کند و کشش ریسمان τ در طی ارتعاش چندان تغییر نمی‌کند.

نقطه‌ای از ریسمان را به‌وسیله x ، فاصله افقی آن از انتهای طرف چپ، مشخص می‌کنیم (شکل ۱-۸)، فاصله حرکت نقطه x را از خط مستقیم افقی که نمایشگر حالت تعادل ریسمان است، با $u(x)$ مشخص می‌کنیم. بنابراین هر وضع سراسر ریسمان باید به‌وسیله تصریح تابع $u(x)$ برای $0 \leq x \leq l$ ، معین شود، این درست مشابه تصریح مختصات x_i, y_i ، و z_i برای $i = 1, \dots, N$ در دستگاه N ذره‌ای است. در مورد ریسمان، x مختصه نیست، بلکه نقش اندیس i را به‌عهده دارد و نقطه‌ای را بر روی ریسمان مشخص می‌کند. ریسمان پیوسته آرمانی ما دارای بی‌نهایت نقطه است که با بی‌نهایت مقدار x بین 0 و l مربوط است. برای هر نقطه مفروض x ، تابع $u(x)$ نقش مختصه‌ای را



شکل ۱-۸ ریسمان مرتعش.

دارد که محل آن نقطه را معین می‌کند همچنانکه مختصات x_i, y_i و z_i محل ذره i را مشخص می‌کنند. درست همان‌طور که حرکت دستگاهی از ذرات باید به وسیله توابع $x_i(t), y_i(t)$ و $z_i(t)$ که مکان هر ذره را در هر لحظه از زمان معین می‌کنند، بیان شود، حرکت ریسمان نیز باید به وسیله تابعی مانند $u(x, t)$ که مکان هر نقطه x روی ریسمان را در هر لحظه از زمان مشخص می‌کند، بیان گردد. برای اینکه معادله حرکت را برای ریسمان به دست آوریم، قسمتی از ریسمان به طول dx را بین نقاط x و $x + dx$ در نظر می‌گیریم. اگر چگالی ریسمان بر حسب واحد طول، σ باشد، جرم این قسمت از ریسمان برابر σdx خواهد بود. سرعت ریسمان در هر نقطه، $\partial u / \partial t$ و شیب آن $\partial u / \partial x$ است. مؤلفه قائم‌کشش وارد از طرف راست به چپ در هر نقطه از ریسمان عبارت است از:

$$\tau_u = \tau \sin \theta, \quad (1-8)$$

که در آن θ زاویه بین ریسمان و خط افقی است، (شکل ۸-۱). فرض می‌کنیم که θ بسیار کوچک است، در این حالت:

$$\tau \sin \theta \doteq \tau \tan \theta = \tau \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2-8)$$

نیروی خالص dF ناشی از کشش که از پایین به بالا بر قطعه dx ریسمان مؤثر است، عبارت است از تفاضل مؤلفه‌های قائم τ_u بین دو انتهای قطعه:

$$\begin{aligned} dF &= [\tau_u]_{x+dx} - [\tau_u]_x \\ &\doteq \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \end{aligned} \quad (3-8)$$

اگر کار را به شیبهای خیلی کوچک $\partial u / \partial x$ محدود نکنیم، در این صورت ممکن است قطعه‌ای از ریسمان نیز دارای مؤلفه افقی نیروی خالصی ناشی از کشش باشد و قطعه نه تنها به‌طور قائم بلکه به‌طور افقی نیز حرکت خواهد کرد و این امکانی است که از آن صرف‌نظر می‌کنیم. اگر علاوه بر این، نیروی قائمی مانند f به واحد طول نیز وجود داشته باشد که در امتداد ریسمان وارد شود، معادله حرکت قطعه dx عبارت خواهد بود از:

$$\sigma dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + f dx. \quad (4-8)$$

برای ریسمانی افقی که تحت تأثیر هیچ‌گونه نیروی افقی جز در دو انتها، قرار نگرفته باشد و برای دامنه‌های کوچک ارتعاش، کشش ثابت است و معادله (۴-۸) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \quad (5-8)$$

نیروی f ممکن است نیروی ثقل وارد بر ریسمان باشد که معمولاً قابل اغماض است مگر آنکه کشش خیلی کوچک باشد. نیروی f ممکن است نمایشگر نیرویی خارجی نیز باشد که به ریسمان وارد شده است تا باعث حرکت ارتعاشی آن شود. فقط حالت $f = 0$ را در نظر می‌گیریم و معادله (۵-۸) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (6-8)$$

که در آن

$$c = \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{1/2} \quad (۷-۸)$$

ثابت c دارای بعد سرعت است و در بخش ۳-۸ خواهیم دید که c سرعت حرکت موج در امتداد ریسمان است.

معادله (۶-۸) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای تابع $u(x, t)$ است و در واقع بیان ریاضی قانون حرکت نیوتن برای ریسمان مرتعش است. در آینده نیاز خواهیم داشت که جوابهای $u(x, t)$ معادله (۶-۸) را برای هر مکان اولیه داده شده $u_0(x)$ ریسمان و هر سرعت اولیه $v_0(x)$ برای هر نقطه از ریسمان پیدا کنیم. اگر لحظه اولیه را در $t = 0$ اختیار کنیم بدین معنی است که یک جواب $u(x, t)$ می‌خواهیم که شرایط اولیه زیر را برقرار کند:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (۸-۸)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = v_0(x).$$

جواب باید شرایط مرزی را نیز برقرار کند:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (۹-۸)$$

یعنی ریسمان در دو انتهایش بسته شده است. طبیعت مسئله فیزیکی مستلزم آن است که فقط یک جواب $u(x, t)$ معادله (۶-۸) وجود داشته باشد که معادلات (۸-۸) و (۹-۸) را برقرار کند، و این جواب نمایشگر حرکت ریسمان با شرایط اولیه داده شده است، بنابراین می‌توان انتظار داشت که نظریه ریاضی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مورد تعداد جوابهای معادله (۶-۸) ما را به همان نتیجه برساند و در واقع همین کار را نیز می‌کند.

۲-۸ وجوه طبیعی ارتعاش برای ریسمان مرتعش

ابتدا سعی می‌کنیم جوابهایی برای معادله (۶-۸) پیدا کنیم که شرایط اولیه (۹-۸) را بی‌توجه به شرایط اولیه (۸-۸) برقرار کنند. این روش مشابه روش حل نوسانگر هارمونیک است که در آن ابتدا درصد یافتن جوابهایی از نوع خاصی بودیم و سپس آنها را با شرایط اولیه مسئله سازگار کردیم. روشی که ما برای پیدا کردن جوابها به کار خواهیم برد روش جدا کردن متغیرها نامیده می‌شود و یکی از چند روش عمومی است که تاکنون برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ابداع شده است و بسیاری از معادلات مهم به این روش حل می‌شوند. متأسفانه این روش همیشه عملی نیست. در اصل هر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می‌توان به روشهای عددی حل کرد ولی اغلب زحمت این کار حتی با ماشینهای محاسبه خودکار بزرگ جدید، مانع از انجام آن می‌شود.

روش جدا کردن متغیرها، شامل یافتن جوابهایی به شکل زیر است:

$$u(x, t) = X(x) \Theta(t), \quad (۱۰-۸)$$

یعنی u باید حاصل ضرب یک تابع X از x و یک تابع Θ از t باشد. در این صورت مشتق‌های u عبارت خواهند بود از:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Theta \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \frac{d^2 \Theta}{dt^2}. \quad (11-8)$$

اگر عبارات فوق را در معادله (۶-۸) جایگزین و آنها را بر ΘX بخش کنیم، در این صورت معادله (۶-۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{c^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2}. \quad (12-8)$$

عبارت طرف چپ این معادله تابعی است فقط از x و عبارت طرف راست آن تابعی فقط از t . اگر t ثابت نگه داریم و x را تغییر دهیم، عبارت طرف راست ثابت باقی می‌ماند و بنابراین عبارت طرف راست باید مستقل از x باشد. به همین ترتیب عبارت طرف راست نیز باید مستقل از t باشد. می‌توان هر دو طرف را مساوی ثابتی قرار داد. از نظر فیزیکی واضح است که این ثابت باید منفی باشد زیرا عبارت طرف راست معادله (۱۲-۸) حاصل تقسیم شتاب ریسمان بر تغییر مکان است و شتاب باید مخالف تغییر مکان باشد وگرنه ریسمان به مکان تعادل خود بر نخواهد گشت. این ثابت را $-\omega^2$ می‌نامیم:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = -\omega^2, \quad \frac{c^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\omega^2. \quad (13-8)$$

اولین معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \omega^2 \Theta = 0, \quad (14-8)$$

که ما آن را به عنوان معادله نوسانگر هارمونیک می‌شناسیم و جواب عام آن در مناسب‌ترین شکل برای مقاصد فعلی ما عبارت است از:

$$\Theta = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (15-8)$$

که A و B ثابت‌های دلخواه‌اند. معادله دوم (۱۳-۸) نیز دارای شکلی مشابه است:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0, \quad (16-8)$$

و دارای جوابی مشابه است:

$$X = C \cos \frac{\omega x}{c} + D \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (17-8)$$

فقط در صورتی که X شرایط

$$X(0) = C = 0,$$

$$X(l) = C \cos \frac{\omega l}{c} + D \sin \frac{\omega l}{c} = 0. \quad (18-8)$$

را برقرار کنند، شرایط مرزی (۹-۸) برای تمام مقادیر t برقرار است. اولین معادله از

معادلات (۸-۱۸) مقدار C را معین می‌کند و سپس طبق دو مین معادله لازم است که

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0. \quad (19-8)$$

این رابطه فقط زمانی برقرار است که ω دارای یکی از مقادیر زیر باشد:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20-8)$$

اگر ثابت جدایی را در معادلات (۸-۱۳) مثبت اختیار می‌کردیم، به عوض معادله (۸-۱۷) جوابهای غایی به دست می‌آوردیم و برقراری شرایط مرزی (۸-۱۸) غیر ممکن می‌بود.

فرکانسهای $\nu_n = \omega_n / 2\pi$ را که به وسیله معادله (۸-۲۰) داده شده است، فرکانسهای طبیعی ارتعاش ریسمان می‌نامند. هرگاه n معلوم باشد، با جایگزینی معادلات (۸-۱۵) و (۸-۱۷) در معادله (۸-۱۰) و با استفاده از معادلات (۸-۱۸) و (۸-۲۰)، یک جواب به دست می‌آوریم:

$$u(x, t) = A \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi c t}{l} + B \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c t}{l}, \quad (21-8)$$

که در آن $D = 1$ اختیار شده است. این را وجه طبیعی ارتعاش ریسمان می‌نامند و درست مشابه وجوه طبیعی ارتعاشی است که در بخش ۴-۱۰ برای نوسانگر هارمونیک جفت شده پیدا کردیم. هر نقطه از ریسمان با همان فرکانس ω_n و با دامنه‌ای که به طور سینوسی در امتداد ریسمان تغییر می‌کند، مرتعش می‌شود. به عوض دو نوسانگر جفت شده، بی‌نهایت نقاط مرتعش و به عوض دو وجه طبیعی ارتعاش، بی‌نهایت وجه طبیعی داریم.

طبق معادله (۸-۲۱) مکان و سرعت اولیه در لحظه $t = 0$ برای n امین وجه طبیعی ارتعاش عبارت‌اند از:

$$u_0(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (22-8)$$

$$v_0(x) = \frac{n\pi c B}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

ریسمان فقط با این شرایط اولیه بسیار خاص در یکی از وجوه طبیعی خود ارتعاش می‌کند. مع‌هذا می‌توان به وسیله جمع جوابها، جوابهای کلی تری ساخت زیرا ریسمان مرتعش مانند نوسانگر هارمونیک مشمول اصل ترکیب است. فرض کنید $u_1(x, t)$ و $u_2(x, t)$ هر یک از جفت جوابهای معادله (۸-۶) باشند که شرایط مرزی (۸-۹) را برقرار می‌کنند. در این صورت تابع

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

نیز در معادله حرکت و شرایط مرزی صدق می‌کند. این نکته را می‌توان به سادگی به وسیله جایگزینی کردن $u(x, t)$ در معادلات (۸-۶) و (۸-۹) و استفاده از این امر که $u_1(x, t)$ و $u_2(x, t)$ در این معادلات صدق می‌کنند، توجیه کرد. بنابراین جواب عام‌تر معادلات (۸-۶) و (۸-۹) را باید از طریق جمع جوابهای نوع (۸-۲۱) و به کار بردن ضرایب مختلف A و B برای هر

فرکانس طبیعی، به دست آورد:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi ct}{l} \right). \quad (23-8)$$

مکان و سرعت اولیه برای این جواب عبارت‌اند از:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (24-8)$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c B_n}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

اینکه معادله (۲۳-۸) جواب عام مسئله ما است یا نه، بستگی دارد به اینکه آیا با انتخاب مناسب مجموعه‌ای نامتناهی از ضرایب A_n و B_n ، می‌توانیم توابع $u_0(x)$ و $v_0(x)$ را به هر سرعت و مکان اولیه ممکن برای ریسمان مربوط سازیم یا نه، حدس ما راجع به این نکته خیلی روشن نیست اگرچه واضح است که اکنون تعداد زیادی از توابع ممکن $u_0(x)$ و $v_0(x)$ داریم. جواب به وسیله قضیه سری فوریه تأمین می‌شود که بنابر آن هر تابع متصل $u_0(x)$ برای $(0 < x < l)$ که شرایط مرزی (۸-۹) را برقرار کند، ممکن است به وسیله مجموع طرف راست معادله (۲۴-۸) بیان شود به شرط آنکه ضرایب A_n به‌طور مناسب انتخاب شده باشند.^۱ به همین ترتیب هر تابع متصل $v_0(x)$ برای $(0 < x < l)$ را می‌توان با انتخاب مناسب ضرایب B_n ، بیان کرد. در این حالت ضرایب A_n و B_n عبارت‌اند از:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (25-8)$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

بنابراین کلی‌ترین حرکت ریسمان مرتعش عبارت است از ترکیبی از وجوه طبیعی ارتعاش با فرکانس بنیادی $v_1 = c/l$ و هارمونیکهای آن، $v_n = nc/l$.

۱. به بخش ۱۰ فصل ۱ کتاب زیر مراجعه کنید.

Dunham Jackson, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*. Menasha, Wisconsin: George Banta Publishing Co., 1941.

حتی توابعی که دارای تعداد متناهی نقاط انفصال‌اند، ممکن است به وسیله سری فوریه بیان شوند ولی این نکته در کاربرد حاضر چندان مورد توجه ما نیست.

قضیه سری فوریه در بخش ۲-۱۱ به صورتی اندک متفاوت بیان شد. ارتباط بین معادلات (۲۴-۸) و (۲۵-۲) باید به وسیله جایگزین کردن x به جای t و l به جای T در معادله (۲۵-۲) برقرار گردد. در این صورت عبارات سینوسی و کسینوسی هر دو باید تابع دلخواهی مانند $u_0(x)$ را در فاصله $(0 < x < l)$ بیان کنند ولی اگر بخواهیم $u_0(x)$ را فقط در فاصله $(0 < x < l)$ بیان کنیم، فقط عبارات سینوسی مورد نیازند. (تنها عبارات کسینوسی نیز برای این فاصله مناسب‌اند، ولی اگر $u_0(x)$ در $x=0$ و $x=l$ صفر شود، عبارات سینوسی مناسب‌اند.)

۳-۸ انتشار موج در امتداد ریسمان

معادلات (۸-۱۴) و (۸-۱۶) دارای جوابهای مختلط زیر نیز هستند.

$$\Theta = Ae^{\pm i\omega t}, \quad (26-8)$$

$$X = e^{\pm i(\omega/c)x}. \quad (27-8)$$

بنابراین معادله (۸-۶) دارای جوابهای مختلط به صورت زیر است:

$$u(x, t) = Ae^{\pm i(\omega/c)(x \pm ct)} \quad (28-8)$$

با در نظر گرفتن قسمت حقیقی تابع فوق یا با اضافه کردن مزدوجهای مختلط و سپس تقسیم آنها بر ۲، جوابهای حقیقی به دست می آیند:

$$u(x, t) = A \cos \frac{\omega}{c} (x - ct), \quad (29-8)$$

$$u(x, t) = A \cos \frac{\omega}{c} (x + ct). \quad (30-8)$$

اگر قسمتهای مجازی را اختیار کنیم، یا مزدوجهای مختلط را از هم کم و بر ۲i تقسیم کنیم، می توانیم جوابهای مشابهی به دست آوریم که در آنها سینوس جایگزین کسینوس شده است. این جوابها شرایط مرزی (۸-۹) را برقرار نمی کنند ولی از این نظر که (چنانکه نشان خواهیم داد)، حرکت موج را در امتداد ریسمان نمایش می دهند، اهمیت بسیاری دارند.

یک نقطه ثابت مانند x واقع بر ریسمان طبق جواب (۸-۲۹) یا (۸-۳۰) با دامنه A و فرکانس زاویه ای ω به طور هارمونیک در زمان نوسان می کند. در هر لحظه داده شده t ، ریسمان به شکل یک منحنی سینوسی با دامنه A و طول موج λ (فاصله بین دو ماکزیمم متوالی) خواهد بود:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (31-8)$$

اکنون نشان می دهیم که این الگو با تندی c در امتداد ریسمان، در معادله (۸-۲۹) به طرف راست و در معادله (۸-۳۰) به طرف چپ حرکت می کند. فرض کنید

$$\xi = x - ct, \quad (32-8)$$

به طوری که معادله (۸-۲۹) به صورت زیر درمی آید:

$$u = A \cos \frac{\omega \xi}{c}, \quad (33-8)$$

که در آن ξ را فاز موج گویند که به وسیله تابع u بیان می شود. برای مقدار ثابتی از ξ ، u دارای مقدار ثابتی است. فاصله زمانی کوتاه dt را در نظر می گیریم و نمو dx لازم برای نگهداری یک مقدار ثابت از ξ را پیدا می کنیم:

$$d\xi = dx - c dt = 0. \quad (34-8)$$

حال اگر dx و dt نسبت داده شده به وسیله معادله (۸-۳۴) را دارا باشند:

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad (35-8)$$

در این صورت مقدار u در نقطه $x + dx$ در زمان $t + dt$ برابر مقدار آن در نقطه x در لحظه t خواهد بود.

در نتیجه، الگو با سرعت c که به وسیله معادله (۷-۸) داده می‌شود، در امتداد ریسمان حرکت می‌کند. ثابت c ، سرعت فاز موج است. به همین ترتیب سرعت dx/dt برای جواب (۸-۳۰)، $c - c$ است. اغلب بهتر است که عدد موجی زاویه‌ای k را که به وسیله معادله زیر تعریف می‌شود، به کار وارد کنیم:

$$|k| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (۳۶-۸)$$

که در آن k برای موجی که به طرف راست حرکت می‌کند مثبت، و برای موجی که به طرف چپ حرکت می‌کند منفی گرفته می‌شود. در این صورت هر دو جواب (۸-۲۹) و (۸-۳۰) را می‌توان به صورت متقارن زیر نوشت:

$$u = A \cos(kx - \omega t). \quad (۳۷-۸)$$

عدد موجی زاویه‌ای، k برحسب رادیان بر سانتی‌متر اندازه‌گیری می‌شود، درست همان‌طور که فرکانس زاویه‌ای ω برحسب رادیان بر ثانیه اندازه‌گیری می‌شود. u در معادله (۸-۳۷) عبارت از قسمت حقیقی تابع مختلط زیر است:

$$u = Ae^{i(kx - \omega t)}. \quad (۳۸-۸)$$

این شکل اغلب در بررسی حرکت موج مورد استفاده قرار می‌گیرد. امکان ترکیب جوابهایی که به صورت (۸-۲۹) و (۸-۳۰) و دامنه‌ها و فرکانسهای مختلف‌اند، همراه با قضیه سری فوریه ما را به جواب عام‌تری به صورت زیر می‌رساند.

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (۳۹-۸)$$

که در آن $f(\xi)$ و $g(\eta)$ توابع دلخواهی از متغیرهای $\xi = x - ct$ و $\eta = x + ct$ اند. معادله (۸-۳۹) نمایشگر موجی به شکل دلخواه است که با تندی c به طرف راست حرکت می‌کند و موج دیگری که به طرف چپ حرکت می‌کند. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که محاسبه مشتق u از معادله (۸-۳۹) به جوابی برای معادله (۸-۶) منجر می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dg}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 g}{d\eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{dg}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{df}{d\xi} + c \frac{dg}{d\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} + c^2 \frac{d^2 g}{d\eta^2}.$$

وقتی روابط فوق را در معادله (۸-۶) جایگزین کنیم توابع $f(\xi)$ و $g(\eta)$ هر چه باشند، البته به شرط اینکه دارای مشتق دوم باشند، معادله در همه حال برقرار می‌شود. در واقع معادله (۸-۳۹) عام‌ترین جواب معادله (۸-۶) است، و این، از نظریه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نتیجه می‌شود که بنابر آن، جواب عام یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم شامل دو تابع

دلخواه است. این مطلب را می توان بی مراجعه به نظریه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با این فرض ثابت کرد، که ریسمان دارای طول نامتناهی باشد به طوری که هیچ گونه کاری به شرایط مرزی نداشته باشد و با این فرض که مکان و سرعت اولیه تمام نقاط روی ریسمان به وسیله تابع $u_0(x)$ و $v_0(x)$ داده شده باشند. اگر جواب (۳۹-۸) قرار باشد که در شرایط مرزی صدق کند، باید در $t = 0$ داشته باشیم:

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = u_0(x), \quad (40-8)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = \left[-c \frac{df}{d\xi} + c \frac{dg}{d\eta} \right]_{t=0} = v_0(x). \quad (41-8)$$

در $\xi = \eta = x, t = 0$ به طوری که معادله (۴۱-۸) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dx} [-f(x) + g(x)] = \frac{v_0(x)}{c}, \quad (42-8)$$

که پس از انتگرال گیری به صورت زیر درمی آید:

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x v_0(x) dx + C. \quad (43-8)$$

اگر معادلات (۴۰-۸) و (۴۳-۸) را جمع و تفریق کنیم، توابع f و g به دست می آیند:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x v_0(x) dx - C \right), \quad (44-8)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x v_0(x) dx + C \right).$$

ثابت C را می توان حذف کرد زیرا در $u = f + g$ حذف خواهد شد و می توانیم به جای x در این معادلات به ترتیب ξ و η قرار دهیم:

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \left(u_0(\xi) - \frac{1}{c} \int_0^\xi v_0(\xi) d\xi \right), \quad (45-8)$$

$$g(\eta) = \frac{1}{2} \left(u_0(\eta) + \frac{1}{c} \int_0^\eta v_0(\eta) d\eta \right).$$

معادلات فوق به جوابی (۳۹-۸) برای معادله (۶-۸) برای هر مکان و سرعت اولیه ریسمان منجر می شود.

با هر موج به صورت

$$u = f(x - ct), \quad (46-8)$$

یک سیلان انرژی در امتداد ریسمان همراه است که ما آن را به وسیله محاسبه توان داده شده از چپ به راست در هر نقطه x روی ریسمان نشان می دهیم، توان P عبارت است از حاصل ضرب سرعت رو به بالای نقطه x در نیروی رو به بالای (معادله (۲-۸) را ببینید) وارد بر نیمه طرف راست ریسمان در نقطه x به وسیله طرف چپ ریسمان:

$$P = -\tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (47-8)$$

اگر u به وسیله معادله (۸-۴۶) داده شده باشد، این توان عبارت است از:

$$P = c\tau \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2, \quad (48-8)$$

که همیشه مثبت است و این نشان می‌دهد که سیلان توان برای موج (۸-۴۶) همواره از چپ به راست است. P برای موجی که به طرف چپ حرکت می‌کند، منفی خواهد بود، و این نشان‌دهنده سیلان توانی از راست به چپ است. برای موجی سینوسی که به وسیله معادله (۸-۳۷) داده می‌شود، توان عبارت است از:

$$P = k\omega\tau A^2 \sin^2(kx - \omega t), \quad (49-8)$$

که میانگین آن بر روی یک دوره تناوب عبارت است از:

$$\langle P \rangle_{av} = \frac{1}{2} k\omega\tau A^2. \quad (50-8)$$

اکنون ریسمانی را در نظر می‌گیریم که در نقطه $x = 0$ بسته شده و از نقطه $x = 0$ به طرف چپ تا نقطه $x = -\infty$ کشیده شده است. اکنون جواب (۸-۳۹) باید شرط مرزی زیر را برقرار کند

$$u(0, t) = f(-ct) + g(ct) = 0, \quad (51-8)$$

برای تمام زمانهای t ، به طوری که توابع $f(\xi)$ و $g(\eta)$ باید چنان باشند که

$$f(\xi) = -g(\eta) \quad (52-8)$$

هر آنگاه که $\xi = -\eta$. اکنون مقادیر اولیه $u(x)$ و $v(x)$ فقط برای مقادیر منفی x داده خواهند شد، و معادلات (۸-۴۵) توابع $f(\xi)$ و $g(\eta)$ را فقط برای مقادیر منفی ξ و η معین خواهند کرد. در این صورت مقادیر $f(\xi)$ و $g(\eta)$ برای مقادیر مثبت ξ و η را می‌توان از معادلات (۸-۵۲) پیدا کرد:

$$f(\xi) = -g(-\xi), \quad g(\eta) = -f(-\eta). \quad (53-8)$$

حال موجی را در نظر می‌گیریم که به وسیله $f(x-ct)$ نمایش داده شده است و به سمت انتهای $x = 0$ حرکت می‌کند. یک فاز خاص ξ که دامنه موج برای آن $f(\xi_0)$ است، در لحظه t_0 در نقطه

$$x_0 = \xi_0 + ct_0. \quad (54-8)$$

خواهد بود. فرض کنید که ξ_0 و t_0 چنان اختیار شده‌اند که x_0 منفی است. در زمان بعدی t_1 ، فاز ξ_0 در نقطه

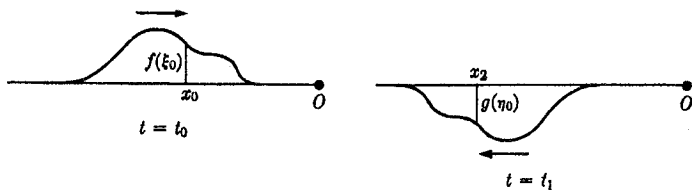
$$x_1 = \xi_0 + ct_1 = x_0 + c(t_1 - t_0). \quad (55-8)$$

خواهد بود. در زمان $t_1 = t_0 - (x_0/c)$ فاصله $x_1 = 0$ و فاز ξ_0 به انتهای ریسمان می‌رسد. در زمانهای بعدی x_1 مثبت خواهد بود و هیچ‌گونه معنی فیزیکی نخواهد داشت زیرا ریسمان تا مقادیر مثبت x ادامه ندارد. اکنون فاز η_0 موج $g(x+ct)$ را که به طرف چپ حرکت می‌کند و به وسیله معادله زیر تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم:

$$\eta_0 = x + ct = -\xi_0. \quad (56-8)$$

دامنه موج رو به چپ $g(\eta_0)$ ، برای فاز η_0 از طریق معادله (۸-۵۳) با دامنه موج رو به راست $f(\xi_0)$ ، برای فاز متناظر ξ_0 مربوط می‌شود:

$$g(\eta_0) = -f(\xi_0). \quad (57-8)$$



شکل ۲-۸ یک موج منعکس شده در $x = 0$.

در لحظه t_1 فاز η_0 در نقطه

$$x_1 = \eta_0 - ct_1 = -x_0 - c(t_1 - t_0). \quad (58-8)$$

خواهد بود. اگر $(x_0/c) -$ اگر $t_1 > t_0$ ، x_1 منفی خواهد بود و $g(\eta_0)$ نمایشگر موجی خواهد بود که دامنه اش با دامنه موج $f(\xi_0)$ مساوی و مختلف جهت است و به طرف چپ حرکت می کند. بنابراین موج $f(x - ct)$ در $x = 0$ به صورت غیر هم فاز منعکس می شود و موج مساوی و مختلف جهتی می شود که به طرف چپ حرکت می کند (شکل ۲-۸). طبق معادله (۵۸-۸)، فاصله کل طی شده به وسیله موج در طول زمان $(t_1 - t_0)$ ، از نقطه $x = x_0$ تا $x = 0$ و برگشت به نقطه $x = x_1$ عبارت است از:

$$-x_0 - x_1 = c(t_1 - t_0), \quad (59-8)$$

و جز این نیز نباید باشد.

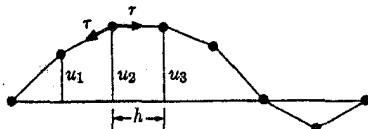
جواب (۳۹-۸) را می توان در مورد ریسمانی به طول متناهی که در نقاط $x = l$ و $x = 0$ بسته شده است نیز به کار برد. در این حالت مکان و سرعت اولیه $u(x)$ و $v(x)$ فقط برای $(0 \leq x \leq l)$ معلوم است. در این صورت توابع $f(\xi)$ و $g(\eta)$ به وسیله معادله (۴۵-۸) فقط برای $(0 \leq \eta \leq l)$ و $(0 \leq \xi \leq l)$ معین اند. اگر $f(\xi)$ و $g(\eta)$ را برای مقادیر منفی ξ و η به وسیله معادله (۵۳-۸) بر حسب مقادیر مثبت ξ و η تعریف کنیم، در این صورت شرط مرزی (۵۱-۸) در $x = 0$ برقرار خواهد بود. از طریق استدلال مشابهی که منجر به معادله (۵۳-۸) شد، می توانیم نشان دهیم که اگر برای تمام مقادیر ξ و η ،

$$\begin{aligned} f(\xi + l) &= -g(l - \xi), \\ g(\eta + l) &= -f(l - \eta). \end{aligned} \quad (60-8)$$

شرط مرزی (۹-۸) برای $x = l$ برقرار خواهد بود. به وسیله معادلات (۵۳-۸) و (۶۰-۸) می توانیم $f(\xi)$ و $g(\eta)$ را، همین که مقادیر آنها برای $0 \leq \xi \leq l$ و $0 \leq \eta \leq l$ (به وسیله معادلات (۴۵-۸)) داده شده باشند برای تمام مقادیر ξ و η به دست آوریم. بنابراین جوابی برای ریسمان مرتعش به طول l بر حسب امواجی که در جهت های مخالف حرکت می کنند و دائماً در نقطه $x = l$ و $x = 0$ منعکس می شوند، پیدا می کنیم. این جواب معادل است با جواب داده شده به وسیله معادلات (۲۳-۸) و (۲۵-۸) بر حسب امواج ایستاده سینوسی.

۴-۸ ریسمان به صورت حالت حدی دستگاهی از ذرات

در سه بخش اول این فصل، ریسمانی آرمانی در نظر گرفتیم که جرمی به طور پیوسته گسترده و چگالی σ و کشش τ مشخصه آن بود. یک ریسمان واقعی از ذراتی (اتمها و ملکولها) به وجود آمده است و در نظر گرفتن آن به صورت پیوسته به سبب تعداد بسیار زیاد ذرات در آن معتبر است. بررسی



شکل ۸-۳ ریسمان مرکب از ذرات.

ریسمان واقعی که فرد فرد اتمها را به حساب آورد، به وضع یأس آوری دشوار است ولی در این بخش نمونه‌ای آرمانی از ریسمانی را در نظر می‌گیریم که از تعدادی متناهی ذرات، هر یک به جرم m به وجود آمده باشد. شکل ۸-۳ این ریسمان آرمانی را نشان می‌دهد که در آن یک نیروی جاذب τ بین دو ذره مجاور در امتداد خط واصل بین آنها، عمل می‌کند. نیروهای بین ذره‌ای چنان‌اند که ریسمان در حال تعادل افقی است و ذرات به فاصله مساوی h از یکدیگر قرار گرفته‌اند. طول ریسمان $h(N+1)$ و حاوی $N+2$ ذره است و دو ذره انتهایی به محور x ثابت‌اند. N ذره‌ای که آزادند تا حرکت کنند، به ترتیب ۱، ۲، ...، N نمره‌گذاری شده‌اند و تغییر مکان رو به بالای ذره j از محور افقی را u_j می‌نامیم. فرض خواهیم کرد که ذرات فقط به طور قائم حرکت می‌کنند و فقط ارتعاشات کوچک در نظر گرفته می‌شوند به طوری که شیب ریسمان همواره کوچک است. در این صورت معادلات حرکت این دستگاه از ذرات عبارت‌اند از:

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} = \tau \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \tau \frac{u_j - u_{j-1}}{h}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (8-61)$$

که در آن عبارت طرف راست نمایشگر مؤلفه‌های قائم نیروهای τ بین ذره j و دو ذره مجاور است و فرض می‌کنیم که نیروهای τ بین تمام جفت‌های ذرات مساوی‌اند. اکنون فرض کنیم که عدد N بسیار بزرگ و تغییر مکان ریسمان چنان باشد که در هر لحظه t ، یک منحنی صاف $u(x, t)$ را می‌توان از تمام ذرات گذراند به طوری که

$$u(jh, t) = u_j(t). \quad (8-62)$$

در این صورت می‌توانیم دستگاه ذرات را تقریباً به صورت ریسمان پیوسته‌ای با کشش τ و چگالی خطی

$$\sigma = \frac{m}{h} \quad (8-63)$$

نمایش دهیم. معادلات حرکت (۸-۶۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2 u_j}{dt^2} = \frac{\tau}{\sigma h} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right). \quad (8-64)$$

اکنون اگر ذرات به اندازه کافی نزدیک به هم باشند، به طور تقریب خواهیم داشت:

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{h} \doteq \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=(j+1/2)h}, \quad (8-65)$$

$$\frac{u_j - u_{j-1}}{h} \doteq \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=(j-1/2)h},$$

و در این صورت:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right) \doteq \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=jh} \quad (۶۶-۸)$$

بنابراین وقتی h خیلی کوچک است تابع $u(x, t)$ معادلهٔ زیر را برقرار می‌کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (۶۷-۸)$$

که همانند معادلهٔ (۶-۸) برای ریمان پیوسته است.

وقتی N بزرگ است انتظار می‌رود که جوابهای معادلات (۶۱-۸) به تقریب همان جوابهای معادلهٔ (۶-۸) باشند. اگر قادر نبودیم که معادلهٔ (۶-۸) را به راه دیگری حل کنیم، روش حل عددی آن این بود که عمل فوق را به‌طور معکوس انجام دهیم تا معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۶۷-۸) را به مجموعهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی (۶۱-۸) تبدیل کنیم که به وسیلهٔ روشهای عددی حل می‌شوند. جوابهای معادلات (۶۱-۸) فی‌نفسه جالب توجه‌اند. این معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} + \frac{\gamma \tau}{h} u_j - \frac{\tau}{h} (u_{j+1} + u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (۶۸-۸)$$

اینها معادلات مجموعه‌ای از نوسانگرهای هارمونیک‌اند، که هر یک به دو نوسانگر مجاور جفت شده‌اند. روش حل ما برای مسئلهٔ نوسانگر جفت شده یا تأمل بر نتایج حاصل برای ریمان پیوسته ما را به آزمایش جوابی به صورت زیر هدایت می‌کنند:

$$u_j = a_j e^{\pm i\omega t}. \quad (۶۹-۸)$$

اگر این جواب آزمایشی را در معادلات (۶۸-۸) جایگزین کنیم، عامل $e^{\pm i\omega t}$ حذف می‌شود، و مجموعه‌ای از معادلات جبری به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{\gamma \tau}{h} - m\omega^2 \right) a_j - \frac{\tau}{h} a_{j+1} - \frac{\tau}{h} a_{j-1} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (۷۰-۸)$$

این مجموعه‌ای است از معادلات تفاضلی خطی که می‌توان a_{j+1} را بر حسب a_j و a_{j-1} از آنها به دست آورد. چون $a_0 = 0$ است اگر a_1 داده شده باشد، می‌توان مقادیر باقی ضرایب a_j را با کاربرد متوالی این معادلات پیدا کرد. یک روش حل بهتر این است که به تشابه بین معادلات تفاضلی خطی (۷۰-۸) و معادلهٔ دیفرانسیل خطی (۱۶-۸) توجه کنیم و جوابی به صورت زیر را امتحان کنیم:

$$a_j = A e^{ipj}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (۷۱-۸)$$

وقتی این جواب را در معادلات (۷۰-۸) جایگزین کنیم، پس از حذف عامل $A e^{ipj}$ نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{\gamma \tau}{h} - m\omega^2 \right) - \frac{\tau}{h} (e^{ip} + e^{-ip}) = 0, \quad (۷۲-۸)$$

یا

$$\cos p = 1 - \frac{m h \omega^2}{\gamma \tau}. \quad (۷۳-۸)$$

اگر ω کمتر از

$$\omega_c = \left(\frac{4\tau}{mh} \right)^{1/2} \quad (۷۴-۸)$$

باشد، جوابهایی حقیقی برای p وجود خواهد داشت. فرض کنید که یک جواب به صورت زیر داده شده باشد:

$$p = kh, \quad 0 \leq kh \leq \pi. \quad (۷۵-۸)$$

در این صورت جواب دیگر عبارت است از:

$$p = -kh. \quad (۷۶-۸)$$

تمام جوابهای دیگر برای p به اندازه مضاربی از 2π با جوابهای فوق تفاوت دارند و از نقطه نظر شکل معادله (۷۱-۸)، به همان مقادیر a_j منجر می شوند بنابراین می توانیم توجه خود را به مقادیر p که به وسیله معادلات (۷۵-۸) و (۷۶-۸) داده شده است محدود کنیم.

اگر معادله (۷۱-۸) را در معادله (۶۹-۸) جایگزین و از معادله (۷۵-۸) استفاده کنیم، جوابی برای معادلات (۶۸-۸) به صورت زیر خواهیم داشت:

$$u_j = Ae^{\pm i(kjh - \omega t)}. \quad (۷۷-۸)$$

چون فاصله افقی ذره j از انتهای طرف چپ ریسمان عبارت است از:

$$x_j = jh, \quad (۷۸-۸)$$

می بینیم که جواب (۷۷-۸) نظیر جواب قبلی (۳۸-۸) برای ریسمان پیوسته، و نمایشگر امواج سینوسی متحرک است. اگر دو جواب مختلط مزدوج (۷۷-۸) را جمع و از معادله (۷۸-۸) استفاده کنیم، جواب حقیقی

$$u_j = A \cos(kx_j - \omega t), \quad (۷۹-۸)$$

را به دست می آوریم که نظیر معادله (۳۷-۸) است. بنابراین امواجی سینوسی داریم که ممکن است با سرعت (معادله (۳۶-۸))

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{h\omega}{|p|}, \quad (۸۰-۸)$$

در هر دو جهت حرکت کنند که در آن p به وسیله معادله (۷۳-۸) داده می شود. اگر $\omega \ll \omega_c$ باشد [معادله (۷۴-۸)]، در این صورت p تقریباً صفر خواهد بود، و می توانیم $\cos p$ در معادله (۷۳-۸) را به صورت سری نمایی بسط دهیم:

$$1 - \frac{p^2}{2} \doteq 1 - \frac{mh\omega^2}{2\tau}, \quad (۸۱-۸)$$

$$|p| \doteq \omega \left(\frac{mh}{\tau} \right)^{1/2},$$

$$c \doteq \left(\frac{h\tau}{m} \right)^{1/2}, \quad (۸۲-۸)$$

که از نظر معادله (۸-۶۳) با معادله (۸-۷) برای ریسمان پیوسته موافقت دارد. مع هذا سرعت c برای مقادیر بزرگتر ω ، کوچکتر از سرعت ریسمان پیوسته است و وقتی $\omega \rightarrow \omega_c$ به طرف مقدار زیر میل می کند:

$$c = \frac{h\omega_c}{\pi} = \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{h\tau}{m} \right)^{1/2}, \quad (۸-۸۳)$$

(برای ریسمان پیوسته ای که برای آن $\omega_c = \infty$, $m\hbar = \sigma\hbar^2 = 0$). چون سرعت فاز، که به وسیله معادله (۸-۸۰) داده شده است، به فرکانس بستگی دارد، نمی توانیم جوابهای سینوسی را با هم ترکیب کنیم تا یک جواب عام به صورت (۸-۳۹) به دست آوریم. اگر موجی با شکلی غیرسینوسی در امتداد ریسمان حرکت کند، مؤلفه های سینوسی که موج ممکن است به آنها تجزیه شود، با سرعتهای متفاوت حرکت می کنند و در نتیجه با حرکت موج، شکل آن تغییر می کند. این پدیده را پاشیدگی^۱ می نامند.

وقتی $\omega > \omega_c$ ، معادله (۸-۷۳) فقط جوابهای مختلط برای p دارد که به صورت زیرند:

$$p = \pi \pm i\gamma, \quad (۸-۸۴)$$

که به جوابهای u_j به صورت زیر منجر می شوند:

$$u_j = (-1)^j A e^{\pm \gamma j} \cos \omega t. \quad (۸-۸۵)$$

در این صورت موج منتشر نمی شود بلکه فقط دامنه نوسان از هر نقطه ای که در نوسان آمده باشد به راست یا چپ به صورت نمایی کاهش می یابد. کوچکترین طول موج (معادله (۸-۳۶)) که هنوز در معادله (۸-۷۵) صادق است، عبارت است از:

$$\lambda_c = \frac{\gamma\pi}{k_c} = \gamma\hbar. \quad (۸-۸۶)$$

واضح است که موجی با طول موج کوتاهتر از این، بی معنی می بود زیرا در فاصله ای کمتر از λ_c به اندازه کافی ذره وجود ندارد که طول موج را معین کند. طول موج λ_c به فرکانس ω_c مربوط می شود که برای آن

$$u_j = A e^{ij\pi} e^{\pm i\omega_c t} = (-1)^j A e^{\pm i\omega_c t}. \quad (۸-۸۷)$$

ذرات مجاور فقط به طور غیرهمفاز با دامنه A نوسان می کنند.

می توان با جمع و تفریق جوابهایی به صورت (۸-۷۷)، جوابهایی به دست آورد که شرایط مرزی زیر را برقرار کنند:

$$u_0 = u_{N+1} = 0 \quad (۸-۸۸)$$

با ترکیب مناسبی از جوابهایی به صورت (۸-۷۷)، می توان جوابهای زیر را به دست آورد:

$$u_j = A \sin pj \cos \omega t + B \sin pj \sin \omega t + C \cos pj \cos \omega t + D \cos pj \sin \omega t. \quad (۸-۸۹)$$

برای برقراری شرایط (۸-۸۸)، باید

$$C = D = 0, \quad (۹-۰-۸)$$

$$p = \frac{n\pi}{N+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

که در آن محدودیت $n \leq N$ ناشی از محدودیت p در معادله (۷۵-۸) است. فرکانسهای طبیعی ارتعاش اکنون به وسیله معادله (۷۳-۸) داده می‌شوند:

$$\omega_n = \left[\frac{\tau}{mh} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N+1} \right) \right]^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (91-8)$$

اگر $n \ll N$ باشد می‌توان کسینوس را به صورت سری نمایی بسط داد و رابطه تقریبی زیر را به دست آورد

$$\begin{aligned} \omega_n &\doteq \left[\frac{n^2 \pi^2 \tau}{mh(N+1)^2} \right]^{1/2} \\ &= \frac{n\pi}{l} \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{1/2}, \quad [l = (N+1)h], \end{aligned} \quad (92-8)$$

که با معادله (۲۰-۸) برای ریسمان پیوسته توافق دارد.

با آویختن وزنه‌های m در فواصل h در امتداد ریسمان کشیده شده‌ای، می‌توان نمونه‌ای فیزیکی که به تقریب نزدیک با ریسمان ذرات مورد بحث در این بخش مشابه باشد، ساخت. m ، جرم هر وزنه، باید در مقایسه با جرم طول h ریسمان بزرگ باشد.

۵-۸ تذکراهایی کلی درباره انتشار امواج

اگر مؤلفه رو به بالای نیروی ناشی از کشش را که از چپ به راست در هر نقطه ریسمانی کشیده وارد می‌شود با F و سرعت رو به بالای هر نقطه روی ریسمان را با v نشان دهیم، در این صورت طبق معادله (۲-۸) داریم:

$$F = -\tau \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (93-8)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (94-8)$$

طبق معادله (۴-۸) اگر نیروی دیگری روی ریسمان وجود نداشته باشد، داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (95-8)$$

و با مشتق‌گیری از معادله (۹۳-۸) نسبت به t و با فرض اینکه τ نسبت به زمان ثابت است، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\tau \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (96-8)$$

معادلات (۹۵-۸) و (۹۶-۸) از نظر فیزیکی به سادگی درک می‌شوند. شتاب ریسمان با تفاضل نیروی F در دو انتهای قطعه کوچکی از ریسمان، متناسب خواهد بود. به همین ترتیب چون F با شیب متناسب است، میزان تغییر F نسبت به زمان با تفاضل سرعت‌های رو به بالای دو انتهای قطعه کوچکی از ریسمان متناسب خواهد بود. توان داده شده از چپ به راست در هر نقطه از

ریسمان عبارت است از:

$$P = Fv. \quad (97-8)$$

معادلات (۸-۹۵) و (۸-۹۶) نمونه‌هایی از انواع فراوان انتشار امواج کم دامنه‌اند که در فیزیک پیش می‌آید. دو کمیت وجود دارد که در این حالت F و v اند به طوری که میزان تغییر هر یک از آنها بر حسب زمان با مشتق مکانی دیگری متناسب است. معادلات انتشار موج برای دامنه‌های بزرگ، ممکن است غیرخطی شوند و آثار جدیدی مانند ایجاد جبهه‌های ضرب^۱ ممکن است پدید آید که به وسیله معادلاتی که در اینجا بررسی کردیم بیان نمی‌شوند. وقتی پاشیدگی در کار است، جملاتی که از نظر v و F خطی‌اند، یا جملاتی که شامل مشتق‌هایی بالاتر از مرتبه اول‌اند، ممکن است ظاهر شوند. هر وقت معادلاتی به صورت (۸-۹۵) و (۸-۹۶) برقرار باشند، یک معادله موج به صورت (۸-۶) برای هر یک از دو کمیت می‌توان به دست آورد. به عنوان مثال، اگر با فرض ثابت بودن σ و τ از معادله (۸-۹۵) نسبت به t و از معادله (۸-۹۶) نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = -\tau \frac{\partial v^2}{\partial x^2} = -\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

یا

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (98-8)$$

که در آن

$$c = \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{1/2}. \quad (99-8)$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \quad (100-8)$$

معمولاً یکی از این دو کمیت را می‌توان چنان اختیار کرد که مشابه نیرویی مانند (F) و دیگری مشابه سرعت مربوط به آن (v) باشد، و در این صورت توان انتقال داده شده به وسیله معادله‌ای مانند (۸-۹۷) داده می‌شود. به همین ترتیب تمام کمیت‌های دیگر وابسته به حرکت موج، یک معادله موج را برقرار می‌کنند، مثلاً u که در معادله (۸-۶) صادق است.

به عنوان مثال دیگر، معادلات یک موج صوتی تخت را که در راستای x حرکت می‌کند و در بخش ۸-۱۰ به دست خواهند آمد، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial p'}{\partial t} = -B \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (101-8)$$

که در آن p' اضافه فشار (بالای جو) و v سرعت هوا در هر نقطه در راستای x ، و ρ چگالی و B ضریب حجمی است. معنی فیزیکی این معادلات، حتی بی‌بحث بیشتر راجع به حرکت گازها،

واضح است. p' و v هر دو در معادلات موجی که به‌سادگی از (۸-۱۰۱) نتیجه می‌شوند صادق‌اند:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (8-102)$$

که در آن

$$c = \left(\frac{B}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (8-103)$$

و توان منتقل شده در امتداد x بر حسب واحد سطح عبارت است از:

$$P = p' v. \quad (8-104)$$

در مورد یک موج الکترومغناطیسی تخت که در راستای محور x حرکت می‌کند و در راستای محور y به‌طور خطی پولاریزه است، می‌توان نشان داد که معادلات مشابه (در واحدهای گاوسی) عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -c \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -c \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (8-105)$$

که در آن E_y و B_z مؤلفه‌های y و z شدت میدان مغناطیسی و الکتریکی، و c تندی نور است. مؤلفه‌های E_y و B_z در معادلات موج با سرعت موج c صادق‌اند و توان منتقل شده در راستای محور x بر حسب واحد سطح عبارت است از:

$$P = \frac{E_y B_z}{4\pi c}. \quad (8-106)$$

به‌عنوان آخرین مثال، در مورد یک خط دو سیمه انتقال انرژی الکتریکی، ولتاژ E بین دو خط و جریان i در داخل سیم، در معادلات زیر صادق‌اند:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial i}{\partial x}, \quad \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial E}{\partial x}, \quad (8-107)$$

که در آن C ظرفیت موازی بسته بر حسب واحد طول، و L خودالقایی بر حسب واحد طول‌اند. در اینجا نیز می‌توان معادلات موج را بر حسب i و E با سرعت موج یعنی

$$c = \left(\frac{1}{LC} \right)^{1/2}, \quad (8-108)$$

نوشت و در اینجا توان منتقل شده در راستای x عبارت است از:

$$P = E i. \quad (8-109)$$

بنابراین مطالعه انتشار موج در یک ریسمان بر مسائل فیزیکی بسیاری قابل اطلاق است به‌طوری که اهمیت نظری و عملی بسیاری از آنها از خود مسئله ریسمان بیشتر است. در بسیاری از موارد بحث ما در باره ریسمانی که از تعداد بی‌شماری ذرات جدا تشکیل شده باشد، نیز جالب است. به‌عنوان مثال، خط انتقال انرژی الکتریکی را می‌توان حالتی حدی از رشته‌ای صافیهای پایین‌گذر دانست. شبکه‌ای الکتریکی شامل خود القاییهای زنجیره‌ای و ظرفیتهای موازی را می‌توان به‌وسیله

مجموعه‌ای معادلات به صورت معادلات (۸-۶۱) توصیف کرد و همان نتایج را به دست آورد. در مورد امواج صوتی به علت تشابه باید انتظار داشته باشیم که در فرکانسهای بسیار بالا، که طول موج با فاصله بین ملکولها قابل قیاس است، سرعت موج شروع به وابسته بودن به فرکانس کند، و فرکانس حدی وجود خواهد داشت که در فرکانسهای بالاتر از آن، هیچ‌گونه انتشار موج ممکن نخواهد بود.

۸-۶ سینماتیک سیالهای متحرک

در این بخش مفاهیم سینماتیکی را که در بررسی حرکت ماده به طور پیوسته گسترده به ویژه سیالهای متحرک مفیدند، بسط می‌دهیم. یک روش توصیف حرکت یک سیال این است که سعی کنیم به وسیله نسبت دادن مختصات x, y, z به هر ذره سیال و تصریح آنها به صورت توابعی از زمان، حرکت هر نقطه از سیال را دنبال کنیم. به عنوان مثال، می‌توان یک ذره مفروض سیال را به وسیله مختصات x, y, z در لحظه اولیه $t = t_0$ تصریح کرد. سپس می‌توان حرکت سیال را به وسیله توابع $x(x_0, y_0, z_0, t)$ و $y(x_0, y_0, z_0, t)$ و $z(x_0, y_0, z_0, t)$ توصیف کرد، که مختصات x, y, z ذره سیال را که در لحظه t_0 در نقطه (x_0, y_0, z_0) بود، در لحظه t تعیین می‌کنند. این کار به منزله نخستین تعمیم مفاهیم مکانیک ذره‌ای و بررسی پیشین ریمان مرتعش می‌بود. این عمل که ابتدا توسط اوپلر انجام شد به معادلات معروف به «معادلات لاگرانژ»^۱ مکانیک سیالات منجر می‌شوند. روش دیگری که برای بسیاری از مقاصد مناسب‌تر است (و آن را نیز مدیون اوپلریم)، این است که از مشخص کردن تاریخچه هر ذره سیال چشم پوشیم و در عوض چگالی و سرعت سیال را در هر نقطه از فضا و در هر لحظه از زمان تصریح کنیم. این روشی است که ما این جا دنبال خواهیم کرد. این روش به «معادلات اوپلر»^۲ مکانیک سیالات منجر می‌شود. حرکت سیال را به وسیله مشخص کردن چگالی $\rho(x, y, z, t)$ و بردار سرعت $v(x, y, z, t)$ در نقطه x, y, z در زمان t ، توصیف می‌کنیم. به این ترتیب توجه خود را بر آنچه در یک نقطه خاص از فضا و در یک زمان خاص اتفاق می‌افتد، متمرکز می‌کنیم و نه بر اینکه یک ذره به خصوص سیال در چه حال است.

هر کمیتی که در توصیف وضع سیال به کار می‌رود، مثلاً، فشار p ، تابعی مانند $[p(x, y, z, t)]$ از مختصات فضایی x, y, z و زمان t خواهد بود. یعنی این تابع در هر نقطه از فضا و در هر لحظه از زمان، مقدار معینی خواهد داشت. اگرچه روش توصیفی که ما اتخاذ کرده‌ایم توجه ما را بر یک نقطه از فضا متمرکز می‌کند و نه بر یک ذره سیال. مع‌هذا ما قادر نخواهیم بود که از دنبال کردن ذرات سیال، لااقل برای فواصل زمانی کوتاه dt ، اجتناب کنیم. زیرا قوانین مکانیک در مورد ذرات صادق‌اند و نه نقاط فضایی. بنابراین برای هر کمیت مثلاً p دو میزان تغییر نسبت به زمان مورد توجه ماست. میزان تغییر فشار در یک نقطه ثابت در فضا نسبت به زمان، همان مشتق جزئی نسبت به زمان، $(\partial p / \partial t)$ خواهد بود که خود تابعی از x, y, z, t است. میزان تغییر فشار نسبت به یک نقطه‌ای که

با سیال حرکت می‌کند مشتق کامل تابع خواهد بود،

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (110-8)$$

که در آن dx/dt ، dy/dt و dz/dt عبارت‌اند از مؤلفه‌های v سرعت سیال. تغییر فشار، dp در زمان dt در مکان یک ذره متحرک سیال که در این مدت زمان از نقطه x ، y ، و z به نقطه $x+dx$ ، $y+dy$ و $z+dz$ حرکت می‌کند، عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} dp &= p(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - p(x, y, z, t) \\ &\doteq \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

و اگر $dt \rightarrow 0$ ، معادله فوق به معادله (۱۱۰-۸) منجر خواهد شد، همچنین می‌توان معادله (۱۱۰-۸) را به صورتهای زیر نوشت:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \quad (111-8)$$

و

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v \cdot \nabla p, \quad (112-8)$$

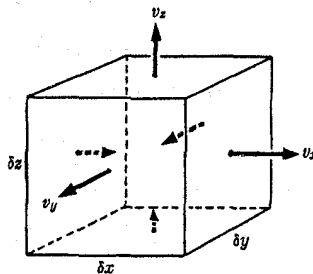
که در معادله دوم برای اختصار با رعایت قراردادهای مربوط به استعمال ∇ از علامت ∇ استفاده شده است. مشتق کامل dp/dt نیز تابعی از x ، y ، z ، و t است. رابطه مشابهی بین مشتقهای جزئی و کامل هر کمیت برقرار است و می‌توان آن را به صورت علامتی به طریق زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla, \quad (113-8)$$

که در آن مشتقهای جزئی و کامل دارای معانی تعریف شده بالابند.

اکنون حجم کوچکی مانند δV از سیال را در نظر می‌گیریم و موافقت می‌کنیم که δV همواره به منزله عنصری از حجم است، که با سیال حرکت می‌کند به طوری که همیشه شامل همان ذرات سیال است. به طور کلی δV با زمان تغییر می‌کند و ما می‌خواهیم که میزان این تغییر را حساب کنیم. فرض کنید که δV به صورت جعبه‌ای مکعب مستطیل شکل به ابعاد δx ، δy ، و δz باشد (شکل ۸-۴):

$$\delta V = \delta x \delta y \delta z. \quad (114-8)$$



شکل ۸-۴ یک عنصر متحرک و در حال انبساط سیال.

مؤلفه x سرعت v_x سیال ممکن است در دو وجه راست و چپ جعبه متفاوت باشد. در این صورت، δx به میزانی مساوی تفاضل بین این دو سرعت تغییر می‌کند:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x, \\ \frac{d}{dt} \delta y &= \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y, \\ \frac{d}{dt} \delta z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z. \end{aligned} \right\} \text{و به همین ترتیب} \quad (۱۱۵-۸)$$

در این صورت میزان تغییر δV نسبت به زمان عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta V &= \delta y \delta z \frac{d}{dt} \delta x + \delta x \delta z \frac{d}{dt} \delta y + \delta x \delta y \frac{d}{dt} \delta z \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z, \end{aligned}$$

و بالاخره،

$$\frac{d}{dt} \delta V = \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V. \quad (۱۱۶-۸)$$

این مشتق‌گیری چندان دقیق نیست، ولی موجب حصول بینشی به معنی دیورژانس $\nabla \cdot \mathbf{v}$ می‌شود. مشتق‌گیری را می‌توان با تعقیب دقیق کمیت‌هایی که در اینجا از آنها صرف‌نظر شده است، مثلاً بستگی v_x به y و z و نشان دادن اینکه در حد وقتی $\delta V \rightarrow 0$ ، به معادله (۱۱۶-۸) می‌رسیم، دقیق ساخت. مع‌هذا روش ساده‌تری برای اثبات دقیق‌تر معادله (۱۱۶-۸) وجود دارد. یک حجم V سیال را که از تعدادی عنصر δV به‌وجود آمده است، در نظر بگیرید:

$$V = \sum \delta V. \quad (۱۱۷-۸)$$

اگر طرف چپ معادله (۱۱۶-۸) را جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\sum \frac{d}{dt} \delta V = \frac{d}{dt} \sum \delta V = \frac{dV}{dt}. \quad (۱۱۸-۸)$$

در اینجا علامت جمع در واقع نمایشگر یک انتگرال‌گیری است زیرا می‌خواهیم به حد، یعنی وقتی $\delta V \rightarrow 0$ برسیم ولی اگر از علامت انتگرال استفاده می‌شود، عملیات جبری در معادله (۱۱۸-۸) نا آشنا به نظر می‌رسید. اکنون طرف راست معادله (۱۱۶-۸) را جمع می‌بندیم، اما این بار برای اینکه بتوانیم از قضیه دیورژانس گاوس استفاده کنیم، [معادله (۳-۱۱۵)]، به حد می‌رویم و از علامت انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sum \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV \\ &= \iint_S \hat{n} \cdot \mathbf{v} dS, \end{aligned} \quad (۱۱۹-۸)$$

که در آن K سطحی است که حجم V را دربر می‌گیرد و \hat{n} بردار یکه عمود رو به خارج است، چون $\hat{n} \cdot \mathbf{v}$ مؤلفه رو به خارج سرعت جزء سطح dS است، حجم اضافه شده به V به وسیله حرکت dS در زمان dt عبارت خواهد بود از $\hat{n} \cdot \mathbf{v} dt dS$ (شکل ۸-۵)، و بنابراین آخرین خط معادله (۸-۱۱۹)، عبارت صحیح میزان افزایش حجم است:

$$\frac{dV}{dt} = \iint_S \hat{n} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (8-120)$$

بنابراین معادله (۸-۱۱۶) باید عبارت صحیح برای میزان افزایش یک جزء حجم باشد، زیرا عبارت صحیح میزان افزایش هر حجم V را وقتی جمع بندی بر روی V انجام شود، می‌دهد. توجه کنید که اثبات، مستقل از شکل δV است. ضمناً عبارتی برای میزان تغییر یک حجم V سیال متحرک نسبت به زمان به دست آورده‌ایم:

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV. \quad (8-121)$$

اگر سیال تراکم‌ناپذیر باشد، حجم هر جزء سیال باید ثابت باقی بماند:

$$\frac{d}{dt} \delta V = 0, \quad (8-122)$$

و در نتیجه، طبق معادله (۸-۱۱۶)،

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (8-123)$$

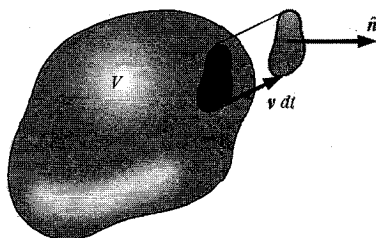
هیچ سیالی به طور مطلق تراکم‌ناپذیر نیست ولی برای بسیاری از مقاصد مایعات را می‌توان عملاً تراکم‌ناپذیر دانست به طوری که مشاهده خواهیم کرد، حتی از تراکم‌پذیری گازها غالباً می‌توان صرف‌نظر کرد.

اکنون جرم یک جزء سیال عبارت است از:

$$\delta m = \rho \delta V, \quad (8-124)$$

و این جزء، هر چند حجم و چگالی ممکن است ثابت نمانند ثابت باقی خواهد ماند.

$$\frac{d}{dt} \delta m = \frac{d}{dt} (\rho \delta V) = 0. \quad (8-125)$$



شکل ۸-۵ افزایش حجم ناشی از حرکت سطح.

با استفاده از معادله (۸-۱۱۶)، عمل مشتق‌گیری را انجام می‌دهیم:

$$\delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\delta V}{dt} = \delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V = 0,$$

یا، وقتی بر δV تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (8-126)$$

با استفاده از معادله (۸-۱۱۳)، معادله فوق را می‌توان بر حسب مشتق‌های جزئی نسبت به یک نقطه ثابت در فضا نوشت:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

با استفاده از خواص ∇ به‌عنوان علامت مشتق‌گیری می‌توان دو جمله آخر را ترکیب کرد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (8-127)$$

و این معادله پیوستگی برای حرکت ماده پیوسته است. این معادله اساساً بیان می‌کند که ماده هیچ‌جا به‌وجود نمی‌آید یا معدوم نمی‌شود، جرم δm در هر حجم δV که با سیال حرکت می‌کند، ثابت باقی می‌ماند.

در بقیه این فصل از خواص علامت ∇ که در بخش ۳-۶ به‌طور مختصر توصیف شد، استفاده مکرر خواهیم کرد. اپراتور ∇ دارای خواص جبری یک بردار است و به‌علاوه وقتی حاصل‌ضربی در کار باشد مانند یک علامت مشتق‌گیری عمل می‌کند. ساده‌ترین راه برای انجام دادن این نوع عملیات وقتی ∇ روی یک حاصل‌ضرب عمل می‌کند، این است که ابتدا مجموعی از حاصل‌ضربها بنویسیم که در هر یک از آنها فقط یک عامل برای مشتق‌گیری باشد. عاملی که باید از آن مشتق‌گیری شود ممکن است به‌وسیله خطی که در زیر آن می‌کشیم، مشخص شود. سپس با هر جمله طبق قوانین جبر برداری عمل می‌شود، مگر اینکه عاملی که خطی زیر آن است باید در پشت علامت ∇ نگه داشته شود. وقتی عاملی که خط زیر آن است، تنها عاملی است که در پشت ∇ است، یا وقتی تمام عوامل دیگر به‌وسیله پرانتز از هم جدا شده‌اند، خط زیر عامل را می‌توان حذف کرد زیرا دیگر هیچ‌گونه ابهامی در موارد اینکه کدام عامل باید به‌وسیله مؤلفه‌های ∇ مشتق‌گیری شود، وجود ندارد. به‌عنوان مثال، رابطه بین معادلات (۸-۱۲۶) و (۸-۱۲۷) به‌وسیله محاسبات زیر روشن‌تر می‌شود:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\underline{\rho} \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \underline{\mathbf{v}}) \\ &= (\nabla \underline{\rho}) \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \underline{\mathbf{v}} \\ &= (\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (8-128)$$

هر فرمولی را که بدین طریق به‌دست آید، همواره می‌توان به‌وسیله نوشتن دو طرف بر حسب مؤلفه‌ها تحقیق کرد و بر خواننده است که این عمل را چند مرتبه تکرار کند تا قانع شود. مع‌هذا استفاده از خواص ∇ معمولاً به‌کار بسیار کمتری احتیاج دارد.

اکنون می‌خواهیم میزان سیلان جرم را از درون سطح ثابت K در فضا حساب کنیم. فرض کنید dS جزئی از سطح و \hat{n} بردار یکه عمود بر dS باشد. اگر با حرکت دادن dS با فاصله $\mathbf{v} dt$ در جهت

۷-، استوانه‌ای بسازیم، در این صورت در یک زمان dt ، تمام ماده داخل این استوانه از داخل سطح dS خواهد گذشت (شکل ۸-۶). مقدار جرم واقع در این استوانه عبارت است از:

$$\rho \hat{n} \cdot \mathbf{v} dt dS,$$

که دز آن ارتفاع عمود بر سطح dS است. بنابراین میزان سیلان جرم از داخل سطح S عبارت است از:

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \rho \hat{n} \cdot \mathbf{v} dS = \iint_S \hat{n} \cdot (\rho \mathbf{v}) dS. \quad (8-129)$$

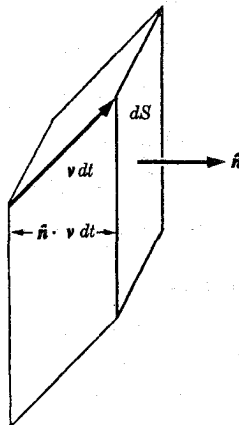
اگر $\hat{n} \cdot \mathbf{v}$ مثبت باشد، سیلان جرم از داخل سطح S در جهت \hat{n} خواهد بود. اگر $\hat{n} \cdot \mathbf{v}$ منفی باشد سیلان جرم در جهت عکس خواهد بود. مشاهده می‌کنیم که $\rho \mathbf{v}$ ، چگالی اندازه حرکت جریان جرم نیز هست بدین معنی که مؤلفه آن در هر جهتی، میزان سیلان جرم بر حسب واحد سطح در آن جهت را می‌دهد. اکنون می‌توان به وسیله انتگرال‌گیری از معادله (۸-۱۲۷) بر روی حجم ثابت V محصور در یک سطح S ، که \hat{n} بردار عمود بر آن رو به خارج است، تعبیر دیگری از آن معادله ارائه داد:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = 0. \quad (8-130)$$

چون حجم V در اینجا حجمی ثابت است می‌توان، مشتق نسبت به زمان جمله اول را به خارج انتگرال برد. اگر قضیه دیورژانس گاوس را برای انتگرال دوم به کار ببریم، می‌توانیم این معادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \hat{n} \cdot (\rho \mathbf{v}) dS. \quad (8-131)$$

این معادله مبین آن است که میزان افزایش جرم داخل حجم ثابت V برابر است با میزان سیلان جرم از داخل سطح، به طرف خارج با علامت منفی. این نتیجه بر تعبیر فیزیکی هر یک از جملات معادله (۸-۱۲۷) تأکید می‌کند. به‌ویژه، جمله دوم به‌وضوح نمایشگر میزان سیلان جرم



شکل ۸-۶ سیلان سیال از داخل یک جزء سطح.

دور شونده از هر نقطه است. به عکس اگر از معادله بدیهی (۸-۱۳۱) شروع، و واپس عمل کنیم، یک روش مستقل به دست آوردن معادله (۸-۱۲۷) را در اختیار داریم.

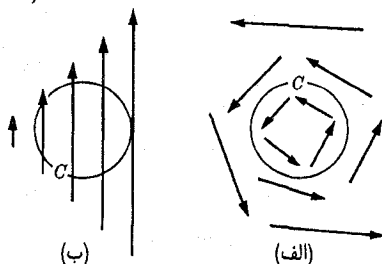
معادلات مشابه معادلات (۸-۱۲۶)، (۸-۱۲۷)، (۸-۱۲۹)، و (۸-۱۳۱) در مورد چگالی، سرعت و میزان سیلان هر کمیت فیزیکی به کار می‌روند. به عنوان مثال اگر ρ چگالی بار و ρv چگالی جریان الکتریکی باشد، معادله‌ای به شکل (۸-۱۲۷) در مورد سیلان بار الکتریکی به کار می‌رود. کرل سرعت، $(\nabla \times v)$ ، مفهومی است که در توصیف سیلان سیال مفید است. برای درک معنی آن، انتگرال مؤلفه عمود کرل v را روی یک سطح S محصور در یک منحنی C حساب می‌کنیم. طبق قضیه استوکس (۳-۱۱۷)،

$$\iint_S \hat{n} \cdot (\nabla \times v) dS = \int_C v \cdot dr, \quad (8-132)$$

که در آن انتگرال خطی روی C در جهت مثبت نسبت به بردار عمودی \hat{n} ، چنانکه در گذشته تعریف شد، گرفته شده است. اگر منحنی C گردابی را در سیال احاطه کند، به طوری که v در اطراف C به موازات dr باشد (شکل ۸-۷)، در این صورت انتگرال خطی در طرف راست مثبت است، و به معنایی میزانی است برای اندازه دوران سیال حول گرداب. بنابراین $\nabla \times v$ نوعی اندازه میزان دوران سیال بر حسب واحد سطح است و نام کرل v از اینجا نتیجه شده است. کرل v در همسایگی یک گرداب در سیال، مخالف صفر است. مع هذا کرل v ممکن است در مناطقی نیز که گردابی وجود ندارد غیر صفر باشد یعنی جایی که سیال عملاً حول نقطه‌ای نمی‌چرخد، به شرط آنکه یک گردابان سرعت عرضی وجود داشته باشد. شکل ۸-۷ هر دو حالت را نشان می‌دهد. در هر یک از دو حالت، انتگرال خطی v در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره C ، مقدار مثبتی خواهد داشت. اگر کرل v همه جا در یک سیال متحرک صفر باشد سیال را ناچرخشی^۱ می‌نامند. سیال ناچرخشی بیشتر به آن سبب مهم است که نمایشگر مسائل ریاضی نسبتاً ساده‌ای است. اگر در هر نقطه $\nabla \times v = 0$ ، در این صورت جزء سیال واقع در آن نقطه هیچ‌گونه سرعت زاویه‌ای خالصی حول آن نقطه نخواهد داشت، اگرچه ممکن است شکل و اندازه آن متغیر باشد.

با وارد کردن یک دستگاه مختصات متحرک که با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند، به معنی دقیق تری از کرل v می‌رسیم. اگر v' نمایشگر سرعت سیال نسبت به دستگاه متحرک باشد، در این صورت طبق معادله (۷-۳۳)، داریم:

$$v = v' + \omega \times r,$$



شکل ۸-۷ معنی کرل غیر صفر v .
(الف) یک گرداب، (ب) گردابان سرعت عرضی.

که در آن r برداری است از محور دوران (که مکان آن در این بحث مهم نیست.) به نقطه‌ای از سیال. اکنون کرل v عبارت است از:

$$\begin{aligned}\nabla \times v &= \nabla \times v' + \nabla \times (\omega \times r) \\ &= \nabla \times v' + \omega \nabla \cdot r - \omega \cdot \nabla r \\ &= \nabla \times v' + 3\omega - \omega \\ &= \nabla \times v' + 2\omega,\end{aligned}$$

که در آن خط دوم از معادله (۳-۳۵) برای حاصل ضرب خارجی سه گانه و خط سوم به وسیله محاسبه مستقیم مؤلفه‌ها در جملات دوم و سوم نتیجه می‌شود. اگر

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times v, \quad (8-133)$$

در این صورت

$$\nabla \times v' = 0. \quad (8-134)$$

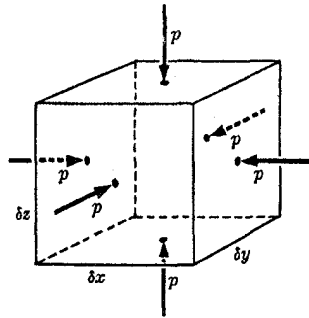
بنابراین اگر در یک نقطه P ، $\nabla \times v \neq 0$ ، در این صورت در دستگاه مختصاتی که با سرعت زاویه‌ای $\frac{1}{2} \nabla \times v$ دوران می‌کند، سیلان سیال در نقطه P غیرچرخشی است. بنابراین می‌توان $\frac{1}{2} \nabla \times v$ را به صورت سرعت زاویه‌ای سیال در نزدیکی هر نقطه تعبیر کرد. اگر $\nabla \times v$ ثابت باشد، در این صورت می‌توان دستگاه مختصات دوران‌کننده‌ای به کار وارد کرد که در آن سیلان همه جا غیرچرخشی باشد.

۷-۸ معادلات حرکت برای سیالی آرمانی

در بخشهای بعدی این فصل، جز بخش آخر، حرکت سیالی آرمانی را در نظر می‌گیریم، یعنی سیالی که در آن حتی به هنگام حرکت هیچ‌گونه تنش برشی وجود ندارد. تنش درون یک سیال آرمانی فقط شامل فشار p است. این امر در مورد سیالهای متحرک به منزله محدودیت بیشتری است تا در مورد سیالهای متعادل، (بخش ۵-۱۱) طبق تعریف، سیالات در حالت تعادل، در مقابل تنش برشی مقاومت نمی‌کنند، ولی تمام سیالها دارای چسبندگی اند، و در نتیجه همیشه تنشهایی برشی بین لایه‌های سیالی که در حرکت نسبی است، وجود دارد. سیال آرمانی نباید، چسبنده باشد. لذا نتایج ما برای سیالهای آرمانی تنها هنگامی معتبر است که چسبندگی قابل اغماض باشد.

فرض کنید که سیال علاوه بر فشار تحت تأثیر نیرویی حجمی به چگالی f بر حسب واحد حجم قرار گیرد، به طوری که نیروی حجمی وارد بر یک جزء حجم δV سیال، $f \delta V$ باشد. در این صورت احتیاج داریم که چگالی نیروی ناشی از فشار را حساب کنیم. جزء حجم $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ را به صورت جعبه‌ای مکعب مستطیل در نظر بگیرید، (شکل ۸-۸). نیروی ناشی از فشار وارد بر وجه چپ جعبه عبارت است از $p \delta y \delta z$ ، و در امتداد x عمل می‌کند. نیروی ناشی از فشار بر وجه راست جعبه نیز همان $p \delta y \delta z$ است و در جهت عکس عمل می‌کند. بنابراین مؤلفه خالص x نیروی δF_x بر جعبه به تفاضل فشار وارد بر وجه راست و چپ جعبه بستگی دارد:

$$\delta F_x = \left(- \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z. \quad (8-135)$$



شکل ۸-۸ نیروی وارد بر عنصر حجم ناشی از فشار.

می توان عبارت مشابهی برای مؤلفه های نیرو در جهات y و z به دست آورد. در این صورت نیروی کل وارد بر سیال درون جعبه بر اثر فشار عبارت است از:

$$\delta F = \left(-\hat{x} \frac{\partial p}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial p}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \delta V$$

$$= -\nabla p \delta V. \quad (۱۳۶-۸)$$

بنابراین چگالی نیروی ناشی از فشار بر حسب واحد حجم عبارت است از $-\nabla p$. این نتیجه در بخش ۵-۱۱ نیز به دست آمد، (معادله ۵-۱۷۲).

اکنون می توان معادله حرکت را برای یک جزء حجم δV از سیال نوشت:

$$\rho \delta V \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \delta V - \nabla p \delta V. \quad (۱۳۷-۸)$$

این معادله معمولاً به صورت زیر نوشته می شود:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (۱۳۸-۸)$$

با استفاده از رابطه (۸-۱۱۳)، می توان معادله فوق را بر حسب مشتقات در یک نقطه ثابت نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mathbf{f}}{\rho}, \quad (۱۳۹-۸)$$

که در آن \mathbf{f}/ρ عبارت است از نیروی حجمی بر حسب واحد جرم، و این معادله حرکت اویلر برای یک سیال متحرک است.

اگر چگالی ρ فقط به فشار p بستگی داشته باشد، سیال را همگن می نامیم. از این تعریف نتیجه نمی شود که چگالی یکنواخت است. سیالی تراکم ناپذیر در صورتی همگن است که چگالی آن یکنواخت باشد. سیالی تراکم پذیر با ترکیب شیمیایی یکنواخت که درجه حرارت همه جای آن یکنواخت باشد، همگن است. وقتی سیالی تحت تأثیر تغییرات فشار منبسط یا متراکم می شود، کار توسط سیال یا بر آن صورت می گیرد و قسمتی از این کار ممکن است به صورت گرما ظاهر شود. اگر تغییرات چگالی به اندازه کافی آهسته رخ دهد به طوری که وقت کافی برای سیلان گرما و حفظ یکنواختی درجه حرارت در سرتاسر سیال وجود داشته باشد، سیال را می توان، در حدود معنی این

تعریف همگن دانست. در این صورت رابطه بین چگالی و فشار به وسیله معادله حالت سیال یا به وسیله ضریب حجمی در دمای ثابت تعیین می‌شود (بخش (۵-۱۱)). در بعضی از حالات، چگالی چنان سریع تغییر می‌کند که زمانی برای سیلان قابل ملاحظه گرما وجود ندارد. در چنین حالاتی نیز سیال ممکن است همگن در نظر گرفته شود، و باید رابطه آدیاباتیک بین چگالی و فشار یا ضریب حجمی آدیاباتیک به کار برده شود. در حالاتی بین این دو حالات حدی، چگالی نه فقط به فشار بلکه به درجه حرارت نیز بستگی خواهد داشت، که خود به میزان سیلان گرما بین قسمتهای سیال که درجات حرارت مختلف دارند بستگی دارد.

در سیالی همگن چهار تابع مجهول وجود دارد که باید در هر نقطه فضا و زمان مشخص شوند. این توابع عبارت‌اند از: سه مؤلفه سرعت v و فشار p . با این چهار تابع چهار معادله دیفرانسیل مربوط می‌شود که باید حل کنیم و عبارت‌اند از سه مؤلفه معادله برداری حرکت، (۸-۱۳۹)، و معادله پیوستگی (۸-۱۲۷). تنها کمیت‌های دیگری که در این معادلات ظاهر می‌شوند عبارت‌اند از نیروی حجمی که داده شده فرض می‌شود و چگالی ρ که می‌توان آن را به صورت تابعی از فشار بیان کرد. البته معادلات (۸-۱۳۹) و (۸-۱۲۷) دارای جوابهای بسیار متنوعی هستند. در یک مسئله به خصوص، احتیاج داریم شرایط مرزی ناحیه‌ای را که سیال در آن حرکت می‌کند و مقادیر توابع v و p را در یک لحظه اولیه بدانیم. در بخشهای بعدی، توجه خود را به سیالهای همگن معطوف خواهیم کرد. در حالت واسطی که در انتهای بند قبل ذکر شد و در آن سیال غیرهمگن است و چگالی به فشار و درجه حرارت بستگی دارد، تابع مجهول دیگری نیز داریم که درجه حرارت است و معادله دیگری لازم داریم که توسط قانون سیلان گرما تعیین شده باشد. اگرچه در بسیاری از مسائل این حالت خیلی مهم است ولی ما در اینجا آن را در نظر نخواهیم گرفت.

۸-۸ قوانین بقا برای حرکت سیال

از آنجا که قوانین حرکت سیال از قوانین حرکت نیوتن به دست می‌آیند، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که تعمیمهای مناسبی از قوانین بقای اندازه حرکت و انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای برای حرکت سیال نیز برقرار باشد. قبلاً مثالی از قانون بقا برای حرکت سیال داشتیم و آن معادله پیوستگی (معادله (۸-۱۲۷) یا (۸-۱۳۱)) بود، که قانون بقای جرم را بیان می‌کند. در مکانیک ذره‌ای نیز جرم بقا دارد ولی ما لازم نمی‌دانیم که معادله‌ای برای بیان این امر بنویسیم.

قانون بقا در مکانیک سیالات را می‌توان به شکلهای معادل فراوانی نوشت. برای اینکه معنی فیزیکی گزاره‌های ریاضی مختلف موجود را روشن تر درک کنیم، بررسی بعضی از آنها در اینجا آموزنده است. فرض کنید ρ چگالی هر کمیت فیزیکی مانند جرم یا اندازه حرکت، یا انرژی یا اندازه حرکت زاویه‌ای باشد. در این صورت ساده‌ترین شکل قانون بقا برای این کمیت، معادله (۸-۱۲۵) خواهد بود که بنابر آن مقدار این کمیت در یک جزء δV از سیال ثابت باقی می‌ماند. اگر کمیت موردنظر به میزان Q بر حسب واحد حجم تولید شود، در این صورت

معادله (۸-۱۲۵) باید تعمیم داده شود:

$$\frac{d}{dt}(\rho \delta V) = Q \delta V. \quad (8-140)$$

غالباً معادله فوق را قانون بقا برای کمیت ρ می نامند. قانون بقا این برداشت را به ما می دهد که از کجا کمیت ρ می آید و به کجا می رود. طبق این قانون، این کمیت به میزان Q بر حسب واحد حجم در سیال ظاهر می شود و اگر Q منفی باشد، به این میزان ناپدید می گردد. این حال به مفهومی که در فصل ۴ به کار برده شد مگر در صورتی که $Q = 0$ ، نباید قانون بقا نامیده شود. به وسیله روشی درست مانند آنچه منجر به معادله (۸-۱۲۷) شد، می توان معادله (۸-۱۴۰) را به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نوشت:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = Q. \quad (8-141)$$

این شاید مفیدترین شکل قانون بقا باشد. معنی جملات معادله فوق را می توان به وسیله انتگرال گیری هر جمله روی حجم ثابت V و با به کار بردن قضیه گاوس^۱ مانند روش به دست آوردن معادله (۸-۱۳۱) بهتر نمایان کرد:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV + \iint_S \hat{n} \cdot \mathbf{v} \rho dS = \iiint_V Q dV. \quad (8-142)$$

بنابه بحث قبل از معادله (۸-۱۲۹)، معادله فوق بیان می کند که میزان افزایش کمیت در داخل V به اضافه میزان سیلان رو به خارج از درون محدوده δ ، برابر است با میزان پدید آمدن کمیت از منابع داخل V . شکل دیگر قانون بقا که بعضی اوقات مفید است، به وسیله جمع کردن معادله (۸-۱۴۰) در سراسر حجم V که با سیال حرکت می کند، به دست می آید:

$$\sum \frac{d}{dt}(\rho \delta V) = \frac{d}{dt} \sum \rho \delta V = \sum Q \delta V. \quad (8-143)$$

اگر به حد $\delta V \rightarrow 0$ نزدیک شویم، مجموع به صورت انتگرال در می آید:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V Q dV. \quad (8-144)$$

انتگرال سطح که در طرف چپ معادله (۸-۱۴۲) ظاهر می شود، در معادله (۸-۱۴۴) ظاهر نمی گردد. چون حجم V با سیال حرکت می کند هیچ گونه سیلانی از درون کرانه آن به عمل نمی آید. چون معادلات (۸-۱۴۰)، (۸-۱۴۱)، (۸-۱۴۲)، و (۸-۱۴۴) همگی معادل اند، کافی است که قانون بقایی در یکی از این شکلها به دست آوریم. در این صورت قوانین دیگر نیز از آن نتیجه می شوند. معمولاً ساده ترین راه این است که از معادله حرکت (۸-۱۳۸) شروع کنیم و معادله ای به شکل (۸-۱۴۰) به دست آوریم. همچنین می توان از معادله (۸-۱۳۹) شروع کرد و معادله بقایی به شکل (۸-۱۴۱) به دست آورد ولی معمولاً عملیات بیشتری لازم است.

۱. اگر ρ ، همان طور که در حالت چگالی اندازه حرکت خطی و زاویه ای، یک بردار باشد، یک شکل تعمیم یافته قضیه گاوس [که در بخش ۵-۱۱ در رابطه با معادله (۵-۱۷۸) ذکر شد] باید به کار رود.

برای اینکه قانون بقایی برای اندازه حرکت خطی به دست آوریم، اول توجه می‌کنیم که اندازه حرکت در یک جزء حجم δV عبارت است از $\rho v \delta V$. بنابراین چگالی اندازه حرکت نسبت به واحد حجم عبارت است از ρv ، و این کمیت همان نقشی را بازی می‌کند که ρ در بحث بند قبلی به عهده داشت. برای اینکه معادله‌ای مشابه معادله (۸-۱۴۰) به دست آوریم، از معادله حرکت به شکل (۸-۱۳۸) شروع می‌کنیم، که به نقطه‌ای که با سیال حرکت می‌کند مربوط می‌شود، و آن را در حجم δV که جزء کوچکی از سیال است، ضرب می‌کنیم:

$$\rho \delta V \frac{dv}{dt} + \nabla p \delta V = f \delta V. \quad (8-145)$$

چون $\rho \delta V = \delta m$ ثابت است، می‌توان آن را در مشتق زمانی قرار داد:

$$\frac{d}{dt}(\rho v \delta V) = (f - \nabla p) \delta V. \quad (8-146)$$

اندازه حرکت یک جزء سیال، به خلاف جرم آن به طور کلی ثابت نیست. بنابراین معادله میزان تغییر اندازه حرکت یک جزء سیال متحرک نسبت به زمان برابر است با مجموع نیروی حجمی و نیروی ناشی از فشار وارد بر آن. در اینجا کمیت $f - \nabla p$ نقش Q در بحث کلی قبل را به عهده دارد. معادله (۸-۱۴۶) را می‌توان به یکی از شکلهای (۸-۱۴۱)، (۸-۱۴۲)، و (۸-۱۴۴) نوشت. به عنوان مثال، می‌توان آن را به شکل (۸-۱۴۴) نوشت:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v dV = \iiint_V f dV - \iiint_V \nabla p dV. \quad (8-147)$$

اکنون می‌توان شکل تعمیم یافته قضیه گاوس [معادله (۵-۱۷۸)] را برای جمله دوم طرف راست به کار برد و رابطه زیر را به دست آورد:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v dV = \iiint_V f dV + \iint_S -\hat{n} p dS, \quad (8-148)$$

که در آن S سطحی است که حجم V را محصور کرده است.

این معادله بیان می‌کند که میزان تغییر اندازه حرکت خطی کل نسبت به زمان در یک حجم V از سیال متحرک مساوی است با نیروی خارجی کل وارد بر آن. این نتیجه، تعمیم مستقیمی است از قضیه اندازه حرکت خطی (۴-۷) برای دستگاهی از ذرات، نیروهای داخلی در یک سیال، به وسیله فشار درون سیال نمایش داده می‌شوند. از طریق کاربرد قضیه گاوس، فشار درون حجم V را حذف کرده و فقط فشار خارجی بر سطح V را در نظر گرفته‌ایم. ممکن است سؤال شود که چگونه بی‌استفاده صریح از قانون سوم نیوتن، نیروهای داخلی را حذف کرده‌ایم زیرا معادله (۸-۱۳۸) که آغاز کارمان بود فقط بیان دو قانون اول نیوتن است. جواب این است که مفهوم فشار خود به طور ضمنی شامل قانون سوم نیوتن است زیرا نیروی ناشی از فشار وارد از چپ به راست از ورای هر جزء سطح با نیروی وارد از طرف راست به چپ از ورای همان جزء سطح برابر و مختلف‌الجهت است. به علاوه نقاط عمل این دو نیرو مشترک‌اند که همان سطح آن جزء است. هر دو نیرو به ضرورت

دارای خط عملی مشترک اند و هیچ‌گونه تمایزی بین صورت قوی و ضعیف قانون سوم نیوتن وجود ندارد. بنابراین همچنین انتظار می‌رود که فشارهای داخلی در معادلهٔ میزان تغییر اندازهٔ حرکت زاویه‌ای نسبت به زمان نیز از بین بروند. تذکر مشابهی در مورد نیروهای ناشی از هرگونه تنش در یک سیال یا یک جامد، صادق است. قانون سوم نیوتن به صورت قوی، به طور ضمنی در مفهوم تنش گنجانده شده است.

معادلات نمایشگر بقای اندازهٔ حرکت زاویه‌ای را که جمله به جمله با معادلات (۸-۱۴۰) تا (۸-۱۴۴) مشابه‌اند، می‌توان به وسیلهٔ تشکیل حاصل ضرب خارجی بردار \mathbf{r} با معادلهٔ (۸-۱۳۸) یا (۸-۱۳۹) و انجام عملیات مناسب به دست آورد. در اینجا بردار \mathbf{r} برداری است با مبدأیی که گشتاورها حول آن باید حساب شوند و نه هر نقطه در سیال متحرک یا در فضا. این عملیات به صورت تمرین به عهدهٔ خواننده است. قانون بقای اندازهٔ حرکت زاویه‌ای حاکم بر گردابهایی است که با خروج مایعی از سوراخ کوچکی در ته منبعی، به وجود می‌آیند. تنها نیروی حجمی در اینجا نیروی ثقل است که گشتاوری حول سوراخ ایجاد نمی‌کند و می‌توان نشان داد که اگر فشار ثابت باشد یا فقط به عمق قائم بستگی داشته باشد، مؤلفهٔ قائم خالص گشتاور - نیرو ناشی از فشار روی هر سطح بسته‌ای وجود نخواهد داشت. بنابراین اندازهٔ حرکت زاویه‌ای هر قسمت از سیال ثابت باقی می‌ماند. اگر یک جزء از سیال از ابتدا دارای اندازهٔ حرکت زاویه‌ای باشد، سرعت زاویه‌ای آن باید وقتی در فاصله‌ای از سوراخ قرار گرفته است، به تناسب معکوس با مربع فاصله از سوراخ افزایش یابد تا وقتی به سوراخ نزدیک می‌شود، اندازهٔ حرکت زاویه‌ای آن ثابت باقی بماند. برای اینکه معادلهٔ بقای انرژی برای انرژی به دست آوریم، حاصل ضرب داخلی \mathbf{v} را با معادلهٔ (۸-۱۴۶) تشکیل می‌دهیم،

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \rho v^2 \delta V \right) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} - \nabla p) \delta V. \quad (8-149)$$

این همان قضیهٔ انرژی برای شکل (۸-۱۴۰) است. به عوض چگالی ρ ، در این جا چگالی انرژی جنبشی یعنی $\frac{1}{2} \rho v^2$ را داریم. میزان تولید انرژی جنبشی بر حسب واحد حجم عبارت است از:

$$Q = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} - \nabla p). \quad (8-150)$$

همانند روشی که در مکانیک ذره‌ای اختیار کرده بودیم، اکنون سعی می‌کنیم که صورتهای جدید انرژی را چنان تعریف کنیم که تا آنجا که ممکن است شامل جملات طرف راست معادلهٔ (۸-۱۴۹) در مشتق زمانی در طرف چپ باشد. می‌توان با استفاده از معادلات (۸-۱۱۳) و (۸-۱۱۶)، جملهٔ دوم طرف راست را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (p \delta V) &= \frac{dp}{dt} \delta V + p \frac{d\delta V}{dt} \\ &= \frac{\partial p}{\partial t} \delta V + \mathbf{v} \cdot \nabla p \delta V + p \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V, \end{aligned} \quad (8-151)$$

به طوری که

$$-\mathbf{v} \cdot \nabla p \delta V = -\frac{d}{dt} (p \delta V) + \frac{\partial p}{\partial t} \delta V + p \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V. \quad (8-152)$$

اکنون فرض می‌کنیم که نیروی حجمی f ، نیرویی ثقلی باشد:

$$f = \rho g = \rho \nabla \mathcal{G}, \quad (153-8)$$

که در آن \mathcal{G} پتانسیل ثقل (معادله ۶-۱۶) است، یعنی انرژی پتانسیل با علامت منفی بر حسب واحد جرم ناشی از ثقل. در این صورت جمله اول طرف راست معادله (۸-۱۴۹) عبارت است از:

$$\begin{aligned} v \cdot f \delta V &= (v \cdot \nabla \mathcal{G}) \rho \delta V = \left(\frac{d\mathcal{G}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right) \rho \delta V \\ &= \frac{d}{dt} (\rho \mathcal{G} \delta V) - \rho \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \delta V, \end{aligned} \quad (154-8)$$

زیرا $\rho \delta V = \delta m$ ثابت است. معادله (۸-۱۴۹) را می‌توان با کمک معادلات (۸-۱۵۲) و (۸-۱۵۴)، به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \rho v^2 + p - \rho \mathcal{G} \right) \delta V \right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right) \delta V + p \nabla \cdot v \delta V. \quad (155-8)$$

در اینجا فشار p نقش نوعی چگالی انرژی پتانسیل را ایفا می‌کند که گرادیان منفی آن به چگالی نیروی ناشی از فشار (معادله ۸-۱۳۶) منجر می‌شود. مجموع میزان تغییر انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ثقل و انرژی پتانسیل ناشی از فشار نسبت به زمان برابر است با عبارت طرف راست معادله (۸-۱۵۵).

معمولاً میدان ثقل در یک نقطه ثابت از فضا با زمان تغییر نمی‌کند (بجز شاید در موارد استعمال در حرکات ابرهای گازی در مسائل نجومی). اگر در هر نقطه از فضا فشار هم ثابت باشد، در این صورت جمله اول طرف راست از بین می‌رود. اهمیت جمله دوم چیست؟ برای سیالی تراکم‌ناپذیر $\nabla \cdot v = 0$ و جمله دوم نیز از بین می‌رود. بنابراین ما حدس می‌زنیم که جمله دوم نمایشگر انرژی وابسته به تراکم و انبساط جزء δV سیال باشد و می‌خواهیم این گمان خود را به وسیله محاسبه کار انجام شده در تغییر حجم جزء δV ، امتحان کنیم. کار dW انجام شده توسط جزء δV سیال، بر اثر فشاری که سیال به هنگام انبساط به اندازه $d \delta V$ بر سیال محیط وارد می‌کند، عبارت است از:

$$dW = p d \delta V. \quad (156-8)$$

طبق معادله (۸-۱۱۶)، میزانی که در آن انرژی در اثر انبساط جزء سیال به وجود می‌آید، عبارت است از:

$$\frac{dW}{dt} = p \frac{d \delta V}{dt} = p \nabla \cdot v \delta V, \quad (157-8)$$

که درست همان جمله آخر معادله (۸-۱۵۵) است. تا اینجا تمام معادلات بقا برای هر مسئله که شامل سیالی آرمانی باشد، معتبرند. اگر خود را به سیالهای همگن، یعنی سیالهایی که چگالی آنها فقط بستگی به فشار دارد محدود کنیم، می‌توانیم انرژی پتانسیلی وابسته به انبساط و انقباض جزء δV سیال تعریف کنیم. ما انرژی پتانسیل $u \delta m$ روی جزء δV سیال را به صورت کار منفی انجام شده توسط فشار آن بر سیال محیط، وقتی فشار از فشار معیار p به هر فشار p تغییر می‌کند،

تعریف خواهیم کرد. در این صورت انرژی پتانسیل بر حسب واحد جرم u تابعی از p خواهد بود:

$$u \delta m = - \int_p^p p d\delta V. \quad (158-8)$$

حجم $\delta V = \delta m / \rho$ تابعی از فشار است و می توان آن را به صورت های مختلف نوشت:

$$\begin{aligned} u &= \int_p^p \frac{p d\rho}{\rho^2} \\ &= \int_p^p \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} dp \\ &= \int_p^p \frac{p}{\rho B} dp, \end{aligned} \quad (159-8)$$

که در آن در آخرین تساوی، از ضریب حجمی (معادله ۵-۱۱۶) استفاده شده است. طبق معادلات (۱۵۸-۸) یا (۱۵۹-۸) و (۱۱۶-۸)، میزان تغییر u نسبت به زمان عبارت است از:

$$\frac{d(u \delta m)}{dt} = \frac{-p d\delta V}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V. \quad (160-8)$$

اکنون می توان جمله آخر طرف راست معادله (۱۵۵-۸) را تحت علامت مشتق زمانی طرف چپ نوشت:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \rho v^2 + p - \rho \mathcal{G} + \rho u \right) \delta V \right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right) \delta V. \quad (161-8)$$

تعبیر این معادله از بحث قبلی روشن است. آن را می توان به هر یک از صور (۸-۱۴۱)، (۸-۱۴۲) و (۸-۱۴۴) نوشت.

اگر p و \mathcal{G} در هر نقطه معینی از فضا ثابت باشند، مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل یک جزء سیال، در حین حرکت، ثابت باقی می ماند. مناسب تر است که آن را بر $\delta m = \rho \delta V$ بخش کنیم تا جزء حجم از بین برود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{\gamma} + \frac{p}{\rho} - \mathcal{G} + u \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}. \quad (162-8)$$

این قضیه برنولی^۱ است، جمله $\partial \mathcal{G} / \partial t$ عملاً همواره صفر است و آن را فقط برای روشن ساختن معنی جمله $(1/\rho) (\partial p / \partial t)$ که نقش مشابهی بازی می کند و همیشه صفر نیست، نگه داشته ایم. وقتی هر دو جمله طرف راست، چنانکه در حالت سیلان دائم صفرند، برای نقطه ای که با سیال حرکت می کند داریم،

$$\frac{v^2}{\gamma} + \frac{p}{\rho} - \mathcal{G} + u = \text{ثابت}. \quad (163-8)$$

به شرط برابر بودن دیگر جنبه‌ها یعنی اگر u ، \mathcal{G} ، و ρ ثابت باشند، فشار سیال متحرک با افزایش سرعت کم می‌شود. ρ و u برای سیال تراکم‌ناپذیر الزاماً ثابت‌اند.

قوانین بقای اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای نه تنها برای سیالهای آرمانی صادق است بلکه همچنین وقتی به‌طور مناسبی به زبان ریاضی بیان شده باشند در مورد سیالهای چسبنده و حتی جامدات نیز با در نظر گرفتن تذکرات داده شده در بالا در مورد قانون سوم نیوتن و مفهوم تنش، اعتبار دارند. مع‌هذا، قانون بقای انرژی (۸-۱۶۲) در مورد سیالهای چسبنده به کار نمی‌رود. مگر در صورتی که تبدیل مکانیکی انرژی به گرما، به وسیله اصطکاک چسبندگی در قانون منظور شده باشد، زیرا چسبندگی ناشی از اصطکاک داخلی است که باعث تلف شدن انرژیهای جنبشی و پتانسیل می‌گردد.

۸-۹ سیلان دائم

منظور از سیلان دائم یک سیال حرکتی از سیال است که در آن تمام کمیت‌های وابسته به سیال مثل سرعت، چگالی، فشار، و چگالی نیرو و غیره در هر نقطه از فضا نسبت به زمان ثابت باشند. در مورد سیلان دائم، تمام مشتق‌های جزئی نسبت به زمان را می‌توان مساوی صفر قرار داد. مشتق کامل نسبت به زمان که نمایشگر میزان تغییر کمیتی نسبت به یک نقطه متحرک با سیال است، در حالت کلی صفر نخواهد بود، بلکه طبق معادله (۸-۱۱۳) عبارت خواهد بود از:

$$\frac{d}{dt} = v \cdot \nabla. \quad (8-114)$$

مسیر طی شده به وسیله هر جزء سیال را خط جریان نامند. خط جریان خطی است که در هر نقطه (x, y, z) به موازات سرعت $v(x, y, z)$ در آن نقطه است. تمام فضایی را که سیال در داخل آن سیلان می‌کند، می‌توان با خطوط جریان چنان پر کرد که از هر نقطه یک و فقط یک خط جریان عبور کند. اگر در امتداد هر خط جریان یک مختصه s در نظر بگیریم که نمایشگر فاصله اندازه‌گیری شده از یک نقطه ثابت در امتداد خط جریان باشد، در این صورت هر کمیت وابسته به سیال را می‌توان به صورت تابعی از s در امتداد خط جریان در نظر گرفت. مؤلفه ∇ در امتداد خط جریان در هر نقطه، d/ds است و این نکته هنگامی واضح است که دستگاه مختصاتی اختیار کنیم که محور x آن در آن نقطه در امتداد خط جریان باشد. در نتیجه معادله (۸-۱۶۴) را می‌توان به صورت زیر باز نوشت:

$$\frac{d}{dt} = v \frac{d}{ds}. \quad (8-115)$$

این معادله همچنین از این حقیقت که $v = ds/dt$ بدیهی است. به عنوان مثال در مورد سیلان دائم، معادله (۸-۱۶۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \mathcal{G} + u \right) = 0. \quad (8-116)$$

در این صورت کمیت داخل پرانتز در طول یک خط جریان ثابت است.

در مورد سیلان دائم، معادله پیوستگی (۸-۱۲۷) به این صورت درمی‌آید:

$$\nabla \cdot (\rho v) = 0. \quad (8-117)$$

اگر از این معادله در سراسر حجم ثابت V انتگرال بگیریم و قضیهٔ گاوس را به کار ببریم، داریم

$$\iiint_S \hat{n} \cdot (\rho v) dS = 0, \quad (۱۶۸-۸)$$

که در آن S سطح بسته‌ای است که V را احاطه می‌کند. این معادله فقط بیان آن است که جرم کل جاری شده از هر سطح بسته صفر است.

اگر تمام خطوط جریانی را که از ورای هر سطح (S باز) S می‌گذرند، در نظر بگیریم، این خطوط جریان لوله‌ای را تشکیل می‌دهند، که یک لولهٔ سیلان نامیده می‌شود (شکل ۸-۹)، دیوارهای یک لولهٔ سیلان همه جا با خطوط جریان موازی‌اند، به طوری که هیچ سیالی نه به آن وارد و نه از آن خارج می‌شود. سطح S که همه جا عمود بر خطوط جریان رسم می‌شود و هر یک از خطوط جریان لولهٔ سیلان از داخل آن می‌گذرد، سطح مقطع لوله نامیده می‌شود. اگر معادلهٔ (۱۶۸-۸) را در مورد سطح بسته‌ای به کار ببریم که به وسیلهٔ دیوارهای یک لولهٔ سیلان و دو سطح مقطع S_1 و S_2 محصور شده باشد، در این صورت چون \hat{n} روی دیوارهای لوله بر v عمود است و روی سطح مقطع با آن موازی یا ضد موازی است، داریم:

$$\iint_{S_1} \rho v dS - \iint_{S_2} \rho v dS = 0, \quad (۱۶۹-۸)$$

یا

$$\iint_S \rho v dS = I = \text{ثابت}, \quad (۱۷۰-۸)$$

که در آن S هر سطح مقطعی در امتداد یک لولهٔ سیلان مفروض است. ثابت I را جریان سیال داخل لوله می‌نامند.

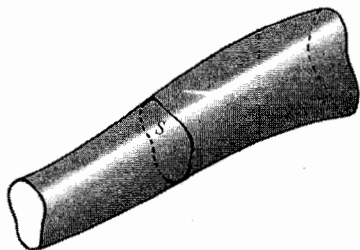
در حالت سیلان دائم، معادلهٔ بقای انرژی (۱۶۱-۸)، وقتی به صورت (۱۴۱-۸) نوشته شود، به صورت زیر درمی‌آید

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\gamma} \rho v^2 + p - \rho \mathcal{G} + \rho u \right) v \right] = 0. \quad (۱۷۱-۸)$$

این معادله با معادلهٔ (۱۶۷-۸) هم شکل است و بنابراین می‌توان به همان نحو نتیجه گرفت که جریان انرژی هر سطح مقطع S از یک لولهٔ سیلان یکسان است:

$$\iint_S \left(\frac{1}{\gamma} \rho v^2 + p - \rho \mathcal{G} + \rho u \right) v dS = \text{ثابت}. \quad (۱۷۲-۸)$$

این نتیجه به نزدیکی با معادلهٔ (۱۶۶-۸) مربوط می‌شود.



شکل ۸-۹ لولهٔ سیلان.

اگر سیلان نه فقط دائم بلکه غیرچرخشی نیز باشد، در این صورت همه جا

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (173-8)$$

این معادله از نظر شکل مشابه معادله (۳-۱۸۹) برای یک نیروی کنسرواتیو است و مانند بخش ۳-۱۲ می‌توان نشان داد که اگر معادله (۱۷۳-۸) برقرار باشد، امکان دارد یک تابع پتانسیل سرعت $\phi(x, y, z)$ به وسیله معادله زیر تعریف کنیم.

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{r_s}^{\mathbf{r}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad (174-8)$$

که در آن r_s هر نقطه ثابتی است. در این صورت سرعت در هر نقطه عبارت خواهد بود از:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi. \quad (175-8)$$

اگر معادله فوق را در معادله (۸-۱۶۷) جایگزین کنیم، معادله‌ای خواهیم داشت که می‌توان ϕ را از آن به دست آورد

$$\nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = 0. \quad (176-8)$$

در حالاتی که معمولاً مورد بررسی قرار می‌گیرند، سیال را می‌توان غیرقابل تراکم در نظر گرفت و در نتیجه معادله فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (177-8)$$

این معادله از نظر شکل همانند معادله لاپلاس (۶-۳۵) برای پتانسیل ثقل در فضای خالی است. بنابراین روشهای نظریه پتانسیل را می‌توان برای حل مسائلی که شامل سیلان غیرچرخشی سیالی تراکم‌ناپذیر است، به کار برد.

۸-۱۰ امواج صوتی

فرض کنید که سیالی ساکن با فشار p و چگالی ρ تحت تأثیر نیروی حجمی f که طی زمان ثابت است، در حال تعادل باشد. در این صورت معادله (۸-۱۳۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{f}{\rho}. \quad (178-8)$$

می‌توان ملاحظه کرد که این معادله با معادله (۵-۱۷۲) که در بخش (۵-۱۱) برای سیالی متعادل به دست آمد، توافق دارد. اکنون فرض کنید که سیال تحت تأثیر اختلال کوچکی قرار گرفته است به طوری که فشار و چگالی در هر نقطه آن عبارت‌اند از:

$$p = p_0 + p', \quad (179-8)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (180-8)$$

که در آن $p' \ll p$ و $\rho' \ll \rho$. فرض می‌کنیم که v سرعت منتجه و مشتق آن نسبت به زمان و مکان، در همه جا خیلی کوچک باشد. اگر معادلات (۸-۱۷۹) و (۸-۱۸۰) را در معادله حرکت (۸-۱۳۹) جایگزین کنیم و از توانهای بالاتر از توان اول p' ، ρ' ، و v و مشتقهایشان صرف‌نظر و از معادله (۸-۱۷۸) استفاده کنیم، معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'. \quad (181-8)$$

با جایگزینی مشابهی در معادله (۸-۱۲۷)، معادله زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot v - v \cdot \nabla \rho_0. \quad (182-8)$$

فرض کنید که چگالی تعادل ρ یکنواخت یا تقریباً یکنواخت باشد، به طوری که $\nabla \rho$ صفر یا خیلی کوچک و جمله دوم قابل اغماض باشد.

طبق معادله (۵-۱۸۳)، نمو فشار p' و نمو چگالی ρ' به وسیله ضریب حجمی بهم مربوط می شوند:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{B}. \quad (۸-۱۸۳)$$

از این معادله می توان برای حذف p' یا ρ' از معادلات (۸-۱۸۱) و (۸-۱۸۲) استفاده کرد. ρ' را از معادله (۸-۱۸۲) حذف می کنیم:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -B \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (۸-۱۸۴)$$

معادلات (۸-۱۸۱) و (۸-۱۸۴) معادلات دیفرانسیل اساسی امواج صوتی اند. تشابه شکل این معادله با معادله (۸-۱۰۱) برای امواج یک بعدی واضح است. در اینجا نیز دو کمیت p' و v داریم که مشتق زمانی هر یک از آنها متناسب است با مشتقات نسبت به مکان دیگری. در واقع اگر $v_x = \hat{x} v_x$ و اگر p'_x و p' فقط توابعی از x باشند، در این صورت معادلات (۸-۱۸۱) و (۸-۱۸۴) به معادلات (۸-۱۰۱) تبدیل می شوند.

همانند بحث بخش (۵-۸)، می توانیم v یا p' را از این معادلات حذف کنیم. برای حذف v ، دیورژانس معادله (۸-۱۸۱) را تشکیل می دهیم و ترتیب مشتق گیری را عوض می کنیم و این بار نیز فرض می کنیم که ρ تقریباً یکنواخت است:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p'. \quad (۸-۱۸۵)$$

اکنون از معادله (۸-۱۸۴) نسبت به t مشتق می گیریم و از معادله (۵-۱۸۵) استفاده می کنیم:

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0, \quad (۸-۱۸۶)$$

که در آن

$$c = \left(\frac{B}{\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (۸-۱۸۷)$$

اکنون نشان می دهیم که این معادله سه بعدی موج است. فرمول (۸-۱۸۷) تندی امواج صوتی، اولین بار به وسیله اسحاق نیوتن به دست آمد و در مورد مایعات یا گازها صادق است. برای گازهای نیوتن فرض کرد که ضریب حجمی در دمای ثابت $B = p$ باید به کار رود ولی در این صورت معادله (۸-۱۸۷) با مقادیر تجربی برای تندی صوت توافق ندارد. ارتعاشهای صوتی به قدری سریع اند که آنها را باید به صورت آدیاباتیک در نظر گرفت و ضریب حجمی آدیاباتیک $B = \gamma p$ باید به کار رود، که در آن γ نسبت گرمای ویژه در فشار ثابت به گرمای ویژه در حجم ثابت است. در این صورت فرمول (۸-۱۸۷) با مقادیر تجربی c توافق دارد. اگر با عملی مشابه p' را حذف کنیم معادله موجی برای v به دست می آوریم:

$$\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = 0. \quad (۸-۱۸۸)$$

در به دست آوردن معادله (۸-۱۸۸)، لازم است از این حقیقت که $\nabla \times (\nabla \times v) = 0$ ، استفاده شود. از معادله (۸-۱۸۱) نتیجه می‌شود که $\nabla \times v$ در همه حال مستقل از زمان است و در نتیجه آن قسمتی از v که تابعی از زمان است و در موج صوتی ظاهر می‌شود، غیرچرخشی است. [می‌توانستیم سیلان دائمی کوچکی با $\nabla \times v \neq 0$ به موج صوتی اضافه کنیم بی‌آنکه صحت معادلات (۸-۱۸۱) و (۸-۱۸۲) را بهم زده باشیم.]

برای اینکه نشان دهیم معادله (۸-۱۸۶) به امواج صوتی که با تندی c حرکت می‌کنند منجر می‌شود، ابتدا توجه می‌کنیم که اگر p' فقط تابعی از x و t باشد، معادله (۸-۱۸۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \quad (۸-۱۸۹)$$

معادله فوق با معادله یک‌بعدی موج (۸-۶) هم‌شکل است لذا جوابهایی به صورت زیر دارد:

$$p' = f(x - ct). \quad (۸-۱۹۰)$$

این را یک موج تخت می‌نامند زیرا در هر زمان t ، فاز $x - ct$ و فشار p' در امتداد هر صفحه $(x = \text{یک ثابت})$ موازی صفحه yz ، ثابت‌اند. یک موج تخت که در جهت بردار یکه \hat{n} حرکت می‌کند، به وسیله معادله زیر داده می‌شود:

$$p' = f(\hat{n} \cdot r - ct), \quad (۸-۱۹۱)$$

که در آن r بردار مکانی از مبدأ تا هر نقطه‌ای از فضا است. برای اینکه ببینیم که این موجی در جهت \hat{n} است، دستگاه مختصات را می‌چرخانیم تا آنکه محور x آن در این جهت قرار گیرد و در این حالت، معادله (۸-۱۹۱) به معادله (۸-۱۹۰) تبدیل می‌شود. اکنون صفحات $f = \text{ثابت}$ ، در هر لحظه t بر \hat{n} عمودند و با تندی c در جهت \hat{n} حرکت می‌کنند. از این استدلال نتیجه می‌شود که جواب (۸-۱۹۱) باید در معادله (۸-۱۸۶) صدق کند یا می‌توان این موضوع را با محاسبه مستقیم برای هر دستگاه مختصاتی، تحقیق کرد:

$$\nabla p' = \frac{df}{d\xi} \nabla \xi = \frac{df}{d\xi} \hat{n}, \quad (۸-۱۹۲)$$

که در آن

$$\xi = \hat{n} \cdot r - ct, \quad (۸-۱۹۳)$$

و به همین ترتیب

$$\nabla^2 p' = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \hat{n} \cdot \nabla \xi = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \hat{n} \cdot \hat{n} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad (۸-۱۹۴)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad (۸-۱۹۵)$$

به طوری که تابع $f(\xi)$ هر چه باشد، معادله (۸-۱۸۶) برقرار است.

معادله (۸-۱۸۸) دارای جوابهای موج تخت

$$v = h(\hat{n}' \cdot r - ct), \quad (۸-۱۹۶)$$

به امواجی که با سرعت c در جهت \hat{n}' حرکت می‌کند، نیز مربوط هست، که در آن تابعی برداری است از $\xi' = \hat{n}' \cdot \mathbf{r} - ct$. برای هر موج فشار مفروضی به صورت (۸-۱۹۱) موج سرعتی به صورت (۸-۱۹۶) وجود دارد که به وسیله معادلات (۸-۱۸۱) و (۸-۱۸۲) به آن مربوط می‌شود. اگر $\partial v / \partial t$ را از معادله (۸-۱۹۶) و $\nabla p'$ را از معادله (۸-۱۹۱) حساب کنیم و در معادله (۸-۱۸۱) جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{dh}{d\xi'} = \frac{\hat{n}}{(B\rho_0)^{1/2}} \frac{df}{d\xi'} \quad (8-197)$$

معادله (۸-۱۹۷) باید در تمام نقاط \mathbf{r} و در تمام زمانهای t برقرار باشد. طرف راست این معادله، تابعی است از ξ' و برای یک ξ' ثابت، ثابت است. در نتیجه وقتی ξ' ثابت است، طرف چپ معادله نیز باید ثابت باشد، و باید فقط تابعی از ξ' باشد و این متضمن آن است که $\xi' = \xi''$ (یا لاقابل ξ'' تابعی از ξ' باشد)، و بنابراین $\hat{n}' = \hat{n}$ است. از نظر فیزیکی واضح است که موج سرعت باید در همان جهت موج فشار حرکت کند. اکنون می‌توان $\xi' = \xi''$ گرفت و \mathbf{h} را از معادله (۸-۱۹۷) به دست آورد:

$$\mathbf{h} = \frac{\hat{n}}{(B\rho_0)^{1/2}} f, \quad (8-198)$$

که در آن ضریب ثابت جمع‌شونده صفر است زیرا p' و v در ناحیه‌ای که اختلالی وجود نداشته باشد صفرند. معادلات (۸-۱۹۸)، (۸-۱۹۶)، و (۸-۱۹۰) متضمن آن‌اند که برای موج صوتی تختی که در جهت \hat{n} حرکت می‌کند، نمو فشار و سرعت به وسیله معادله زیر بهم مربوط می‌شوند:

$$v = \frac{p'}{(B\rho_0)^{1/2}} \hat{n}, \quad (8-199)$$

که البته در اینجا v سرعت ذره سیال است نه سرعت موج که $c\hat{n}$ است. سرعت ذرات سیال در امتداد جهت انتشار موج صوتی است، به طوری که امواج صوتی در یک سیال، طولی‌اند. این مطلب ناشی از این است، که سیال در برابر هیچ‌گونه تنش برشی مقاومت نمی‌کند حال آنکه این مطلب در مورد امواج صوتی در جامدات که می‌توانند عرضی یا طولی باشند، صادق نیست. یک موج تخت که به طور هارمونیک با فرکانس زاویه‌ای ω در زمان نوسان می‌کند ممکن است به صورت زیر نوشته شود:

$$p' = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \text{Re} A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (8-200)$$

که در آن بردار موج، \mathbf{k} ، به وسیله رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \hat{n}. \quad (8-201)$$

اگر سطحی را در نظر بگیریم که بر \hat{n} ، که با عبور موج همراه سیال به عقب و جلو حرکت می‌کند، عمود باشد، کار انجام شده به وسیله فشار روی این سطح در جهت فشار بر حسب واحد سطح و واحد زمان عبارت است از:

$$P = p v. \quad (8-202)$$

اگر مقدار متوسط نوسان v ، صفر باشد، در این صورت چون $p = p_0 + p'$ (که در آن p_0 ثابت است) توان متوسط عبارت خواهد بود از:

$$P_{av} = \langle p'v \rangle_{av} = \frac{\langle p'^2 \rangle_{av}}{(\rho_0 B)^{1/2}}, \quad (203-8)$$

که در آن از معادله (۸-۱۹۹) استفاده شده است. مقدار انرژی بر واحد سطح بر حسب ثانیه که در جهت \hat{n} حرکت می‌کند از این معادله به دست می‌آید.

معادله سه بعدی موج، (۸-۱۸۶)، دارای جوابهای بسیار دیگری است که به امواج مختلف الشکلی مربوط می‌شود که جبهه‌های موج (سطوحی که دارای فاز ثابت‌اند) آنها شکلهای مختلفی دارند، و در جهات مختلف حرکت می‌کنند. به عنوان مثال، موجی کروی در نظر می‌گیریم که از مبدأ حرکت می‌کند. میزان سیلان انرژی متناسب است با p'^2 (قسمت کوچکی از موج کروی را می‌توان تخت در نظر گرفت) و انتظار داریم که بنا به قانون بقای انرژی، سیلان انرژی بر حسب واحد سطح باید متناسب با مربع معکوس فاصله از مبدأ کم شود. بنابراین p' باید با فاصله از مبدأ نسبت عکس داشته باشد بنابراین به امتحان کردن موجی به صورت زیر رهنمون می‌شویم.

$$p' = \frac{1}{r} f(r - ct). \quad (204-8)$$

این نمایشگر موجی است که به طور دلخواه به زمان بستگی دارد و جبهه‌های موج آن، $ct = r = \xi = \text{ثابت}$ ، کراتی هستند که با سرعت c گسترش می‌یابند. با محاسبه مستقیم و با استفاده از مختصات دکارتی یا کروی و با کمک معادله (۳-۱۲۴) به سادگی می‌توان نشان داد که جواب (۸-۲۰۴) در معادله موج (۸-۱۸۶) صدق می‌کند.

اگر سعی کنیم معادلات سیلان انرژی و جرم را که در دو بخش قبلی به دست آوردیم برای موج صوتی به کار ببریم، در گسترش فوق با مشکل کوچکی مواجه خواهیم شد. طبق معادلات (۸-۱۹۹) و (۸-۱۸۰) و (۸-۱۸۳)، میزان سیلان جرم بر حسب واحد سطح در واحد ثانیه عبارت است از:

$$\rho v = \rho_0 \left(1 + \frac{p'}{B} \right) \frac{p'}{(\rho_0 B)^{1/2}} \hat{n}.$$

باید انتظار داشته باشیم که ρv کمیتی نوسانی باشد که مقدار متوسط آن برای یک موج صوتی صفر است زیرا سیال نباید به طور خالص سیلان داشته باشد. اگر از رابطه فوق میانگین بگیریم، خواهیم داشت:

$$\langle \rho v \rangle_{av} = \frac{\rho_0^{1/2}}{B^{3/2}} \left(\langle p'^2 \rangle_{av} + B \langle p' \rangle_{av} \right) \hat{n},$$

به طوری که سیلان خالص کوچکی از سیال در جهت موج وجود دارد مگر اینکه

$$\langle p' \rangle_{av} = - \frac{\langle p'^2 \rangle_{av}}{B}. \quad (205-8)$$

اگر معادله (۸-۲۰۵) برقرار باشد به طوری که سیلان خالصی از سیال وجود نداشته باشد، در این صورت می‌توان نشان داد که چگالی جریان انرژی که به وسیله معادله (۸-۱۶۱) داده می‌شود، به طور متوسط تا

جملاتی که p' و v در آنها از درجه دوم اند برای یک موج صوتی عبارت است از:

$$\left\langle \left(\frac{1}{\rho} \rho v^2 + p - \rho g + \rho u \right) v \right\rangle_{av} = \frac{\langle p'^2 \rangle_{av}}{(\rho \cdot B)^{1/2}} \hat{n}, \quad (206-8)$$

که با معادله (۲۰۳-۸) توافق دارد. وقتی در معادلات حرکت تقریب به کار می رود، انتظار داریم که جوابها در قوانین بقا فقط تا همان درجه تقریب صدق کنند. با اضافه کردن جملات درجه دوم (یا بالاتر)، مانند (۲۰۵-۸) به یک جواب مرتبه اول، البته می توان قوانین بقا را تا جملات درجه دوم (یا بالاتر) برقرار کرد.

۱۱-۸ ارتعاشات طبیعی سیال در یک جعبه مکعب مستطیل

مسئله ارتعاشات سیالی که در درون جعبه ای صلب محدود است نه تنها از نظر کاربردهای آن در مسائل صوتی، بلکه همچنین از این نظر که روشهای به کار برده شده را در مورد مسائل ارتعاشات الکترومغناطیسی و ارتعاشات جامدات الاستیک (کشور) و مکانیک موج و تمام پدیده های دیگر فیزیک که به وسیله معادلات موج توصیف می شوند نیز می توان به کار برد، جالب است. در این بخش، سیالی را در نظر می گیریم که در جعبه مکعب مستطیلی به ابعاد L_x, L_y, L_z محصور شده است. اینجا نیز مانند حل معادله یک بعدی موج بخش ۸-۲ عمل می کنیم. ابتدا فرض می کنیم که یک جواب معادله (۱۸۶-۸) به صورت زیر باشد:

$$p' = U(x, y, z) \Theta(t). \quad (207-8)$$

اگر این جواب را در معادله (۱۸۶-۸) جایگزین کنیم، معادله زیر به دست می آید:

$$\frac{1}{U} \nabla^2 U = \frac{1}{c^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2}. \quad (208-8)$$

در اینجا نیز استدلال می کنیم که چون طرف چپ معادله فقط به x, y, z و طرف راست معادله فقط به t بستگی دارد، هر دو باید مساوی مقدار ثابتی باشند که آن را $-\omega^2/c^2$ می نامیم:

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \omega^2 \Theta = 0, \quad (209-8)$$

$$\nabla^2 U + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0. \quad (210-8)$$

جواب معادله (۲۰۹-۸) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Theta = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (211-8)$$

یا

$$\Theta = A e^{-i\omega t}, \quad (212-8)$$

که در آن A و B ثابت اند. رابطه (۲۱۲-۸) به امواج متحرکی به شکل معادله (۲۰۰-۸) منجر می شود. در اینجا نظر ما متوجه امواج ایستاده است، لذا شکل معادله (۲۱۱-۸) را

اختیار می‌کنیم. برای حل معادله (۸-۲۱۰)، این بار نیز از روش جدا کردن متغیرها استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم که

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (۲۱۳-۸)$$

اگر معادله فوق را در معادله (۸-۲۱۰) جایگزین کنیم، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}. \quad (۲۱۴-۸)$$

این معادله برای تمام مقادیر x, y, z فقط هنگامی معتبر است که هر جمله طرف چپ معادله ثابت باشد. این ثابتها را به ترتیب $-k_x^2, -k_y^2, -k_z^2$ می‌نامیم، و در نتیجه

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0, \quad (۲۱۵-۸)$$

که در آن

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (۲۱۶-۸)$$

جوابهای معادلات (۸-۲۱۵) که مورد علاقه ما است، عبارت‌اند از:

$$X = C_x \cos k_x x + D_x \sin k_x x,$$

$$Y = C_y \cos k_y y + D_y \sin k_y y, \quad (۲۱۷-۸)$$

$$Z = C_z \cos k_z z + D_z \sin k_z z,$$

اگر برای X, Y, Z ، و Θ جوابهای نمایی مختلط اختیار کنیم، به جواب موج متحرک (۸-۲۰۰) می‌رسیم، که در آن k_x, k_y ، و k_z مؤلفه‌های بردار موج k هستند.

اکنون باید شرایط مرزی مناسبی تعیین کنیم که در مورد دیوارهای جعبه که ما آنها را شش صفحه به معادلات $x = L_x, x = 0, y = L_y, y = 0, z = L_z, z = 0$ خواهیم گرفت به کار برده شوند. بدیهی است که شرط مرزی این است که مؤلفه سرعت عمود بر دیوار باید در دیوار صفر شود. مثلاً در دیوار $x = 0$ باید صفر شود. طبق معادله (۸-۱۸۱) داریم:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (۲۱۸-۸)$$

با جایگزین کردن معادلات (۸-۲۰۷)، (۸-۲۱۱)، (۸-۲۱۳)، و (۸-۲۱۷) برای p' خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{k_x YZ}{\rho} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) (-C_x \sin k_x x + D_x \cos k_x x). \quad (۲۱۹-۸)$$

اگر انتگرال بگیریم داریم:

$$v_x = -\frac{k_x YZ}{\omega \rho} (A \sin \omega t - B \cos \omega t) (-C_x \sin k_x x + D_x \cos k_x x). \quad (۲۲۰-۸)$$

به اضافه تابعی از x, y ، و z که صفر می‌شود زیرا ما در پی جوابهای نوسانی هستیم. برای اینکه v_x به یقین در $x = 0$ صفر شود، باید $D_x = 0$ ، یعنی برای X در معادله (۸-۲۱۷) جواب کسینوس را انتخاب کنیم. این به آن معنی است که فشار p' باید در دیوار با حداکثر دامنه نوسان کند. این نکته

شاید از نظر فیزیکی واضح باشد و ممکن بود به جای شرط $v_x = 0$ که هر چند از نظر فیزیکی بدیهی تر به نظر می‌رسد، به کار رود. مؤلفه سرعت عمود بر یک دیوار باید در دیوار دارای گره، و نیز فشار باید دارای شکم باشد. به همین ترتیب، فشار باید در دیوار $x = L_x$ شکم (یعنی حداکثر دامنه نوسان) داشته باشد:

$$\cos k_x L_x = \pm 1, \quad (221-8)$$

به طوری که

$$k_x = \frac{l\pi}{L_x}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (222-8)$$

با منظور کردن ملاحظات مشابه برای دیواره‌های دیگر، نتیجه می‌شود که $D_y = D_z = 0$ و

$$k_y = \frac{m\pi}{L_y}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (223-8)$$

$$k_z = \frac{n\pi}{L_z}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

برای هر مجموعه انتخابی از سه عدد صحیح l, m, n ، یک وجه طبیعی ارتعاش سیال داخل جعبه وجود دارد. فرکانسهای وجوه طبیعی ارتعاش به وسیله معادلات (۲۱۶-۸)، (۲۲۲-۸)، و (۲۲۳-۸) داده می‌شوند:

$$\omega_{lmn} = \pi c \left(\frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right)^{1/2}. \quad (224-8)$$

سه عدد صحیح l, m, n و همه ممکن نیست صفر باشند، زیرا در این صورت $\omega = 0$ و مربوط به ارتعاش سیال نمی‌شد. اگر این نتایج را با معادلات (۲۱۷-۸)، (۲۱۳-۸)، (۲۱۱-۸)، و (۲۰۷-۸) ترکیب کنیم، برای وجه طبیعی ارتعاشی که به وسیله اعداد l, m, n مشخص می‌شود، داریم:

$$p' = (A \cos \omega_{lmn} t + B \sin \omega_{lmn} t) \cos \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos \frac{n\pi z}{L_z}, \quad (225-8)$$

که در آن ثابت بی‌فایده $C_x C_y C_z$ را حذف کرده‌ایم، سرعت‌های مربوط عبارت‌اند از:

$$v_x = \frac{l\pi}{L_x \rho \cdot \omega_{lmn}} (A \sin \omega_{lmn} t - B \cos \omega_{lmn} t) \sin \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos \frac{n\pi z}{L_z},$$

$$v_y = \frac{m\pi}{L_y \rho \cdot \omega_{lmn}} (A \sin \omega_{lmn} t - B \cos \omega_{lmn} t) \cos \frac{l\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_y} \cos \frac{n\pi z}{L_z}, \quad (226-8)$$

$$v_z = \frac{n\pi}{L_z \rho \cdot \omega_{lmn}} (A \sin \omega_{lmn} t - B \cos \omega_{lmn} t) \cos \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \sin \frac{n\pi z}{L_z}.$$

این چهار معادله حاوی توصیف کاملی از حرکت سیال برای یک وجه طبیعی ارتعاش‌اند. دیواره‌های $x = L_x$ ، $x = 0$ و $(l-1)$ صفحه موازی و متساوی‌فاصله بین آنها، برای v_x گره و برای v_y, v_z, p' شکم‌اند، تذکرات مشابهی می‌توان در مورد صفحات گره‌ای موازی دیواره‌های دیگر، داد.

مشاهده خواهد شد که فرکانسهای طبیعی در حالت کلی، مانند حالت ریسمان مرتعش به طور هارمونیک بهم مربوط نمی‌شوند، مع‌هذا اگر یکی از ابعاد، مثلاً l ، بسیار بزرگتر از دو بعد دیگر باشد، به طوری که جعبه به صورت لوله مربع طولی درآید، در این صورت کمترین فرکانس، مربوط به حالتی می‌شود که $m = n = 0$ و l عدد صحیح کوچکی باشد و این فرکانسها به طور هارمونیک بهم مربوط می‌شوند. بنابراین در یک لوله، چند فرکانس طبیعی اول که بالاتر از کمترین فرکانس‌اند، مضاربی از کوچکترین فرکانس خواهند بود. این توضیحی است که چرا امکان دارد الحان موسیقی از یک لوله ارگ چنانکه از یک تار مرتعش، حاصل شود. در اینجا روش حل ما فقط در مورد یک لوله ارگ بسته، آن هم یک لوله مربع، صادق است. روش حل لوله بسته مدورالقاعد، چندان مشکل‌تر از روش فوق نیست، و ماهیت کلی نتایج مشابه است. لکن حل دقیق لوله سر باز به مراتب مشکل‌تر است. اشکال در تعیین شرط مرزی در انتهای باز لوله است. در واقع مشکل‌ترین کار، تعیین محل مرز نیست. به‌عنوان یک تقریب کلی، می‌توان فرض کرد که مرز، صفحه مسطحی در انتهای لوله است و این سطح یک گره فشار است. در این صورت نتایج با نتایجی که برای لوله بسته به دست آوردیم مشابه خواهد بود، بجز آنکه اگر یک انتهای لوله طولی بسته و انتهای دیگر آن باز باشد، چند فرکانس اول بالای پایین‌ترین فرکانس، همگی مضارب فردی از کمترین فرکانس‌اند.

جواب عام معادلات ارتعاشات صوتی در حفره مستطیل را می‌توان مانند حالت ریسمان مرتعش به وسیله جمع کردن جوابهای طبیعی از نوع (۸-۲۲۵) برای تمام وجوه طبیعی ارتعاش، به دست آورد. ثابتهای A و B هر وجه ارتعاش را باز می‌توان طوری اختیار کرد که با شرایط اولیه، که در این حالت تعیین p' و $\partial p' / \partial t$ (یا p' و v) در تمام نقاط داخل حفره در یک لحظه اولیه خواهد بود، سازگار باشد. اما این بسط را اینجا ارائه نمی‌دهیم. [در بحث فوق، حالت $l = m = n = 0$ را که به نمو ثابت فشار p' مربوط می‌شود، حذف کرده‌ایم. همین‌طور، جوابهای سرعت دائمی $v(x, y, z)$ را که با زمان نوسان نمی‌کنند حذف کردیم. این جوابها برای سازگار بودن با تمام شرایط اولیه باید منظور شوند.]

برای حفره‌هایی که دارای اشکال ساده دیگری، مانند کره یا استوانه‌اند، روش حل جدا کردن متغیرها که در مثالهای فوق به کار رفت قابل استفاده است. ولی در این حالات، به جای متغیرهای x ، y ، و z باید مختصات مناسب با شکل سطح مرزی، مثلاً مختصات کروی یا استوانه‌ای به کار روند. روش جدا کردن متغیرها را در اکثر حالات، مگر برای چند شکل ساده، نمی‌توان به کار برد. وقتی شکل حفره‌ای به یکی از اشکال ساده که جوابش معلوم است بسیار نزدیک باشد، می‌توان از روشهای تقریب استفاده کرد و گرنه تنها روشهای عمومی حل، روشهای عددی‌اند که معمولاً مستلزم محاسبات بسیاری است که کار را غیرعملی می‌سازد. مع‌هذا می‌توان نشان داد که خصوصیات کلی نتایج ما برای حفره‌های مکعب مستطیل شکل، برای تمام شکلها معتبر است بدین معنی که وجوه ارتعاش طبیعی با فرکانسهای مشخصه وجود دارند، و عمومی‌ترین حرکت نیز مجموعی از اینها است.

۱۲-۸ امواج صوتی در لوله‌ها

مسئله انتشار امواج صوتی در لوله‌ها، مسئله‌ای است که اهمیت بسیار دارد. لوله‌ای را در نظر خواهیم گرفت که محور آن در امتداد z است و سطح مقطع آن مستطیلی است به ابعاد $L_x L_y$. این مسئله همان مسئله بخش قبلی است با این تفاوت که در اینجا دیواره‌هایی وجود ندارد که بر محور z عمود باشند.

اینجا نیز همان روش حل را به کار می‌بریم، زیرا تنها تفاوت در این است که حالا شرایط مرزی فقط در مورد چهار دیوار $x=0$ ، $x=L_x$ ، $y=0$ ، و $y=L_y$ صادق است. بنابراین در انتخاب توابع $X(x)$ و $Y(y)$ محدودیم. درست همان‌طور که در بخش قبلی، به معادلات (۸-۲۲۲)، (۸-۲۲۳) محدود بودیم. ولی هیچ‌گونه محدودیتی در انتخاب جواب معادله Z ، یعنی (۸-۲۱۵) وجود ندارد. چون جوابهایی مورد نظر ماست که نمایشگر انتشار امواج در طول لوله‌اند، شکل نمایی جواب را برای Z اختیار می‌کنیم:

$$Z = e^{ik_z z}, \quad (۸-۲۲۷)$$

و جواب نمایی مختلط (۸-۲۱۲) را برای Θ اختیار می‌کنیم. در این صورت برای مجموعه داده شده‌ای از اعداد صحیح l و m جواب p' عبارت است از:

$$\begin{aligned} p' &= \operatorname{Re} A e^{i(k_z z - \omega t)} \cos \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \\ &= A \cos \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos(k_z z - \omega t). \end{aligned} \quad (۸-۲۲۸)$$

این معادله نمایشگر موجی هارمونیک است که در امتداد z در طول لوله حرکت می‌کند و دامنه آن روی سطح مقطع لوله طبق دو عامل اول کسینوسی، متغیر است. هر مجموعه‌ای از اعداد صحیح l و m به وجه انتشار در لوله مربوط می‌شود. (در اینجا مجموعه انتخاب $l=0$ و $m=0$ مجموعه‌ای مجاز است). برای l و m مفروض و فرکانس داده شده ω ، عدد موج k_z به وسیله معادلات (۸-۲۱۶)، (۸-۲۲۲)، و (۸-۲۲۳) معین می‌شود:

$$k_z = \pm \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{l\pi}{L_x} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (۸-۲۲۹)$$

علامت مثبت به موجی مربوط می‌شود که در جهت مثبت محور z حرکت می‌کند و به عکس. برای $l=m=0$ ، معادله فوق همان رابطه (۸-۲۰۱) برای موجی است که با سرعت c در امتداد z سیالی که فضایی سه بعدی را پر کرده باشد، حرکت می‌کند. در غیر این صورت موج با سرعت

$$c_{lm} = \frac{\omega}{|k_z|} = c \left[1 - \left(\frac{l\pi c}{\omega L_x} \right)^2 - \left(\frac{m\pi c}{\omega L_y} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (۸-۲۳۰)$$

حرکت می‌کند که از c بزرگتر است و به ω بستگی دارد. واضح است که فرکانس حداقلی وجود دارد

$$\omega_{lm} = \left[\left(\frac{l\pi c}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{m\pi c}{L_y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (۸-۲۳۱)$$

که پایین‌تر از آن امکان هیچ‌گونه انتشاری در وجه m و l وجود ندارد، زیرا k_z مجازی و نمای

معادله (۲۲۷-۸)، حقیقی خواهد بود، به طوری که به عوض انتشار موج، کاهش‌ی نمایی در دامنه موج در امتداد z خواهیم داشت. به تشابه بین این نتایج و نتایج به دست آمده در بخش ۸-۴ برای ریسمان دانه‌دانه توجه کنید. هر چند که در آن حالت به عوض آنکه از پایین محدود شود از بالا محدود می‌شد. چون c_{lm} به ω بستگی دارد، در اینجا نیز پدیده پاشیدگی وجود دارد. موجی به شکل دلخواه که ممکن است به مؤلفه‌های نوسان‌کننده سینوسی با فرکانسهای مختلف ω تجزیه شود، ضمن حرکت در امتداد لوله، تغییر شکل پیدا خواهد کرد، زیرا هر مؤلفه، سرعت متفاوتی خواهد داشت. محاسبه سرعت سیال v ، و سیلان توان مربوط به موج، یعنی معادله (۲۲۸-۸) را به عنوان تمرین به عهده خواننده می‌گذاریم.

نتایج مشابهی برای لوله‌هایی که دارای مقاطعی غیرمستطیل باشند، به دست می‌آید. روشها و نتایج مشابه برای مسئله انتشار امواج الکترومغناطیسی در امتداد لوله‌های موج به کار می‌روند. این یکی از دلایل علاقه ما به مسئله فعلی است.

۸-۱۳ سرعت گروهی

بنا به فرمول (۲۳۰-۸) وقتی فرکانس ω برابر فرکانس حداقل ω_{lm} برای وجه l و m است، سرعت c_{lm} بی نهایت می‌شود. نگرانی از این نتیجه تعجب آور کمتر می‌شود، اگر توجه کنیم که c_{lm} سرعتی است که تحت آن مدل موجی (۲۲۸-۸) در لوله حرکت می‌کند. ذرات سیال به یقین با این سرعت حرکت نمی‌کنند؛ این را می‌توان به آسانی توجیه کرد (مسئله ۲۳ را ملاحظه کنید). این حقیقت که فشار در هر نقطه در سیال با همان فرکانس و فازی نوسان می‌کند که مدل فشاری با سرعت c_{lm} در لوله حرکت می‌کند، بیانگر آن نیست که چیزی فیزیکی وجود دارد که با این سرعت حرکت می‌کند. دانستن سرعتی که تحت آن امواج صوتی می‌توانند انرژی یا اندازه حرکت را در لوله حمل کنند، یا سرعت نوعی علامت که بتواند اطلاعات در لوله حمل کند، مورد علاقه است. واضح است که موج هارمونیکی (۲۲۸-۸) که بر حسب z از $-\infty$ تا $+\infty$ به طور یکنواخت ادامه دارد، نمی‌تواند به تنهایی اطلاعاتی حمل کند، زیرا هرگز در حال تغییر نیست. برای اینکه اطلاعات حمل کند، موج باید به طریقی تغییر کند. تصور کنید که یک منبع امواج صوتی برای مدت زمان متناهی در یک انتهای لوله امواجی تولید می‌کند که در لوله به سمت گیرنده‌ای که در انتهای دیگر است، حرکت می‌کند. بسته موج یا گروه موج می‌تواند اطلاعات و انرژی و اندازه حرکت از منبع صوتی به گیرنده حمل کند. اکنون این سؤال مطرح است که با چه سرعتی گروهی از امواج حرکت خواهد کرد.

برای جلوگیری از مشکلات جبری غیراساسی، در حال حاضر از وابستگی فشار به x و y صرف نظر کرده و فرض می‌کنیم که امواجی داریم

$$p'(z, t) = A \cos(kz - \omega t), \quad (232-8)$$

که می‌توانند در جهت z حرکت کنند و $\omega(k)$ تابع داده شده‌ای از k است، که در حال حاضر به وسیله معادلات (۲۱۶-۸) یا (۲۲۹-۸)، وقتی $k = k_z$ ، داده می‌شود. وابستگی به x و y در معادله (۲۲۸-۸) تحت تابع مشخصی است که مستقل از z و t است و می‌تواند بعداً درج شود.

برای پیدا کردن جوابی که در آن دامنه موج (۸-۲۳۲) به طریقی تغییر کرده باشد، سعی می‌کنیم جوابی را پیدا کنیم که برای آن در $t = 0$ موج عبارت باشد از:

$$p'(z, 0) = F(z) \cos kz, \quad (۲۳۳-۸)$$

که در آن $F(z)$ تابعی است محدود شده به ناحیه متناهی در امتداد محور z همان‌گونه که در شکل ۸-۱۰ نشان داده شده است. علاوه بر این، فرض خواهیم کرد که تابع $F(z)$ تابعی با تغییرات آهسته در z در مقایسه با تابع $\cos kz$ است که به نسبت دارای تغییرات متعدد است.

برای اینکه از سری فوریه استفاده کنیم، فرض می‌کنیم که لوله دارای طول متناهی L است، ولی مع‌هذا به اندازه کافی طویل است که در طول زمان موردنظر، لازم نیست که نگران دو انتهای لوله باشیم. اکنون می‌توانیم تابع $F(z)$ را به صورت یک سری فوریه مانند معادله (۸-۲۴) بنویسیم:

$$F(z) = \sum_n F_n \sin k_n z, \quad (۲۳۴-۸)$$

که در آن

$$k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (۲۳۵-۸)$$

اگر تابع $F(z)$ به‌طور آهسته تغییر کند، همان‌طوری که فرض کرده‌ایم، ضرایب F_n یا صفر خواهند بود یا به‌طور قابل اغماض کوچک مگر $k_n \ll k$. موج فشاری (۸-۲۳۳) در $t = 0$ را اکنون می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p'(z, 0) = \sum_n F_n \sin k_n z \cos kz \\ = \sum_n \frac{1}{2} F_n \{ \sin [(k + k_n)z] - \sin [(k - k_n)z] \}. \quad (۲۳۶-۸)$$

اکنون توجه می‌کنیم که با روی هم گذاشتن امواج از نوع (۸-۲۳۲)، می‌توانیم جوابی بنویسیم که شکل موردنظر (۸-۲۳۶) را در $t = 0$ داشته باشد:

$$p'(z, t) = \sum_n \frac{1}{2} F_n \{ \sin [(k + k_n)z - \omega_{n+}t] - \sin [(k - k_n)z - \omega_{n-}t] \}, \quad (۲۳۷-۸)$$

که در آن

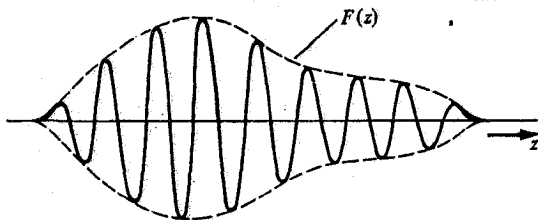
$$\omega_{n+} = \omega (k + k_n), \quad \omega_{n-} = \omega (k - k_n). \quad (۲۳۸-۸)$$

این توابع را به شکل سری توانی بر حسب k_n بسط می‌دهیم

$$\omega_{n\pm} = \omega (k \pm k_n) = \omega \pm k_n v_g + \dots, \quad (۲۳۹-۸)$$

که در آن $\omega = \omega(k)$ و به اختصار نوشته‌ایم

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (۲۴۰-۸)$$



شکل ۸-۱۰ یک بسته موج $F(z) \cos kz$.

کمیت v_g دارای ابعاد یک سرعت است. آشکار خواهد شد که این سرعتی است که تحت آن گروه موج در لوله حرکت می‌کند، و در نتیجه سرعت گروهی نامیده می‌شود. فرض خواهیم کرد که k_n به اندازه کافی کوچک است که می‌توانیم از تمام جملات بجز دو جمله اول معادله (۸-۲۳۹) صرف‌نظر کنیم. می‌توانیم بنویسیم

$$\sin [(k \pm k_n)z - \omega_{n \pm} t] \doteq \sin(kz - \omega t) \cos[k_n(z - v_g t)] \pm \cos(kz - \omega t) \sin[k_n(z - v_g t)].$$

این را در معادله (۸-۲۳۷) قرار می‌دهیم و با استفاده از معادله (۸-۲۳۴) معادله زیر را به دست می‌آوریم

$$p'(z, t) \doteq \cos(kz - \omega t) \sum_n F_n \sin[k_n(z - v_g t)] \\ = F(z - v_g t) \cos(kz - \omega t), \quad (8-241)$$

بنابراین جوابی تقریبی به دست آورده‌ایم که متشکل است از بسته‌ای از امواج به شکل (۸-۲۳۲) تغییرپذیر شده توسط تابع دامنه‌ای $F(z - v_g t)$ که در لوله با سرعت گروهی v_g حرکت می‌کند. توجه کنید که مدل موجی درون بسته با سرعت فازی $c_{lm} = \omega/k$ حرکت می‌کند. در حالت امواج صوتی در لوله‌ای با سطح مقطع مستطیلی، سرعت گروهی داده شده به وسیله معادلات (۸-۲۴۰)، (۸-۲۱۶)، (۸-۲۲۲)، و (۸-۲۲۳) عبارت است از:

$$v_g = ck \left[k^2 + \left(\frac{l\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c}{c_{lm}}. \quad (8-242)$$

ملاحظه می‌کنیم که سرعت گروهی در این حالت همواره کمتر از سرعت فازی c_{lm} است و در فرکانس حداقل ω_{lm} ، صفر می‌شود.

تقریبی که با صرف‌نظر کردن جملات مرتبه بالا در معادله (۸-۲۳۹) به کار گرفتیم موجه است به شرط آنکه تابع $F(z)$ به اندازه کافی به طور آهسته چنان تغییر کند که تنها امواج سینوسی با طول موج طویل در سری فوریه (۸-۲۳۴) مورد نیاز باشند، آنچنان که تابع $\omega(k)$ را بتوان با خطی مستقیم روی ناحیه‌ای به اندازه $\pm k_n$ از k برای هر مقدار مورد نیاز k_n در بسط، تقریب زد. اگر جملات مرتبه بالاتر در معادله (۸-۲۳۹) وارد شوند، پس از مدت زمانی کافی ضریب دامنه‌ای $F(z - v_g t)$ شروع به تغییر شکل می‌کند.

توجه کنید که بحث بالا در رابطه با ریسمان جدا که در بخش ۴-۸ بحث شده، و به وسیله معادلات (۸-۷۳) و (۸-۷۶) جوابهای موجی هم پیدا کرده که در آن فرکانس ω تابعی از k است، نیز مورد نظر خواهد بود. پدیده‌های فیزیکی فراوانی وجود دارند که در آنها امواجی رخ می‌دهند که سرعتشان وابسته به فرکانس یا شماره موجی است. در چنین حالاتی بسته‌های موج می‌توانند تشکیل شوند که با سرعت گروهی v_g معادله (۸-۲۴۰) حرکت می‌کنند. به آسانی می‌توان توجیه کرد که سرعت گروهی متفاوت خواهد بود با سرعت فازی $c = \omega/k$ مگر c مستقل از فرکانس یا طول موج باشد.

فرض کنید که می‌خواهیم دو مسئله را در سیلان سیال در نظر بگیریم که از نظر هندسی، مرزهای

مشابهی دارند، ولی ابعاد مرزها، یا سرعت یا چگالی یا تراکم پذیری سیال در آنها مختلف باشد. به عنوان مثال ممکن است بخواهیم سیلان سیالی را در دو لوله هم شکل، که اندازه های مختلف دارند، بررسی کنیم یا ممکن است سیلان سیال در سرعت های مختلف درون لوله های هم شکل یا سیلان سیالهایی که چگالیهای مختلف دارد مورد نظر باشد. ممکن است به رابطه موجود بین رفتار یک هواپیما با ماکت همان هواپیما، یا رفتار هواپیما در ارتفاع های مختلف، که چگالی هوا متفاوت است، علاقمند باشیم. مسائلی را که شامل مرزهای هم شکل اند مسائل مشابه می نامیم. می خواهیم بدانیم که تحت چه شرایطی دو مسئله مشابه دارای جواب های مشابه خواهند بود؟

برای اینکه این سؤال را دقیق تر بیان کنیم فرض کنید که برای هر مسئله فاصله مشخص s ، تعریف شده باشد، که مقیاس هندسی مسئله را مشخص می کند. در مورد لوله های مشابه، s ممکن است قطری از لوله باشد و در مورد هواپیما، ممکن است فاصله دو سر بالها باشد. در این صورت مختصات بی بعد x' ، y' ، و z' را به وسیله معادلات زیر تعریف می کنیم

$$x' = \frac{x}{s}, \quad y' = \frac{y}{s}, \quad z' = \frac{z}{s}. \quad (243-8)$$

مرزهای دو مسئله مشابه، دارای مشخصاتی یکسان برحسب مختصات بی بعد x' ، y' ، و z' خواهند بود، فقط فاصله مشخص s در آنها متفاوت خواهد بود. به همین ترتیب تندی مشخصی مانند v وابسته به مسئله فرض می کنیم. تندی v ممکن است تندی متوسط سیلان سیال در یک لوله یا تندی هواپیما نسبت به هوای ساکن در فاصله ای از آن یا بزرگترین تندی هر قسمت از سیال نسبت به لوله یا هواپیما باشد. در هر حال فرض می کنیم v چنان اختیار شده باشد که بزرگترین تندی هر قسمت از سیال بسیار بزرگتر از v نباشد. اکنون یک سرعت بی بعد v' و یک مختصه زمان بی بعد t' را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$v' = \frac{v}{v_0}, \quad (244-8)$$

$$t' = \frac{v_0 t}{s}. \quad (245-8)$$

اکنون می گوئیم که دو مسئله مشابه دارای جواب های مشابه اند، در صورتی که جوابها هرگاه برحسب سرعت بی بعد v' به صورت تابعی از x' ، y' ، z' ، و t' بیان شوند، یکسان باشند. در این صورت الگوی سیلان سیال در هر دو مسئله یکی، و تفاوت آنها فقط در مقیاسهای فاصله و زمان که به وسیله s و v تعیین می شوند، خواهد بود. همچنین باید چگالی مشخص ρ و فشار p را فرض کنیم. در مورد هواپیما، اینها چگالی و فشار جو بی اختلال، و در مورد لوله، ممکن است چگالی متوسط و فشار، یا چگالی و فشار در یک انتهای لوله باشند. یک نمو فشار بی بعد p'' را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$p'' = \frac{p - p_0}{\rho_0 v_0^2}. \quad (246-8)$$

اکنون فرض می کنیم که تغییرات چگالی سیال آنقدر کوچک است که می توان رابطه زیر را

نوشت:

$$\rho = \rho_0 + \frac{d\rho}{dp}(p - p_0), \quad (247-8)$$

که در آن از جمله‌های مرتبه بالاتر سری تیلور برای ρ صرف‌نظر شده است. با به کار بردن تعریف (۲۴۶-۸) برای p'' ، ضریب حجمی B که به وسیله معادله (۵-۱۸۳) داده شده است، می‌توان معادله فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\rho = \rho_0 (1 + M^2 p''), \quad (248-8)$$

که در آن

$$M = v_0 \left(\frac{B}{\rho_0} \right)^{-1/2} = \frac{v_0}{c}. \quad (249-8)$$

در اینجا M نسبت بین سرعت مشخص v_0 به سرعت صوت c است و آن را عدد ماخ برای این مسئله می‌نامند.

با کمک معادله (۲۴۸-۸) می‌توان معادله پیوستگی و معادله حرکت را برحسب متغیرهای بی‌بعدی که به وسیله معادلات (۸-۲۴۳) تا (۸-۲۴۶) تعریف شدند، نوشت. اگر معادله پیوستگی (۸-۱۲۷) را بر ثابت $\rho_0 v_0 / s$ بخش و جملات شامل M را جداگانه جمع کنیم، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\nabla' \cdot v' + M^2 \left[\frac{\partial p''}{\partial t'} + \nabla' \cdot (p'' v') \right] = 0, \quad (250-8)$$

که در آن

$$\nabla' = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z'}. \quad (251-8)$$

به همین ترتیب وقتی معادله حرکت (۸-۱۳۹) را بر v_0^2 / s بخش کنیم، چنین می‌شود:

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + v' \cdot \nabla' v' + \frac{\nabla' p''}{1 + M^2 p''} = \frac{s_0}{v_0^2} \frac{f}{\rho}. \quad (252-8)$$

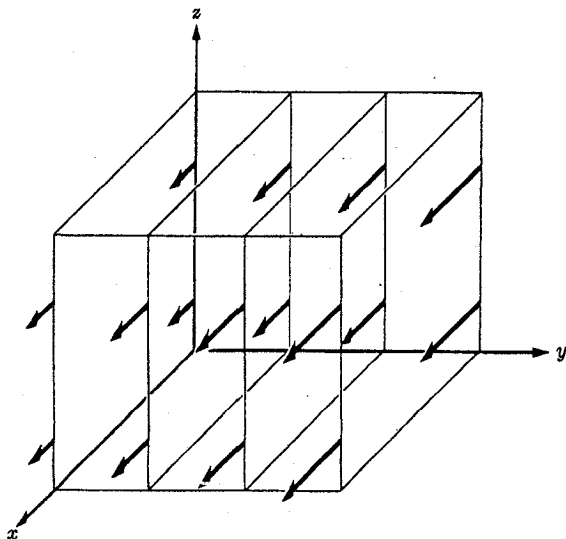
معادلات (۸-۲۵۰) و (۸-۲۵۲) نمایشگر چهار معادله دیفرانسیل‌اند که باید چهار کمیت v' و p' را با در نظر گرفتن شرایط اولیه و شرایط مرزی داده شده، از آنها به دست آورد. اگر نیروهای حجمی صفر باشند، یا اگر نیروهای حجمی به واحد جرم، f/ρ با v_0^2/s متناسب باشند، در این صورت اگر عدد ماخ برای هر دو یکی باشد، معادلات دو مسئله مشابه یکسان خواهند بود. بنابراین مسائل مشابه، اگر دارای عدد ماخ یکسان باشند دارای جوابهای مشابه خواهند بود. نتایج آزمایشها روی ماکت‌های هواپیما در تونلهای باد را می‌توانیم در مورد هواپیمایی که با سرعتهایی متنظر با اعداد ماخ حرکت می‌کنند از طریق بیرونیایی، به کار ببریم. اگر عدد ماخ بسیار کوچکتر از یک باشد، می‌توان از جملات شامل M^2 در معادلات (۸-۲۵۰) و (۸-۲۵۲) صرف‌نظر کرد و در این صورت چنانکه از معادله (۸-۲۵۰) یا (۸-۲۴۸) مشاهده می‌شود، این معادلات به همان معادلات سیال تراکم‌ناپذیر تبدیل می‌شوند. بنابراین در سرعتهای سیالی که بسیار کمتر از سرعت صوت‌اند، حتی هوا ممکن است به صورت سیال تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شود. از طرف دیگر، وقتی اعداد ماخ نزدیک به یک، یا از یک بزرگتر باشند، تراکم‌ناپذیری سیال، حتی در سیلان مایعات نیز مهم می‌شود. توجه داشته باشید که عدد ماخ فقط شامل سرعت مشخص v_0 و سرعت صوت است که به نوبه خود به چگالی

مشخص ρ و قابلیت تراکم B بستگی دارد. تغییرات در عامل مقیاس فاصله s ، چنانکه تغییرات در فشار مشخص p (مگر تا جایی که بر ρ و B اثر بگذارند)، هیچ‌گونه تأثیری در ماهیت جواب ندارند.

باید تأکید شود که این نتایج فقط در مورد سیالهای آرمانی یعنی وقتی چسبندگی قابل‌اغماض باشد، و در مواردی که در آنها چگالی سیال در هیچ نقطه با چگالی مشخص ρ زیاد تفاوت ندارد، قابل استفاده است. شرط دوم، در مورد مایعات، بجز هنگامی که حباب‌سازی مطرح باشد (یعنی تشکیل حبابهای بخار) و در مورد گازها مگر در مورد اعداد ماخ بسیار بزرگ به خوبی برقرار است.

۱۵-۸ چسبندگی

در بسیاری از کاربردهای عملی نظریه سیلان سیال، صرف نظر کردن از اصطکاک چسبندگی مانند بخشهای قبل مجاز نیست. وقتی لایه‌های مجاور سیال از کنار یکدیگر می‌گذرند، این حرکت تحت تأثیر نیروی برشی که می‌خواهد سرعت نسبی آنها را کم کند، قرار می‌گیرد. فرض کنید که سرعت سیال در ناحیه مفروضی در جهت x باشد و سیال به صورت لایه‌هایی که به موازات صفحه xz اند جاری باشد، به طوری که v_x فقط تابعی از y باشد (شکل ۸-۱۱). فرض کنید که جهت مثبت محور y به طرف راست باشد. در این صورت اگر $\partial v_x / \partial y$ مثبت باشد، اصطکاک چسبندگی باعث بروز نیروی برشی مثبت F_x خواهد شد که از راست به چپ روی سطح A موازی صفحه xz وارد می‌شود. ضریب چسبندگی η به صورت نسبت تنش برشی به



شکل ۸-۱۱ توزیع سرعت در تعریف چسبندگی.

گرادیان سرعت تعریف می‌شود:

$$\eta = \frac{F_x/A}{\partial v_x / \partial y} \quad (۲۵۳-۸)$$

وقتی توزیع سرعت از این نوع ساده نباشد، تنشهای ناشی از چسبندگی پیچیده‌ترند. (بخش ۱۰-۶ را ببینید).

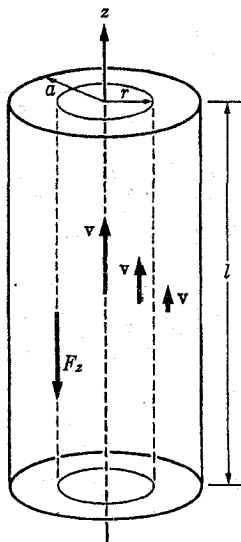
ما این تعریف را در حالت خاص سیلان دائم سیالی در داخل لوله‌ای با مقطع مدور به شعاع a به کار خواهیم برد. ما در اینجا فقط سیلانهای لایه‌ای را در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که همان‌طور که در تعریف بالا در نظر گرفته شد سیال در لایه‌هایی جریان دارد. در این حالت لایه‌ها استوانه‌ای‌اند. سرعت در همه جا به موازات محور لوله است که آن را محور z می‌گیریم، و سرعت v_z فقط تابعی از r ، فاصله از محور لوله است (شکل ۸-۱۲ را ببینید). اگر استوانه‌ای به شعاع r و طول l در نظر بگیریم سطح آن $A = 2\pi r l$ خواهد بود و طبق تعریف (۲۵۳-۸) نیروی وارد بر سیال داخل استوانه به وسیله سیال خارج آن عبارت است از:

$$F_z = \eta (2\pi r l) \frac{dv_z}{dr} \quad (۲۵۴-۸)$$

چون سیال داخل این استوانه، بی‌شتاب است اگر نیروی حجمی وجود نداشته باشد، نیروی چسبندگی باید به وسیله یک اختلاف فشار بین دو انتهای استوانه، خنثی شود:

$$\Delta p (\pi r^2) + F_z = 0, \quad (۲۵۵-۸)$$

که در آن Δp اختلاف فشار بین دو انتهای استوانه است که در فاصله l از یکدیگر قرار گرفته‌اند و



شکل ۸-۱۲ سیلان لایه‌ای در یک لوله.

فرض می‌کنیم که فشار در سطح مقطع لوله، یکنواخت است. معادلات (۸-۲۵۴) و (۸-۲۵۵) را می‌توان ترکیب کرد تا یک معادلهٔ دیفرانسیل بر حسب v_z به دست آورد:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{r \Delta p}{2\eta l} \quad (۸-۲۵۶)$$

از محور استوانه، به طرف خارج انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{v_0}^{v_z} dv_z = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \int_0^r r dr,$$

$$v_z = v_0 - \frac{r^2 \Delta p}{4\eta l}, \quad (۸-۲۵۷)$$

که در آن v_0 سرعت در محور لوله است. فرض می‌کنیم که سرعت سیال در دیوارهای لوله صفر باشد:

$$[v_z]_{r=a} = v_0 - \frac{a^2 \Delta p}{4\eta l} = 0, \quad (۸-۲۵۸)$$

اگرچه این فرض جای بحث دارد. در این صورت

$$v_0 = \frac{a^2 \Delta p}{4\eta l}, \quad (۸-۲۵۹)$$

و

$$v_z = \frac{\Delta p}{4\eta l} (a^2 - r^2). \quad (۸-۲۶۰)$$

جریان کل سیال داخل لوله عبارت است از:

$$I = \iint \rho v_z dS = 2\pi\rho \int_0^a v_z r dr. \quad (۸-۲۶۱)$$

v_z را از معادله (۸-۲۶۰) در این معادله جایگزین می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{I}{\rho} = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\eta l}. \quad (۸-۲۶۲)$$

این فرمول را قانون پوازوی^۱ می‌نامند. این فرمول روش ساده و مناسبی برای اندازه‌گیری η در اختیار ما می‌گذارد.

اگرچه در اینجا معادلات عمومی حرکت برای سیلان چسبنده را به دست نمی‌آوریم ولی می‌توانیم با به حساب آوردن چسبندگی به نتیجه‌ای مشابه با نتیجهٔ بخش ۸-۱۴ برسیم، بی‌اینکه عملاً معادلات سیلان چسبنده را پیدا کنیم. فرض کنید مانند بخش ۸-۱۴ دو مسئلهٔ مشابه از سیلان سیال در پیش داشته باشیم و فرض کنید s ، v_0 ، p_0 ، و ρ_0 به ترتیب فاصله، سرعت، فشار، و چگالی مشخص باشند که این بار نیز چنانکه در هر مسئلهٔ دیگر، معرف مقیاس‌اند. فرض کنید که در این حالت باید چسبندگی را هم به حساب آورد، در نتیجه به معادلهٔ حرکت (۸-۱۳۹) جمله‌ای

مربوط به نیروی اصطکاک چسبندگی اضافه می‌شود. در حال حاضر، شکل دقیق این جمله را نمی‌دانیم، ولی به هر حال حاصل ضرب η در مشتق‌های متفاوت مؤلفه‌های مختلف سرعت خواهد بود، که بر ρ بخش شده است [زیرا معادله (۸-۱۳۹) از پیش بر ρ بخش شده است]. وقتی مانند بخش ۸-۱۴، سرعت v' و مختصات بی‌بعد x', y', z' ، و t' را وارد می‌کنیم و معادله حرکت را بر v'/s بخش می‌کنیم، درست معادله (۸-۲۵۲) را به دست می‌آوریم که جمله شامل ضریب چسبندگی به آن اضافه شده است. چون تمام جمله‌های معادله (۸-۲۵۲) بی‌بعدند، جمله شامل چسبندگی نیز بی‌بعد، و عبارت خواهد بود از مشتق‌های مؤلفه‌های v' نسبت به x', y', z' و ضریب عددی و ضریب ضریبی بی‌بعد شامل η که در ترکیبی از v و s ضرب و بر $(1 + M^2 p'')$ بخش شده است، (معادله (۸-۲۴۸)). در این صورت ابعاد η که به وسیله معادله (۸-۲۵۳) معین می‌شوند، عبارت‌اند از:

$$[\eta] = \frac{\text{جرم}}{\text{طول} \times \text{زمان}}, \quad (۸-۲۶۳)$$

و تنها ترکیبی از ρ ، v ، و s که دارای چنین ابعادی باشد، $\rho \cdot v \cdot s$ است. بنابراین جمله مربوط به چسبندگی در ضریب زیر ضرب خواهد شد:

$$\frac{1}{R(1 + M^2 p'')}, \quad (۸-۲۶۴)$$

که در آن عدد رینولدز^۱ است و به وسیله معادله زیر تعریف می‌شود:

$$R = \frac{\rho \cdot v \cdot s}{\eta}. \quad (۸-۲۶۵)$$

اکنون می‌توان نتیجه گرفت که وقتی چسبندگی مهم است، دو مسئله مشابه دارای معادله حرکت یکسان برحسب متغیرهای بی‌بعد و در نتیجه جواب‌های مشابه خواهند بود، فقط به شرطی که عدد رینولدز R و همچنین عدد ماخ M برای هر دو مسئله یکسان باشد. اگر عدد ماخ بسیار کوچک باشد در این صورت تراکم‌پذیری مهم نخواهد بود. اگر عدد رینولدز خیلی بزرگ باشد، در این صورت می‌توان از چسبندگی صرف‌نظر کرد. مشاهده می‌شود که برای هر مسئله داده شده، مقداری بحرانی برای عدد رینولدز چنان وجود دارد که ماهیت سیلان برای اعداد رینولدز بالاتر از این مقدار بحرانی با ماهیت سیلان برای اعداد رینولدز پایین‌تر از آن، بسیار متفاوت است. برای اعداد رینولدز کوچک، سیلان لایه‌ای است، زیرا چسبندگی متمایل است به اینکه هر نوع گردابی را که به وجود آید مستهلک سازد. برای اعداد رینولدز بزرگ، سیلان متلاطم خواهد بود. این حالت هنگامی است که چسبندگی کوچک یا چگالی و سرعت و یا ابعاد خطی، بزرگ باشند. توجه کنید که عدد رینولدز به s بستگی دارد در حالی که عدد ماخ چنین نیست به طوری که وقتی اثرهای چسبندگی در نظر گرفته می‌شود، مقیاس فاصله مسئله کسب اهمیت می‌کند. اثرات چسبندگی در مقیاسهای کوچکتر مهم‌تر از مقیاسهای بزرگتر است.

متذکر می‌شویم که عبارت (۸-۲۶۵) برای عدد رینولدز و نیز این حقیقت که معادله (۸-۱۳۹) بر v'/s بخش شده است تا معادله حرکت بی‌بعد به دست آید، متضمن آن است که جمله

چسبندگی که باید به معادله (۸-۱۳۹) اضافه شود، دارای بعد $(\rho \cdot s^2) / (\eta v)$ است و این به نوبه خود متضمن آن است که چگالی نیروی چسبندگی باید مساوی حاصل ضرب η در مجموع مشتق‌های دوم مؤلفه‌های سرعت نسبت به x ، y ، و z باشد. شاید این نتیجه از معادله (۸-۲۵۳) نیز بدیهی باشد، زیرا در محاسبه نیروی کل وارد بر جزء سیال، اختلاف تنشها در وجوه متقابل جزء در کار است و بنابراین مشتق دوم سرعتها نسبت به x ، y ، و z در جمله مربوط به نیرو وارد خواهد شد. در فصل ۱۰، فرمولی برای چگالی نیروی چسبنده به دست خواهیم آورد.

مسائل

۱. ریسمان کشیده‌ای به طول l در انتهای $x = l$ به وسیله حلقه‌ای به جرم ناچیز که بی اصطکاک بر روی میله قائمی می لغزد، بسته شده است. (الف) نشان دهید که شرط مرزی در این انتهای ریسمان عبارت است از:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=l} = 0.$$

(ب) اگر انتهای $x = 0$ بسته شده باشد، وجوه طبیعی ارتعاش را پیدا کنید.

۲. در مسئله ۱ اگر حلقه‌ای که در یک سر ریسمان بسته شده است، دارای جرم متناهی m باشد، شرط مرزی و وجوه طبیعی ارتعاش را پیدا کنید. معنی حالت‌های حدی $m = 0$ و $m = \infty$ چیست؟ (اثر جاذبه را نادیده بگیرید).

۳. نقطه وسط ریسمانی به طول l به اندازه فاصله $u = l/10$ از مکان تعادل خود کشیده شده است به طوری که ریسمان دو ساق یک مثلث متساوی الساقین را تشکیل می‌دهد. سپس ریسمان رها می‌شود. به وسیله روش سری فوریه عبارتی برای حرکت ریسمان پیدا کنید.

۴. به یک تار پیانو به طول l و کشش τ و چگالی σ که در دو انتها بسته شده و در ابتدا ساکن است در فاصله a از یکی از دو انتها، به وسیله چکشی به جرم m و سرعت v ضربه‌ای وارد می‌شود. فرض کنید که چکش به طور الاستیک (کشوار) با سرعت v باز می‌جهد و کاهش اندازه حرکتش به یک طول کوتاه Δl ، که در دو طرف نقطه $x = a$ قرار دارد، منتقل می‌شود. به وسیله روش سری فوریه و با فرض اینکه Δl خیلی کوچک است معادله حرکت تار را پیدا کنید. اگر طول متناهی Δl به حساب آورده می‌شد چه تأثیری در نتیجه فوق داشت؟ اگر علاقمند باشیم که هارمونیک هفتم فرکانس اولیه در حرکت تار وجود نداشته باشد (زیرا معروف است که بسیار ناخوشایند است) ضربه را در چه نقاط a از تار می‌توان وارد کرد؟

۵. ریسمانی به طول l در نقطه $x = l$ بسته شده است و انتهای $x = 0$ به طور سینوسی حرکت می‌کند به طوری که

$$u(0, t) = A \sin \omega t.$$

(الف) حرکت حالت پاینده ریسمان را پیدا کنید. به عبارت دیگر جوابی پیدا کنید که در آن تمام نقاط ریسمان با همان فرکانس زاویه‌ای ω ، مرتعش می‌شوند. (ب) اگر ریسمان از ابتدا ساکن بود حرکت واقعی ریسمان را چگونه پیدا می‌کردید؟

۶. نیرویی با چگالی خطی

$$f(x, t) = f_0 \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \omega t,$$

که در آن n عددی صحیح است بر ریسمان کشیده‌ای به طول l وارد می‌شود. (الف) حرکت حالت دائم ریسمان را پیدا کنید [راهنمایی. وابستگی زمانی و مکانی مشابهی برای $u(x, t)$ در نظر بگیرید و در معادله حرکت جایگزین کنید.] (ب) نشان دهید که چگونه می‌توان مسئله عمومی‌تر نیروی هارمونیک اعمال شده

$$f(x, t) = f_0(x) \cos \omega t,$$

را که در آن $f_0(x)$ تابعی است که در دو انتهای ریسمان صفر می‌شود، حل کرد.

۷. فرض کنید که اصطکاک هوای اطراف یک ریسمان مرتعش را می‌توان به صورت نیرویی به واحد طول متناسب با سرعت ریسمان بیان کرد. معادله حرکت ریسمان را بنویسید و اگر ریسمان در دو انتها بسته شده باشد و جوه طبیعی ارتعاش را پیدا کنید.

۸. ریسمانی به چگالی σ و طول l که تحت نیروی کشش τ قرار گرفته است به طور افقی کشیده شده و در دو انتها بسته شده است. معادله حرکت ریسمان را با در نظر گرفتن وزن آن بیابید. ریسمان از ابتدا به طور مستقیم و به طور افقی نگه داشته شده و سپس رها می‌شود. [راهنمایی. «حرکت» حالت پاینده را پیدا کنید و حرکت گذرای مناسبی به آن بیفزایید.]

۹. طرف راست ریسمان طولی به حلقه بی‌جرمی منتهی می‌شود که بر روی میله قائمی می‌لغزد و تحت تأثیر نیروی اصطکاک متناسب با سرعتش قرار می‌گیرد. شرط مرزی مناسبی بیابید و در باره انعکاس موجی در انتهای ریسمان بحث کنید. در حالات حدی که اصطکاک خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد رفتار موج منعکس شده چگونه خواهد بود؟ برای چه مقدار از ثابت اصطکاک هیچ‌گونه موج منعکس شده‌ای وجود ندارد؟

۱۰. در باره انعکاس موج در امتداد ریسمان طولی که مانند مسئله ۱ به حلقه بی‌وزنی منتهی می‌شود، بحث کنید.

۱۱. به وسیله ترکیب موجهای $f(x - ct)$ و $g(x + ct)$ جوابی برای مسئله ۳ چنان پیدا کنید که با شرایط اولیه و مرزی سازگار باشد. شکل ریسمان را در لحظات $l/c, 1/2 l/c, 1/4 l/c, 0, t = 0$ طرح کنید.

۱۲. (الف) ریسمان کشیده شده طولی به چگالی σ_1 که تحت کشش τ قرار دارد در نقطه $x = 0$ به ریسمان دیگری که دارای چگالی σ_2 است گره خورده است. اگر جرم گره قابل اغماض باشد نشان دهید که u و $\partial u / \partial x$ باید برای هر دو طرف گره یکسان باشند. (ب) موج $A \cos(k_1 x - \omega t)$ که بر روی ریسمان اول به طرف راست در حرکت است، به گره می‌رسد. نشان دهید برای آنکه شرایط مرزی در گره برقرار شود باید موج منعکس شده‌ای که در امتداد ریسمان اول به طرف چپ حرکت می‌کند و موج انتقال یافته‌ای که در امتداد ریسمان دوم به طرف راست حرکت می‌کند، وجود داشته باشند. به طوری که فرکانس هر دو موج با فرکانس موج تابیده برابر باشد. دامنه و فاز موجهای فرستاده شده و بازتابیده را پیدا کنید. (پ) به وسیله محاسبه توان در موج عبور کرده و بازتابیده و نشان دادن اینکه مجموع توانها مساوی توان موج اولیه است، نتیجه قسمت (ب) را امتحان کنید.

۱۳. مستقیماً از معادله (۸-۱۳۹) معادله‌ای به دست آورید که بقای اندازه حرکت زاویه‌ای را به صورتی مشابه معادله (۸-۱۴۱) بیان کند.

۱۴. معادله‌ای به دست آورید که قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای برای سیالی را به صورتی مشابه با معادله (۸-۱۴۰) بیان کند. از این معادله معادلاتی مشابه معادلات (۸-۱۴۱)، (۸-۱۴۲)، و (۸-۱۴۴) به دست آورید. معنی فیزیکی هر جمله در هر معادله را توضیح دهید. نشان دهید که گشتاور نیروهای داخلی ناشی از فشار را می‌توان از صورتهای انتگرال‌گیری شده حذف کرد و سپس معادله‌ای مشابه معادله (۸-۱۴۸) به دست آورید.

۱۵. معادله زیر را به دست آورید و تفسیر کنید:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \left(\frac{1}{\gamma} \rho v^2 - \rho \mathcal{G} + \rho u \right) dV + \iint_S \hat{n} \cdot \mathbf{v} \left(\frac{1}{\gamma} \rho v^2 - \rho \mathcal{G} + \rho u \right) dS = - \iint_S (\hat{n} p) \cdot \mathbf{v} dS - \iiint_V \rho \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dV,$$

که در آن V حجم ثابتی است که به وسیله سطح S که بردار عمود آن \hat{n} است، محصور شده است و سایر متغیرها همان معانی بخش ۸-۸ را دارند.

۱۶. (الف) توده‌ای هوای در ابتدا ساکن واقع در 45° عرض شمالی به طرف داخل و به سمت نقطه‌ای کم فشار در مرکزش می‌وزد. نشان دهید که گشتاور نیروی کوریولی حول مرکز کم فشار فقط به مؤلفه شعاعی سرعت بستگی دارد. از اینجا نشان دهید که اگر گشتاور - نیروهای اصطکاک قابل‌اِغماض باشند اندازه حرکت زاویه‌ای برحسب واحد جرم در شعاع r از مرکز فقط به r و شعاع اولیه r_0 در حالتی که هوا ساکن باشد بستگی دارد و به جزئیات حرکت بستگی ندارد. (ب) مؤلفه سمتی سرعت حول نقطه کم فشار را به صورت تابعی از شعاع اولیه و نهایی حساب کنید. اگر این الگویی منطقی از یک گردباد باشد و اگر هوادر 264 فوتی از مرکز دارای سرعت 300 میل در ساعت باشد، شعاع اولیه r_0 چه خواهد بود؟

۱۷. انرژی پتانسیل u برحسب واحد جرم را به صورت تابعی از p برای یک گاز کامل به وزن ملکولی M در درجه حرارت T حساب کنید. برای سیلان پاینده این گاز در دمای ثابت در لوله‌ای به سطح مقطع متغیر که ارتفاع آن از سطح زمین نیز متغیر باشد عباراتی برای فشار، چگالی، و سرعت گاز به صورت توابعی از سطح مقطع S لوله و ارتفاع h و فشار p و سرعت v در نقطه‌ای از لوله در ارتفاع $h = 0$ به سطح مقطع S_0 پیدا کنید. فرض کنید که p ، v ، و ρ روی سطح مقطع یکنواخت باشند.

۱۸. مسئله ۱۷ را برای سیالی تراکم‌ناپذیر با چگالی ρ حل کنید.

۱۹. تابع $\psi = ar$ که در آن a ثابت و r فاصله از نقطه‌ای ثابت است در تمام نقاط بجز $r = 0$ با معادله لاپلاس (۸-۱۷۷) سازگار است زیرا با پتانسیل ثقل جرمی نقطه‌ای هم‌شکل است.

اگر این تابع پتانسیل سرعت باشد، ماهیت سیلان سیال حاصل چه خواهد بود؟

۲۰. (الف) به وسیله محاسبه مستقیم تحقیق کنید که موج کروی (۸-۲۰۴) با معادله موج (۸-۱۸۶) سازگار است. (ب) عبارت مشابهی برای یک موج استوانه‌ای بنویسید که دارای بستگی زمانی

دلخواهی باشد و از محور z به طرف خارج حرکت کند و از z مستقل و دارای تقارن استوانه‌ای باشد. دامنه را چنان اختیار کنید که با فاصله از محور بستگی داشته باشد به طوری که شرط بقای انرژی را برقرار کند. نشان دهید که چنین موجی نمی‌تواند با معادله موج سازگار باشد. این خاصیت عمومی امواج استوانه‌ای است که نمی‌توانند شکل خود را حفظ کنند.

* ۲۱. نشان دهید که وجه طبیعی ارتعاش که به وسیله معادلات (۸-۲۲۵) و (۸-۲۲۶) داده می‌شود، ممکن است به صورت ترکیبی از امواج تختی که به طور هارمونیک نوسان می‌کنند و در جهت‌های انتخابی مناسب، با رابطه‌های فازی مناسب در حرکت‌اند، نمایش داده شوند. نشان دهید که در وجه طبیعی ارتعاش سیال در یک جعبه، سرعت در هر نقطه به اندازه 90° با فشار اختلاف فاز دارد. چگونه می‌توان این مطلب را با این حقیقت که در یک موج تخت فشار و سرعت هم‌فازند مطابقت داد؟

۲۲. وجوه طبیعی ارتعاش یک لوله ارگ مربع (دارای سطح مقطع مربع شکل) را که یک انتهای آن باز و انتهای دیگر آن بسته است با فرض اینکه انتهای باز یک گره فشار است، پیدا کنید.

۲۳. (الف) سرعت سیال v برای موجی که به وسیله معادله (۸-۲۲۸) داده می‌شود، محاسبه کنید. (ب) میزان متوسط سیلان توان را در داخل لوله نیز محاسبه کنید.

* ۲۴. نشان دهید که عبارت (۸-۲۲۸) برای یک موج صوتی در لوله را می‌توان به صورت ترکیبی از امواج تخت که با تندی c در جهت‌های مناسبی حرکت می‌کنند و در دیوارها منعکس می‌شوند، نمایش داد. از طریق این نمایش توضیح دهید که چرا برای هر وجه داده شده، فرکانس حداقلی وجود دارد که موج نمی‌تواند با فرکانسی پایین‌تر از آن در این وجه در داخل لوله انتشار یابد.

۲۵. اگر موج صوتی داده شده به وسیله معادله (۸-۲۲۸) بر انتهای بسته لوله‌ای در $z = 0$ وارد شود، موج منعکس را پیدا کنید. از شرط جانبی $v_z = 0$ در $z = 0$ شروع کنید.

۲۶. با استفاده از مختصات استوانه‌ای و با به کار بردن روش جدا کردن متغیرها نظریه انتشار امواج صوتی را در لوله‌ای به مقطع مدور توسعه دهید و تا جایی که می‌توانید آن را حل کنید. لازم نیست معادله را برای قسمت شعاعی موج حل کنید اما باید نوع جوابهایی را که انتظار داشتید به دست آورید، ذکر کنید.

۲۷. سرعتی گروهی برای موج (۸-۷۹) روی ریسمان گسسته را حساب کنید و با سرعت فازی مقایسه نمایید. نشان دهید که برای طول موج خیلی بزرگتر از λ ، این دو سرعت تقریباً برابرند.

۲۸. یک جمله دیگر در بسط (۸-۲۳۹) نگه دارید و توسعه بخش ۸-۱۳ را تا آنجایی که می‌توانید دنبال کنید و توجه کنید که به چه طریقی خراب می‌شود. نشان دهید که با این جمله اضافی، وقتی زمان می‌گذرد، پاکت مدوله‌سازی نمی‌تواند شکل خودش را حفظ کند. زمانی را تخمین بزنید که بعد از آن تغییری قابل ملاحظه در پاکت مدوله‌سازی می‌توان انتظار داشت.

۲۹. سیالی با ضریب چسبندگی η به طور پاینده بین دو دیوار مسطح موازی بی‌پایان که به فاصله l از یکدیگر قرار گرفته‌اند سیلان می‌کند. امتداد سرعت سیال همه جا یکی است و فقط به فاصله از دیوارها بستگی دارد. جریان کل سیال بین دیوارها در هر واحد طولی که در امتداد دیوار و عمود بر جهت سیلان اندازه‌گیری می‌شود I است. توزیع سرعت و گرادیان فشار موازی با دیوارها را با فرض اینکه فشار فقط در جهت سیلان تغییر می‌کند، پیدا کنید.

۳۰. ثابت کنید که ρ ، v ، s تنها ترکیبی از ρ ، v ، و s است که دارای ابعاد چسبندگی است.

معادلات لاگرانژ

۹-۱ مختصات تعمیم یافته

نتیجه حاصل از کاربرد مستقیم قوانین نیوتن در مورد دستگاهی مکانیکی عبارت است از مجموعه‌ای از معادلات حرکت بر حسب مختصات دکارتی هر یک از ذراتی که دستگاه از آنها ساخته شده است. در بسیاری از حالات این مختصات مناسب‌ترین مختصات برای حل مسئله یا توصیف حرکت دستگاه نیست. برای مثال، در مسئله حرکت یک تک ذره که تحت تأثیر نیروی مرکزی قرار گرفته است و در بخش ۳-۱۳ مورد بحث قرار گرفت، وارد کردن مختصات قطبی را در صفحه حرکت ذره مناسب دانستیم. علت این بود که نیرو در این حالت ممکن است بر حسب مختصات قطبی به طور ساده‌تری بیان شود. همچنین در مسئله دو جسمی که در بخش ۴-۷ مورد بحث قرار گرفت، مناسب‌تر دانستیم که به جای مختصات r_1 و r_2 ذرات، بردار مختصه مرکز جرم، R و بردار مختصه نسبی r که مکان ذره ۱ را نسبت به ذره ۲ مشخص می‌کند، قرار دهیم. این کار را نخست به آن سبب کردیم که نیروهای متقابلی که ذرات به یکدیگر وارد می‌کنند معمولاً به مختصات نسبی بستگی دارند. ثانیاً در بسیاری از حالات، چنانکه در مورد حرکت سیارات، به توصیف حرکت یک ذره نسبت به ذره دیگر علاقه‌مندیم. در مسائلی که شامل ذرات بسیارند معمولاً مناسب آن است که مجموعه‌ای از مختصات که شامل مختصات مرکز جرم است اختیار کنیم زیرا حرکت مرکز جرم به وسیله معادله نسبتاً ساده (۴-۱۸) تعیین می‌شود. در فصل ۷ معادلات حرکت یک ذره را در دستگاههای مختصات متحرک پیدا کردیم که استفاده از آنها گاه مناسب‌تر از دستگاههای مختصات ثابتی است که در معادلات اصلی حرکت نیوتن به کار می‌رود.

دستگاههای مختصات بیان شده در بالا را همراه با دستگاههای مختصات دکارتی جزو مختصات تعمیم یافته به حساب می‌آوریم. یک مجموعه مختصات تعمیم یافته عبارت است از هر مجموعه مختصاتی که به وسیله آن می‌توان مکانهای ذرات یک دستگاه را مشخص کرد. در مسئله‌ای که به مختصات تعمیم یافته نیاز باشد می‌توان معادلات حرکت نیوتن را در مختصات دکارتی نوشت و سپس آن را به مختصات تعمیم یافته تبدیل کرد چنانکه در مسائلی بررسی شده در فصلهای پیشین کردیم. البته داشتن روشی کلی برای به دست آوردن معادلات حرکت به طور مستقیم، بر حسب هر مجموعه از مختصات تعمیم یافته بسیار مطلوب و مناسب است. به علاوه علاقه داریم که روش یک‌شکلی برای نوشتن و شاید حل معادلات حرکت در هر دستگاه مختصات دلخواه داشته باشیم. چنین روشی توسط لاگرانژ ابداع شد و موضوع بحث این فصل است.

در هر یک از حالات مذکور در بند اول، تعداد مختصات دستگاه جدید، که برای ساده کردن مسئله معرفی شدند، با تعداد مختصات دکارتی تمام ذرات موجود، برابر است. برای مثال می توان دو مختصه دکارتی x و y ذره ای را که در یک صفحه حرکت می کند، به وسیله دو مختصه قطبی r و θ جایگزین کرد یا سه مختصه x ، y ، و z را به وسیله سه مختصه کروی یا استوانه ای جایگزین ساخت. یا می توان به جای شش مختصه x_1 ، y_1 ، z_1 ، x_2 ، y_2 ، و z_2 دو ذره، سه مختصه مرکز جرم X ، Y ، و Z و سه مختصه x ، y ، و z یک ذره نسبت به دیگری را جایگزین کرد. یا می توان سه مختصه یک ذره نسبت به یک دستگاه ثابت از محورها را به وسیله سه مختصه نسبت به محورهای متحرک جایگزین کرد. (یک بردار به منزله سه مختصه به حساب می آید).

ما در بررسی دوران یک جسم صلب حول یک محور (بخش ۵-۲)، مکان جسم را برحسب تنها مختصه زاویه ای θ بیان کردیم. اینجا حالتی را در پیش داریم که به جای تعداد زیادی مختصات دکارتی یعنی به جای سه مختصه برای هر ذره جسم، یک مختصه تنها θ را قرار دهیم. این کار امکان پذیر است زیرا جسم صلب است و مجاز است که فقط حول یک محور ثابت دوران کند. از این دو حقیقت نتیجه می شود که مکان جسم هنگامی کاملاً معین می شود که ما مکان زاویه ای خط مرجعی در جسم را مشخص کنیم. مکان یک جسم صلب آزاد به وسیله شش مختصه مشخص می شود: سه مختصه برای مشخص کردن مرکز جرم و سه مختصه برای طرز قرارگیری آن در فضا. این در مقایسه با $3N$ مختصات دکارتی لازم جهت مشخص کردن مکانهای N ذره بسیار ساده شده است. جسم صلب مثالی است از یک دستگاه ذرات مقید. بدین معنی که تحت شرایطی است که مجموعه های ممکن مقادیر مختصات را محدود می کند. در مورد یک جسم صلب، قید این است که فاصله بین هر دو ذره باید ثابت بماند. اگر جسم بتواند فقط حول محور ثابتی دوران کند باید فاصله هر ذره از محور نیز ثابت باشد. علت این است که مشخص کردن مختصه تنها یعنی θ ؛ برای تعیین کردن مکان هر ذره در جسم کافی است. بحث چنین دستگاههای مقیدی را تا بخش ۹-۴ به عقب می اندازیم. در این بخش و بخش بعدی نظریه مختصات تعمیم یافته را با این فرض که تعداد مختصات تعمیم یافته به اندازه تعداد مختصات دکارتی است، تشریح می کنیم. سپس در بخش ۹-۴ خواهیم دید که این نظریه برای حرکت دستگاههای مقید نیز به کار می رود.

وقتی بخواهیم راجع به دستگاهی فیزیکی صحبت کنیم که به وسیله مجموعه ای مختصات تعمیم یافته توصیف شده باشد و موقتاً از مشخص کردن مختصات آن چشم پوشیم، رسم چنین است که هر مختصه را با حرف q و یک اندیس عددی نشان دهیم. مجموعه ای از n مختصات تعمیم یافته به صورت q_1, q_2, \dots, q_n نوشته می شود، بنابراین ذره ای را که در صفحه ای حرکت می کند، می توان به وسیله دو مختصه q_1 و q_2 توصیف کرد که در حالتی خاص ممکن است همان مختصات دکارتی x و y یا مختصات قطبی r و θ یا هر جفتی از مختصات مناسب دیگر باشند. مکان ذره ای که در فضا حرکت می کند به وسیله سه مختصه معین می شود که ممکن است مختصات دکارتی x ، y ، و z یا مختصات کروی r ، θ ، و φ یا مختصات استوانه ای ρ ، z ، و φ یا به طور کلی q_1, q_2, q_3 باشد.

آرایش دستگاهی از N ذره ممکن است به وسیله $3N$ مختصه دکارتی ذراتش $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N$ یا به وسیله هر مجموعه‌ای از $3N$ مختصه تعمیم یافته q_1, q_2, \dots, q_{3N} مشخص شود. چون برای هر آرایش ذرات دستگاه، مختصات تعمیم یافته باید مجموعه‌ای از مقادیر معین داشته باشند، مختصات q_1, q_2, \dots, q_{3N} توابعی از مختصات دکارتی است و در مورد دستگاههای مختصات متحرک ممکن است توابعی از زمان نیز باشند:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, y_N, z_N; t), \\ q_2 &= q_2(x_1, y_1, \dots, z_N; t), \\ &\vdots \\ q_{3N} &= q_{3N}(x_1, y_1, \dots, z_N; t). \end{aligned} \tag{۱-۹}$$

چون مختصات q_1, q_2, \dots, q_{3N} آرایش دستگاه را مشخص می‌کنند باید این امکان هم وجود داشته باشد که مختصات دکارتی را برحسب مختصات تعمیم یافته بیان کرد:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t), \\ y_2 &= y_2(q_1, \dots, q_{3N}; t), \\ &\vdots \\ z_N &= z_N(q_1, \dots, q_{3N}; t). \end{aligned} \tag{۲-۹}$$

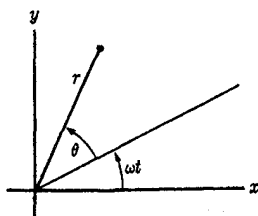
اگر معادلات (۱-۹) داده شده باشند می‌توان x_1, y_1, \dots, z_N را از آنها پیدا کرد و معادلات (۲-۹) را به دست آورد و به عکس.

شرط ریاضی برای آن که این جواب (از نظر تئوری) ممکن باشد، این است که درمیان ژاکوبی معادلات (۱-۹) در تمام یا تقریباً تمام نقاط، مخالف صفر باشد:

$$\frac{\partial(q_1, \dots, q_{3N})}{\partial(x_1, y_1, \dots, z_N)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial y_1} & \frac{\partial q_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1}{\partial z_N} & \frac{\partial q_2}{\partial z_N} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial z_N} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{۳-۹}$$

اگر این نامساوی برقرار نباشد، معادلات (۱-۹) مجموعه به قاعده‌ای از مختصات تعمیم یافته را تعریف نمی‌کند. عملاً در تمام حالات فیزیکی موردنظر، از تعاریف هندسی مختصات تعمیم یافته آشکار خواهد بود که آیا مجموعه به قاعده‌ای از مختصات اند یا نه. بنابراین موردی نخواهیم داشت که آزمایش فوق را برای دستگاههای مختصات خود به کار ببریم. [برای به دست آوردن شرط (۳-۹) به کتاب زیر مراجعه کنید.

W. F. Osgood, *Advanced Calculus*, New York: Macmillan, 1937, p. 129.]



شکل ۹-۱ دستگاه مختصات قطبی دوار.

مختصات دکارتی آن، x, y مربوط می‌کند. به‌عنوان مثالی از دستگاه مختصات متحرک، مختصاتی قطبی را در نظر می‌گیریم که در آن محور مرجع، که θ از آن اندازه‌گیری می‌شود با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند، (شکل ۹-۱):

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (۴-۹)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} - \omega t,$$

$$x = r \cos(\theta + \omega t), \quad \text{و به‌عکس،}$$

$$y = r \sin(\theta + \omega t). \quad (۵-۹)$$

به‌عنوان مثالی از مختصات تعمیم‌یافته برای دستگاهی از ذرات، مختصات مرکز جرم X, Y, Z و مختصات نسبی x, y, z دوزره به اجرام m_1 و m_2 را به صورتی داریم که به وسیله معادلات (۴-۹۰) و (۴-۹۱) تعریف شده‌اند که در آن Z, Y, X مؤلفه‌های R ، و x, y, z مؤلفه‌های r ‌اند. چون معادلات تبدیل (۴-۹۰) و (۴-۹۱) به‌طور صریح شامل زمان نیستند، اگرچه x, y, z مختصات m_1 نسبت به یک مبدأ متحرک واقع بر m_2 ‌اند، این دستگاه را به‌عنوان دستگاه ثابتی در نظر می‌گیریم. قانونی که مختصات x, y, z, X, Y, Z را تعریف می‌کند در تمام لحظات زمان یکسان است.

اگر دستگاهی از ذرات توسط مجموعه‌ای از مختصات تعمیم‌یافته q_1, q_2, \dots, q_{2N} توصیف شده باشند، مشتق نسبت به زمان \dot{q}_k هر مختصه q_k را سرعت تعمیم‌یافته وابسته به این مختصه می‌نامیم. سرعت تعمیم‌یافته وابسته به یک مختصه دکارتی x_i درست همان مؤلفه متناظر \dot{x}_i سرعت ذره‌ای است که مکان آن با آن مختصه مشخص شده است. سرعت تعمیم‌یافته وابسته به یک مختصه زاویه‌ای θ همان سرعت زاویه‌ای متناظر $\dot{\theta}$ است. سرعت وابسته به مختصه X در مثال پیش \dot{X} ، یعنی مؤلفه X سرعت مرکز جرم است. سرعتهای تعمیم‌یافته را می‌توان بر حسب مختصات و سرعتهای دکارتی با مشتق‌گیری از معادلات (۹-۱) یا (۹-۲) نسبت به t طبق قوانین مشتق‌گیری برای توابع ضمنی حساب کرد و به‌عکس. برای مثال، مؤلفه‌های سرعت دکارتی را می‌توان به وسیله مشتق‌گیری از معادلات (۹-۲) بر حسب مختصات و سرعتهای تعمیم‌یافته بیان کرد:

$$\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{2N} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad (۶-۹)$$

$$\dot{z}_N = \sum_{k=1}^{2N} \frac{\partial z_N}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_N}{\partial t}.$$

به عنوان مثال، از معادلات (۵-۹) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos(\theta + \omega t) - r \dot{\theta} \sin(\theta + \omega t) - r \omega \sin(\theta + \omega t), \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin(\theta + \omega t) + r \dot{\theta} \cos(\theta + \omega t) + r \omega \cos(\theta + \omega t). \end{aligned} \quad (۷-۹)$$

انرژی جنبشی دستگاهی از N ذره برحسب مختصات دکارتی عبارت است از:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \quad (۸-۹)$$

با جایگزین کردن معادلات (۶-۹) انرژی جنبشی را برحسب مختصات تعمیم یافته به دست می آوریم. اگر ترتیب جمع بندی را به صورت دیگری اختیار کنیم، نتیجه می شود که:

$$T = \sum_{k=1}^{2N} \sum_{l=1}^{2N} \frac{1}{2} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{2N} B_k \dot{q}_k + T_0, \quad (۹-۹)$$

که در آن

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \right), \quad (۱۰-۹)$$

$$B_k = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right), \quad (۱۱-۹)$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (۱۲-۹)$$

ضرایب A_{kl} , B_k و T_0 توابعی از مختصات q_1, \dots, q_{2N} و در مورد دستگاه مختصات متحرک توابعی از t نیز هستند. اگر A_{kl} مگر وقتی $k=l$ ، صفر باشد، مختصات را متعامد^۱ می خوانند. وقتی که t به طور صریح در معادلات (۱-۹) ظاهر نشود، یعنی وقتی که دستگاه مختصات تعمیم یافته با زمان تغییر نکند، ضرایب B_k و T_0 صفر خواهند بود. می بینیم که به طور کلی انرژی جنبشی دارای سه مجموعه عبارت است از:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (۱۳-۹)$$

که در آن T_2 شامل عباراتی است که بر حسب سرعتهای تعمیم یافته از درجه دوم و T_1 شامل عبارات خطی بر حسب آنها و T_0 مستقل از سرعتها است. عبارات T_1 و T_0 فقط در دستگاههای مختصات متحرک ظاهر می شوند. در دستگاههای مختصات ثابت، انرژی جنبشی بر حسب سرعتهای تعمیم یافته از درجه دوم است.

برای مثال، در مختصات قطبی صفحه ای، (معادلات (۳-۷۲)) انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} (m \dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2), \quad (۱۴-۹)$$

که ممکن است به وسیله جایگزینی مستقیم از معادلات (۳-۷۲) یا به صورت حالت خاصی از معادله (۹-۹) به دست آورده شود، که در آن

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (۱۵-۹)$$

اگر دستگاه مختصات متحرک تعریف شده به وسیله معادلات (۹-۵) را در نظر بگیریم، با جایگزینی از معادله‌های (۹-۷) و یا با استفاده از معادله (۹-۹) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2} (m \dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2) + m r^2 \omega \dot{\theta} + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2. \end{aligned} \quad (۱۶-۹)$$

در این حالت عبارتی خطی از $\dot{\theta}$ و عبارتی مستقل از $\dot{\theta}$ و \dot{r} نمایان می‌شوند. انرژی جنبشی دستگاه دو ذره‌ای را همچنین می‌توان به آسانی بر حسب X, Y, Z, x, y, z که توسط معادلات (۴-۹۰) و (۴-۹۱) معین می‌شوند، نوشت.

به جای اینکه ابتدا انرژی جنبشی را در دستگاه مختصات دکارتی پیدا کنیم و سپس به دستگاه مختصات تعمیم یافته انتقال دهیم (مانند مثال فوق)، اغلب سریع‌تر آن است که انرژی جنبشی را مستقیماً بر حسب مختصات تعمیم یافته با علم بر معنی هندسی آنها به دست آوریم. در این صورت امکان خواهد داشت که بی نوشتن صریح معادلات تبدیل (۹-۱) و (۹-۲)، مسئله‌ای را از ابتدا با مجموعه‌ای مناسب از مختصات تعمیم یافته شروع کرد. برای مثال، ممکن است معادله (۹-۱۴) را مستقیماً از معنی هندسی مختصات r, θ (به شکل ۳-۲۰ مراجعه شود). با توجه به اینکه سرعت خطی وابسته به تغییر r, \dot{r} و وابسته به تغییر $\theta, r\dot{\theta}$ است، به دست آورد. چون امتداد سرعت‌های وابسته به r و θ عمودند، مربع سرعت کل عبارت است از

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2, \quad (۱۷-۹)$$

که معادله (۹-۱۴) بلافاصله از آن نتیجه می‌شود.

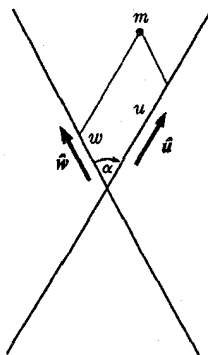
اگر سرعت‌های وابسته به تغییرات مختصات مختلف بر هم عمود نباشند باید در به کار بردن این روش احتیاط کرد. به عنوان مثال، یک جفت از محورهای مختصات u و w را، که با یکدیگر زاویه α کوچکتر از ۹۰° می‌سازند، (شکل ۹-۲) در نظر می‌گیریم. فرض کنید که u و w اضلاع متوازی الاضلاعی باشند که به طوری که در شکل دیده می‌شود از این محورها و خطوطی موازی آنها و مار بر جرم m ، درست شده باشند، فرض کنید که \hat{u} و \hat{w} بردارهای یکه در جهت افزایش u و w باشند. با به کار بردن u و w به عنوان مختصات، سرعت جرم m عبارت است از:

$$v = \dot{u} \hat{u} + \dot{w} \hat{w}. \quad (۱۸-۹)$$

انرژی جنبشی عبارت است از:

$$T = \frac{1}{2} m v \cdot v = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} m \dot{w}^2 + m \dot{u} \dot{w} \cos \alpha. \quad (۱۹-۹)$$

این مثالی است از مجموعه‌ای از مختصات غیرمتعامد که در آن یک عبارت حاصل ضرب خارجی سرعت‌ها



شکل ۹-۲ دستگاه مختصات غیرمتعامد.

در انرژی جنبشی ظاهر می شود. دلیل به کار بردن واژه متعامد، یعنی عمود برهم، از این مثال روشن است. وقتی که دستگاههایی مرکب از بیش از یک ذره بر حسب مختصات تعمیم یافته بیان می شوند، معمولاً مطمئن ترین کار این است که ابتدا انرژی جنبشی را در دستگاه مختصات دکارتی نوشت و سپس به دستگاههای تعمیم یافته تبدیل کرد. اما در بعضی از حالات، می توان انرژی جنبشی را مستقیماً در مختصات کلی نوشت. به عنوان مثال اگر جسم صلبی حول محوری دوران کند، می دانیم که انرژی جنبشی آن $(1/2)I\omega^2$ است که در آن ω سرعت زاویه ای حول آن محور و I گشتاور ماند است. همچنین می توانیم قضیه ای را که در بخش ۴-۹ اثبات شده است و بنابر آن انرژی جنبشی کل دستگاهی از ذرات برابر مجموع انرژی جنبشی مربوط به مرکز جرم و انرژی جنبشی مربوط به مختصات داخلی است، به کار بریم، (معادله ۴-۱۲۷) را ببینید. به عنوان مثال، انرژی جنبشی دستگاهی مرکب از دو ذره بر حسب مختصات X, Y, Z, x, y, z که به وسیله معادلات (۴-۹۰) و (۴-۹۱) تعریف شده است، عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (20-9)$$

که در آن M و μ به وسیله معادلات (۴-۹۷) و (۴-۹۸) داده می شوند. نتیجه نشان می دهد که این دستگاه یک دستگاه مختصات متعامد است. اگر سرعت خطی هر ذره دستگاهی را بتوان مستقیماً بر حسب سرعتها و مختصات تعمیم یافته نوشت، در این صورت انرژی جنبشی را می توان بلافاصله نوشت. اکنون توجه می کنیم که مؤلفه های اندازه حرکت خطی ذره i بنا به معادله (۹-۸) عبارت اند از

$$p_{ix} = m\dot{x}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}, \quad p_{iy} = m\dot{y}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}, \quad p_{iz} = m\dot{z}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}. \quad (21-9)$$

در حالتی که ذره ای در صفحه ای حرکت می کند، مشتقهای T نسبت به \dot{r} و $\dot{\theta}$ همان طوری که به وسیله معادله (۹-۱۴) داده می شوند، عبارت اند از:

$$p_r = m\dot{r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}, \quad (22-9)$$

که در آن p_r مؤلفه اندازه حرکت خطی در جهت افزایش r و p_θ اندازه حرکت زاویه ای حول مبدأ است. نتایج مشابهی برای مختصات کروی و استوانه ای در فضای سه بعدی به دست می آیند. در واقع

به آسانی می‌توان نشان داد که برای هر مختصه q_k که معیار سنجش تغییر مکان خطی یک ذره یا گروهی از ذرات در یک جهت داده شده است، اندازه حرکت خطی آن ذره یا گروهی از ذرات در آن جهت، $\partial T / \partial \dot{q}_k$ است. همچنین برای هر مختصه q_k که مقیاس سنجش تغییر مکان زاویه‌ای یک ذره یا گروهی از ذرات حول محوری است، اندازه حرکت زاویه‌ای آنها حول آن محور $\partial T / \partial \dot{q}_k$ است. این اشاره‌ای است به اینکه اندازه حرکت تعمیم یافته p_k مربوط به مختصه q_k را به صورت زیر تعریف کنیم^۱

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (۲۳-۹)$$

اگر q_k فاصله‌ای باشد، اندازه حرکت خطی مربوط به آن است. اگر q_k زاویه‌ای باشد، p_k اندازه حرکت زاویه‌ای مربوط به آن است. در باقی حالات، p_k دارای معانی فیزیکی دیگری خواهد بود. طبق معادله (۹-۹)، اندازه حرکت تعمیم یافته p_k عبارت است از:

$$p_k = \sum_{l=1}^{3N} A_{kl} \dot{q}_l + B_k. \quad (۲۴-۹)$$

در مورد مختصات X, Y, Z, x, y, z برای دستگاه دو ذره‌ای، این تعریف به روابط زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} p_X &= M\dot{X}, & p_Y &= M\dot{Y}, & p_Z &= M\dot{Z}, \\ p_x &= \mu\dot{x}, & p_y &= \mu\dot{y}, & p_z &= \mu\dot{z}, \end{aligned} \quad (۲۵-۹)$$

که در آن p_X, p_Y, p_Z و مؤلفه‌های اندازه حرکت خطی کل دو ذره و p_x, p_y, p_z و مؤلفه‌های اندازه حرکت خطی در مسئله یک بعدی معادل بر حسب x, y, z اند که مسئله دو جسم در بخش ۴-۷ به آن تبدیل شد. در بخش بعدی خواهیم دید که تشابه بین اندازه‌های حرکت تعمیم یافته p_k و مؤلفه‌های دکارتی اندازه حرکت خطی را می‌توان به معادلات حرکت در مختصات تعمیم یافته، گسترش داد.

اکنون می‌خواهیم یک نیروی تعمیم یافته تعریف کنیم. برای این منظور راحت تر است که نیروها را بر حسب کاری که انجام می‌دهند، وقتی ذرات حرکت می‌کنند، تعریف کنیم. دستگاهی از ذرات را در مکانهای مشخص شده توسط مختصات $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$ و نیروهای وارد بر آنها یعنی $F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots, F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz}$ تصور کنید. اگر قرار بر آن بود که هر ذره در این دستگاه به محلی نزدیک تغییر مکان دهد و مکانهای جدید توسط مختصات $x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \dots, x_N + \delta x_N, y_N + \delta y_N, z_N + \delta z_N$ مشخص شوند، کار انجام شده عبارت بود از

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i). \quad (۲۶-۹)$$

۱. انرژی جنبشی T به وسیله معادله (۹-۹) به صورت تابعی از $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, q_1, \dots, q_N$ و شاید از t ، تعریف می‌شود. مشتقهای این تابع T نسبت به این متغیرها با علائم مربوط به مشتقگیری جزئی نشان داده خواهند شد. چون $q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N$ برای هر حرکت داده شده دستگاه، همگی توابعی از زمان t اند، T نیز برای هر حرکت داده شده دستگاه فقط تابعی از t است. مشتق T نسبت به زمان در این مفهوم با d/dt نشان داده خواهد شد. همین تذکرها در مورد هر کمیت دیگری که ممکن است به صورت تابعی از مختصات و سرعتها و شاید t نوشته شود و برای هر حرکت داده شده که فقط تابعی از t باشد، معتبر است.

اگر نیروها معلوم باشند می توانیم δW را برای هر مجموعه‌ای از تغییر مکانهای کوچک $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ محاسبه کنیم. برعکس، اگر کار δW ، به طور تجربی یا نظری، برای هر تغییر مکان $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ معلوم باشد، معادله (۹-۲۶) نیروها را معین خواهد کرد. برای پیدا کردن نیروها باید معادله (۹-۲۶) را بر حسب $3N$ مجموعه‌های مستقل از تغییر مکانها نوشت. مجموعه نمونه‌های $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ و این طور منظور شده است که بیان‌کننده هر تغییر مکانهای کوچک ممکن باشد. این را یک تغییر مکان مجازی دستگاه می‌نامیم زیرا لازم نیست که نماینده حرکت واقعی دستگاه باشد. نمونه‌های $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ را می‌توان بر حسب مختصات تعمیم یافته به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta y_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta z_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k, \end{aligned} \quad (27-9)$$

که در آن $\delta q_1, \dots, \delta q_{3N}$ اختلافات مربوط به دو مجموعه از مواضع ذرات در مختصات تعمیم یافته‌اند. در مورد یک دستگاه مختصات متحرک، زمان را ثابت فرض می‌کنیم یعنی تغییراتی مکانی را بر حسب دستگاه مختصات در یک زمان خاص t تصریح می‌کنیم. اگر معادله (۹-۲۷) را در معادله (۹-۲۶) جایگزین کنیم، پس از مرتب کردن دوباره جملات داریم:

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} Q_k \delta q_k, \quad (28-9)$$

که در آن

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \quad (29-9)$$

ضرایب Q_k به نیروهای وارد بر ذرات و به مختصات q_1, \dots, q_{3N} و احتمالاً به زمان t بستگی دارند. نظر به تشابه شکل بین معادلات (۹-۲۶) و (۹-۲۸)، طبیعی است که کمیت Q_k را نیروی تعمیم یافته وابسته به مختصه q_k بنامیم. می‌توان نیروی تعمیم یافته Q_k را بی‌مراجعه به دستگاه مختصات دکارتی مستقیماً به صورت ضریبی تعریف کرد که کار انجام شده طی تغییر مکانی مجازی را که در آن q_k به تنهایی متغیر است، تعیین می‌کند:

$$\delta W_k = Q_k \delta q_k, \quad (30-9)$$

که در آن δW_k عبارت است از کار انجام شده وقتی که دستگاه چنان حرکت کند که q_k به اندازه δq_k افزایش یابد و بقیه مختصات ثابت باقی بمانند. توجه کنید که کار در معادله (۹-۲۶) و در نتیجه همچنین در معادله (۹-۳۰) باید از اندازه‌های نیروها برای مکانهای $x_1, \dots, x_N, z_1, \dots, z_N, q_1, \dots, q_{3N}$ حساب شوند. یعنی تغییرات نیروها را در هنگام تغییر مکان مجازی به‌شمار نمی‌آوریم.

اگر نیروهای F_{Nx}, \dots, F_{Nz} را بتوان از انرژی پتانسیل $V(x_1, \dots, z_N)$ به دست آورد، (معادلات (۴-۳۲)) در این صورت:

$$\begin{aligned} \delta W &= -\delta V \\ &= -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right). \end{aligned} \quad (۳۱-۹)$$

اگر V برحسب مختصات تعمیم یافته بیان شده باشد، در این صورت:

$$\begin{aligned} \delta W &= -\delta V \\ &= -\sum_{k=1}^{2N} \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k. \end{aligned} \quad (۳۲-۹)$$

از مقایسه معادله فوق با معادله (۹-۲۸) مشاهده می شود

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (۳۳-۹)$$

که نشان می دهد که تعریف Q_k به عنوان یک نیروی تعمیم یافته به این معنی نیز طبیعی است. معادله (۹-۳۳) را می توان با محاسبه مستقیم $\partial V / \partial q_k$ توجیه کرد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &= -\sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &= -Q_k. \end{aligned}$$

به عنوان مثال نیروهای تعمیم یافته وابسته به مختصات قطبی r, θ را برای ذره ای که تحت تأثیر

نیروی

$$F = \hat{x}F_x + \hat{y}F_y = \hat{r}F_r + \hat{\theta}F_\theta. \quad (۳۴-۹)$$

قرار می گیرد حساب می کنیم. با استفاده از تعریف (۹-۲۹) و معادله (۹-۱۵)، داریم:

$$\begin{aligned} Q_r &= F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \\ &= F_r, \end{aligned}$$

(۳۵-۹)

$$\begin{aligned} Q_\theta &= F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -rF_x \sin \theta + rF_y \cos \theta \\ &= rF_\theta. \end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که Q_r مؤلفه نیرو در جهت r و Q_θ گشتاور - نیرویی است که باعث افزایش θ می‌گردد. معمولاً راه سریع‌تر این است که تعریف (۹-۳۰) را به کار ببریم، زیرا از این راه می‌توانیم از دستگاه مختصات دکارتی به کلی اجتناب کنیم. اگر تغییر مکان کوچکی را در نظر بگیریم که در آن r به $r + \delta r$ تغییر کند و θ ثابت بماند، کار عبارت است از

$$\delta W = F_r \delta r, \quad (۹-۳۶)$$

که معادله اول (۹-۳۵) از آن نتیجه می‌شود. اگر تغییر مکانی را در نظر بگیریم که در آن r ثابت است و θ به اندازه $\delta \theta$ افزایش پیدا کند، کار عبارت است از:

$$\delta W = F_\theta r \delta \theta, \quad (۹-۳۷)$$

که معادله دوم (۹-۳۵) از آن نتیجه می‌شود. به‌طورکلی اگر q_k مختصه‌ای، یعنی مقیاس سنجش فاصله طی شده به وسیله قسمتی از دستگاه مکانیکی در جهتی باشد و اگر F_k مؤلفه نیروی کل وارد بر این قسمت از دستگاه در این جهت باشد، در این صورت کار انجام شده وقتی q_k به اندازه δq_k افزایش می‌یابد به شرط اینکه بقیه مختصات ثابت بمانند، عبارت است از:

$$\delta W = F_k \delta q_k. \quad (۹-۳۸)$$

از مقایسه معادله فوق با معادله (۹-۳۰) نتیجه می‌شود که:

$$Q_k = F_k. \quad (۹-۳۹)$$

در این حالت نیروی تعمیم‌یافته Q_k همان نیروی معمولی F_k است. اگر q_k دوران زاویه‌ای قسمت معینی از دستگاه حول محور معینی باشد و اگر N_k گشتاور نیروی کل (حول آن محور) وارد بر این قسمت از دستگاه باشد، کار انجام شده وقتی q_k به اندازه δq_k افزایش پیدا می‌کند عبارت است از:

$$\delta W = N_k \delta q_k. \quad (۹-۴۰)$$

از مقایسه این با معادله (۹-۳۰) نتیجه می‌شود که:

$$Q_k = N_k. \quad (۹-۴۱)$$

نیروی تعمیم‌یافته Q_k مربوط به مختصه زاویه‌ای q_k ، گشتاور - نیروی مربوط به آن است.

۲-۹ معادلات لاگرانژ

تشابهی که منجر به تعریف اندازه‌های حرکت تعمیم‌یافته شد ما را بر آن می‌دارد که گمان کنیم معادلات تعمیم‌یافته حرکت برابری میزان تغییرات هر اندازه حرکت p_k را با نیروی مربوط به آن Q_k برقرار خواهد کرد. برای امتحان این گمان میزان تغییرات p_k را نسبت به زمان حساب می‌کنیم:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right). \quad (۹-۴۲)$$

باید کار را از معادلات حرکت نیوتن به شکل دکارتی شروع کنیم:

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix},$$

$$m_i \ddot{y}_i = F_{iy}, \quad [i = 1, \dots, N] \quad (۹-۴۳)$$

$$m_i \ddot{z}_i = F_{iz}.$$

بنابراین T را در مختصات دکارتی (معادله ۹-۸) بیان می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad (۴۴-۹)$$

که در آن $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, \dot{z}_N$ طبق معادلات (۹-۶) به صورت توابعی از $q_1, q_2, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N}$ داده می‌شوند. چون $\partial x_i / \partial q_k$ و $\partial x_i / \partial t$ فقط توابعی از q_1, q_2, \dots, q_{3N} و t هستند؛ از مشتق‌گیری معادلات (۹-۶) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \\ \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \\ \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial z_i}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad [i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, 3N] \quad (۴۵-۹)$$

از جایگزین کردن معادلات (۹-۴۵) در معادله (۹-۴۴) و مشتق‌گیری دوباره نسبت به زمان داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d p_k}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned} \quad (۴۶-۹)$$

بنا به معادلات حرکت نیوتن (۹-۴۳) و تعریف (۹-۲۹)، عبارت اول معادله (۹-۴۶) عبارت است از

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = Q_k. \end{aligned} \quad (۴۷-۹)$$

مشتق‌هایی که در عبارت آخر معادله (۹-۴۶) ظاهر می‌شوند به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}, \quad (۴۸-۹)$$

که در آن از معادله (۹-۶) استفاده شده است. روابط مشابه برای y و z برقرار است. بنابراین مجموع آخر در معادله (۹-۴۶) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{\partial T}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (۴۹-۹)$$

بالاخره داریم

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, 3N. \quad (50-9)$$

انتظار اولیه ما مبنی بر اینکه باید جمله $\partial T / \partial q_k$ را به نیروی تعمیم یافته Q_k اضافه کرد تا میزان تغییرات اندازه حرکت \dot{p}_k به دست آید، کاملاً صحیح نبود. برای پی بردن به معنی آن، انرژی جنبشی یک ذره را در دستگاه مختصات قطبی به صورت داده شده به وسیله معادله (۹-۱۴) در نظر بگیرید. در این حالت،

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad (51-9)$$

و با به کار بردن معادله‌های (۹-۲۲) و (۹-۳۵)، معادله حرکت (۹-۵۰) برای $q_k = r$ عبارت است از:

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\theta}^2. \quad (52-9)$$

از مقایسه معادله فوق با معادله (۳-۲۰۷) که از کاربرد مستقیم قانون حرکت نیوتن نتیجه می‌شود، مشاهده می‌کنیم که جمله $\partial T / \partial r$ قسمتی از جرم ضرب در شتاب است که به سمت راست معادله منتقل شده است. در واقع $\partial T / \partial r$ «نیروی گریز از مرکز» است که برای نوشتن معادله حرکت r (به شکل معادله نیوتن برای حرکت در یک خط مستقیم) باید اضافه شود. اگر از اول کمی تیزبین‌تر بودیم، باید انتظار داشتیم که منظور کردن چنین جمله‌ای ضروری باشد. $\partial T / \partial q_k$ را ممکن است «نیروی کاذب» نامید و هنگامی ظاهر می‌شود که انرژی جنبشی به مختصه q_k بستگی داشته باشد. این حالت وقتی است که دستگاه مختصات شامل مختصات «منحنی الخط» باشد، یعنی هرگاه که سرعت‌های تعمیم یافته ثابت $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$ باعث حرکت‌های منحنی الخط بعضی از قسمت‌های دستگاه مکانیکی گردند. معادلات (۹-۵۰) معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, 3N. \quad (53-9)$$

اگر انرژی پتانسیلی طوری موجود باشد که نیروهای Q_k را بتوان از یک تابع انرژی پتانسیل معادله (۹-۳۳) به دست آورد، تابع لاگرانژ را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد:

$$L(q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}; t) = T - V, \quad (54-9)$$

که در آن T به q_1, \dots, q_{3N} و به $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$ بستگی دارد، ولی V فقط به q_1, \dots, q_{3N} (و احتمالاً t) وابسته است به طوری که

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}, \quad (55-9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k. \quad (56-9)$$

بنابراین در این حالت معادلات (۹-۵۳) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, 3N. \quad (57-9)$$

تقریباً در تمام موارد مهم فیزیک (هر چند نه در مهندسی)، معادلات حرکت را می توان به صورت معادلات لاگرانژ (۹-۵۷) نوشت. مهمترین استثنا حالتی است که نیروهای اصطکاک وجود دارند ولی چنین نیروهایی معمولاً در مسائل اتمی و نجومی ظاهر نمی شوند.

چون معادلات لاگرانژ از معادلات حرکت نیوتن به دست آمده اند به منزله یک نظریه جدید فیزیکی نیستند بلکه تنها روش دیگر ولی معادلی برای بیان همان قوانین حرکت اند. همان طور که مثال معادلات (۹-۵۲) و (۳-۲۰۷) نشان می دهد، معادلاتی که از روش لاگرانژ به دست می آوریم از کاربرد مستقیم قانون حرکت نیوتن نیز به دست می آیند. ولی در حالات پیچیده معمولاً آسانتر این است که انرژی جنبشی و نیروها یا انرژی پتانسیل را در مختصات تعمیم یافته به دست آوریم و معادلات را به شکل لاگرانژی بنویسیم. مخصوصاً در مسائلی که شامل قیودند، همان طور که در بخش ۹-۴ خواهیم دید، کاربرد روش لاگرانژ بسیار ساده تر است، اما ارزش اصلی معادلات لاگرانژ ارزشی نظری است. از طریقی که آنها را به دست آوردیم آشکار است که معادلات لاگرانژ (۹-۵۷) یا (۹-۵۳) در هر دستگاه مختصات تعمیم یافته به همان شکل برقرارند. با محاسبه مستقیم (مسئله ۲۴ را ببینید) نیز می توان تحقیق کرد که اگر معادلات (۹-۵۷) در هر دستگاه مختصات تابع $L(q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}; t)$ برقرار باشد، معادلات هم شکل آن در هر دستگاه مختصات دیگر هم برقرار است. تابع لاگرانژی L با هر دستگاه مختصات که بیان شود برای هر مجموعه از مکانها و سرعتهای ذرات دارای یک مقدار است ولی شکل تابع L در دستگاههای مختصات مختلف ممکن است مختلف باشد. این حقیقت که معادلات لاگرانژ در تمام دستگاههای مختصات دارای یک شکل است، مهمترین دلیل اهمیت نظری آنها است. معادلات لاگرانژ به منزله روش یک شکلی برای نوشتن معادلات حرکت یک دستگاه فیزیکی اند که از نوع دستگاه مختصات به کار رفته مستقل است. این معادلات به منزله نقطه شروع بیان ریاضی پیشرفته تر مکانیک اند. در توسعه نظریه نسبیت عام که در آن مختصات دکارتی ممکن است حتی وجود نداشته باشد، معادلات لاگرانژ اهمیت خاصی دارند.

۹-۳ مثالها

ابتدا دستگاهی از ذرات m_1, \dots, m_N را که مکان آنها با مختصات دکارتی معین است، در نظر می گیریم و نشان می دهیم که در این حالت معادلات لاگرانژ تبدیل به معادلات حرکت نیوتن می شوند. انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad (58-9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0, \quad (59-9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i. \quad (60-9)$$

چنانکه از معادله (۲۹-۹) یا از مقایسه معادله (۲۸-۹) با (۲۶-۹) مشاهده می شود نیروی تعمیم یافته وابسته به هر مختصه دکارتی همان نیروی معمولی است. بنابراین معادلات حرکت (۵۳-۹) عبارت اند از

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = m_i \ddot{x}_i = F_{ix},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} = m_i \ddot{y}_i = F_{iy}, \quad [i = 1, \dots, N] \quad (61-9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_i} = m_i \ddot{z}_i = F_{iz}.$$

برای ذره ای که در صفحه ای حرکت می کند، انرژی جنبشی در مختصات قطبی به وسیله معادله (۱۴-۹) و نیروهای Q_r و Q_θ به وسیله معادلات (۳۵-۹) داده می شوند. معادلات لاگرانژ عبارت اند از

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r, \quad (62-9)$$

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta. \quad (63-9)$$

این معادلات در بخش ۳-۱۳ با روشهای مقدماتی به دست آمدند.

اکنون دستگاه مختصات دوران کننده ای را در نظر می گیریم که به وسیله معادلات (۴-۹) یا (۵-۹) تعریف شده است. انرژی جنبشی به وسیله معادله (۱۶-۹) داده شده است و نیروهای تعمیم یافته Q_r و Q_θ مانند مثال قبلی خواهند بود. در این حالت معادلات لاگرانژ عبارت اند از

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - 2m\omega r\dot{\theta} - m\omega^2 r = F_r, \quad (64-9)$$

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) + 2m\omega r\dot{r} = rF_\theta. \quad (65-9)$$

خواننده باید تحقیق کند که جمله سوم سمت چپ معادله (۶۴-۹) برابر نیروی کوریولی ناشی از دوران دستگاه مختصات در جهت r با علامت منفی است و جمله چهارم نیروی گریز از مرکز با علامت منفی است. جمله دوم در معادله (۶۵-۹) گشتاور کوریولی در جهت θ با علامت منفی است. بنابراین وقتی معادلات لاگرانژ را در یک دستگاه مختصات متحرک می نویسیم، نیروهای کاذب لازم خودبه خود منظور می شوند. لکن باید توجه داشت که ما انرژی جنبشی واقعی را (معادله ۱۶-۹)) نسبت به یک دستگاه مختصات ساکن که بر حسب مختصات دوران کننده بیان

شده است به کار می‌بریم نه انرژی جنبشی که اگر از حرکت دستگاه مختصات صرف نظر می‌کردیم در دستگاه دوران‌کننده ظاهر می‌شد.

۹-۴ دستگاه‌های مقید

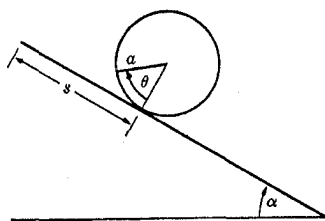
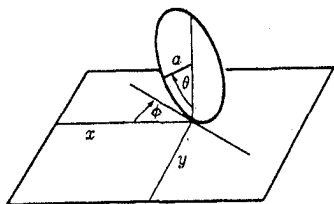
دسته مهمی از مسائل مکانیکی که در آنها معادلات لاگرانژ بسیار به کار می‌آیند دستگاه‌های مقیدند. جسم صلب مثال خوبی از دستگاهی از ذرات مقید است. قید محدودیتی بر آزادی حرکت دستگاهی از ذرات به صورت شرطی است که باید توسط مختصات آنها یا به وسیله تغییرات مجاز در مختصات آنها، برقرار شود. به عنوان مثال، یک جسم صلب فرضی بسیار ساده، یک جفت ذره است که به وسیله میله صلب بی‌وزنی به طول l به هم وصل شده باشند. این ذرات مقیدند به این که به فاصله l از یکدیگر قرار گیرند. این قید بر حسب مختصات دکارتی ذرات، عبارت است از

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = l. \quad (9-66)$$

اگر مختصات X, Y, Z مرکز جرم و مختصات کروی r, θ, φ را برای تعیین مکان ذره ۲ نسبت به ذره ۱ که مبدأ فرض می‌شود، به کار ببریم، قید، شکل ساده‌تر را پیدا می‌کند

$$r = l. \quad (9-67)$$

بنابراین فقط پنج مختصه X, Y, Z, θ, φ باقی است که باید تعیین شود. هر قیدی که بتوان آن را به صورت معادله‌ای مانند (۹-۶۶) بیان داشت، ما را قادر می‌سازد که از طریق انتخاب مختصات به طریقی که یکی از آنها به وسیله قید ثابت نگه داشته شود، یکی از مختصات را حذف کنیم. در مورد یک جسم صلب، قیده‌ها ایجاب می‌کنند که فواصل متقابل هر جفت از ذرات، ثابت باقی بمانند. در جسمی که شامل N ذره است، $(1/2)N(N-1)$ جفت ذره وجود دارد مع‌هذا می‌توان نشان داد که اگر $N \geq 3$ کافی است فواصل متقابل $6 - 3N$ جفت ذره را معین کرد. بنابراین می‌توان به جای $3N$ مختصه دکارتی N ذره، $6 - 3N$ فاصله متقابل و 3 مختصه مرکز جرم و 3 مختصه برای طرز قرارگیری جسم قرار داد. چون $6 - 3N$ فاصله متقابل همگی ثابت‌اند، مسئله منجر می‌شود به مسئله پیدا کردن حرکت بر حسب شش مختصه. حرکت دانه تسبیح بر روی سیم، مثال دیگری است از دستگاهی مقید. سیم در امتداد منحنی معینی در فضا قرار گرفته است، و قید ایجاب می‌کند که مکان دانه تسبیح بر روی این منحنی قرار گیرد. چون مختصات نقاط واقع بر یک منحنی فضایی در دو معادله (مثلاً معادلات دو سطحی که همدیگر را در امتداد منحنی قطع می‌کنند) صدق می‌کنند، دو قید موجود است و ما می‌توانیم مکان دانه تسبیح را به وسیله تنها یک مختصه مشخص کنیم. (آیا می‌توانید مختصه مناسبی پیشنهاد کنید؟) اگر سیم حرکت کند قیدی متحرک داریم و تک مختصه ما نسبت به یک دستگاه مقایسه متحرک است. قیودی که ممکن باشد به صورت معادله‌ای بیان شوند که مختصات را به هم مربوط کنند هولونومیک^۱ نامیده می‌شوند. تمام مثالهای بالا شامل قیود هولونومیک^۱ اند. قیود ممکن است به صورت محدودیتی روی سرعتها نیز بیان شوند. به عنوان مثال مکان



شکل ۳-۹ استوانه غلتان بر روی سطحی شیب‌دار. شکل ۴-۹ قرص غلتان بر روی صفحه‌ای افقی.

استوانه‌ای به شعاع a که با محور پیوسته افقی روی سطح شیب‌داری می‌گردد و می‌لغزد، ممکن است به وسیله دو مختصه s و θ طبق شکل ۳-۹ معین شود. مختصه s اندازه مسافتی است که استوانه بر روی سطح حرکت کرده است و مختصه θ زاویه دوران شعاع ثابتی از استوانه تا شعاع ماربر نقطه تماس استوانه با صفحه است. اکنون فرض کنید که استوانه بی‌لغزش می‌گردد. در این صورت سرعت‌های \dot{s} و $\dot{\theta}$ باید به وسیله معادله زیر به هم مربوط شوند

$$\dot{s} = a\dot{\theta}, \quad (۶۸-۹)$$

که ممکن است به صورت زیر نیز نوشته شود:

$$ds = a d\theta. \quad (۶۹-۹)$$

از انتگرال‌گیری معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$s - a\theta = C, \quad (۷۰-۹)$$

که در آن C یک ثابت است. این معادله از همان نوع معادله (۶۶-۹) است و نشان می‌دهد که قید هولونومیکی است اگرچه در آغاز بر حسب سرعتها بیان شده بود. اگر از قیدی بر سرعتها، مانند معادله (۶۸-۹)، بتوان انتگرال‌گیری کرد تا رابطه‌ای بین مختصات، مانند معادله (۷۰-۹) به دست آید، در این صورت قید هولونومیکی است. اما دستگاهایی وجود دارند که در آنها از چنین معادلات قیدی نمی‌توان انتگرال گرفت. مانند قرصی به شعاع a که مطابق شکل ۴-۹ بر روی میزی افقی می‌گردد. برای سهولت فرض می‌کنیم که قرص نمی‌افتد و قطری که با میز در تماس است همیشه قائم است. چهار مختصه برای مشخص کردن مکان قرص لازم است. مختصات x و y نقطه تماس میز بر روی سطح را معین می‌کند، زاویه φ طرز قرارگیری صفحه قرص را نسبت به محور x معین می‌کند و زاویه θ زاویه بین یک شعاع ثابت در قرص و امتداد قائم است. اکنون اگر بخواهیم که قرص بی‌لغزدن بگردد، (قرص ممکن است حول محور قائم نیز دوران کند)، متضمن آن است که دو معادله قیدی وجود داشته باشد. مؤلفه سرعت نقطه تماس عمود بر صفحه قرص باید صفر باشد:

$$\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi = 0, \quad (۷۱-۹)$$

و مؤلفه سرعت موازی با صفحه قرص باید چنین باشد:

$$\dot{x} \cos \varphi - \dot{y} \sin \varphi = a\dot{\theta}. \quad (۷۲-۹)$$

امکان ندارد که با انتگرال‌گیری از این دو معادله، دو رابطه بین مختصات x ، y ، θ ، φ به دست آورد. برای اینکه به این موضوع پی ببریم توجه می‌کنیم که با غلتاندن قرص بی‌لغزش و چرخاندن آن

حول یک محور قائم، می توان قرص را به هر نقطه x و y و هر زاویه φ بین صفحه قرص و محور x و هر نقطه تماس محیط قرص با میز، یعنی هر زاویه θ آورد. زیرا اگر قرص در هر نقطه x, y باشد و نقطه مورد نظر روی محیط آن با میز در تماس نباشد، می توان قرص را حول دایره ای با محیط مناسب غلتانید به طوری که وقتی به x, y برمی گردد نقطه مورد نظر با میز در تماس باشد و آنگاه می توان آن را به زاویه دلخواه φ دوران داد. این نشان می دهد که چهار مختصه x, y, θ, φ مستقل از یکدیگرند و هیچ رابطه ای ممکن نیست بین آنها وجود داشته باشد. بنابراین انتگرال گیری از معادلات (۹-۷۱) و (۹-۷۲) غیر ممکن خواهد بود و در نتیجه این مثالی از قید غیر هولونومیکی است.

تعداد راههای مستقلی که یک دستگاه مکانیکی ممکن است بی شکستن هیچ یک از قیودی که ممکن است بر آن تحمیل گردد، حرکت کند، تعداد درجات آزادی دستگاه نامیده می شود. به عبارت دقیق تر، تعداد درجات آزادی عبارت است از تعداد کمیت هایی که باید تصریح شوند تا بتوان سرعت های تمام ذرات دستگاه را برای هر حرکتی که قیود را حفظ کند، معین کرد. به عنوان مثال تک ذره ای که در فضا حرکت می کند دارای سه درجه آزادی است ولی اگر مقید شود که بر روی منحنی معینی حرکت کند فقط یک درجه آزادی دارد. دستگاهی از N ذره آزاد دارای $3N$ درجه آزادی است. یک جسم صلب دارای شش درجه آزادی است (سه تا انتقالی و سه تا دورانی) و جسم صلبی که مقید است حول محوری دوران کند، دارای یک درجه آزادی است. اگر قرص شکل ۹-۴ بتواند روی میز سر بخورد، چهار درجه آزادی خواهد داشت زیرا در این صورت باید x, y, θ ، و φ را تصریح کنیم. ولی اگر قرار باشد که قرص بی لغزش بغلتد، فقط دو درجه آزادی خواهد داشت زیرا اگر φ و یکی از سرعت های \dot{x} ، \dot{y} ، $\dot{\theta}$ داده شده باشند، دوتای باقیمانده را می توان از معادلات (۹-۷۱) و (۹-۷۲) پیدا کرد. قرص فقط آزاد است که بغلتد و حول یک محور قائم دوران کند. برای دستگاه های هولونومیکی تعداد درجات آزادی برابر است با حداقل تعداد مختصات لازم جهت تصریح طرز قرارگیری دستگاه وقتی که مختصاتی که توسط قیود ثابت نگه داشته شده اند حذف شوند. قیود غیر هولونومیکی در بعضی مسائل پیش می آیند که در آنها اجسام بی لغزیدن می غلتند، ولی این مسائل در فیزیک دارای اهمیت زیادی نیستند بنابراین توجه خود را به دستگاه های هولونومیکی محدود می کنیم.

برای یک دستگاه هولونومیکی N ذره ای که تحت c قید مستقل قرار دارد، می توانیم قیود را به صورت c رابطه که باید بین $3N$ مختصات دکارتی برقرار باشند، بیان کنیم (اگر قیود با زمان تغییر کنند، این مختصات احتمالاً شامل زمان نیز خواهد بود).

$$\begin{aligned} h_1(x_1, y_1, \dots, z_N; t) &= a_1, \\ h_2(x_1, y_1, \dots, z_N; t) &= a_2, \\ &\vdots \\ h_c(x_1, y_1, \dots, z_N; t) &= a_c, \end{aligned} \quad (9-73)$$

که در آن h_1, \dots, h_c عبارت اند از c تابع تصریح شده. تعداد درجات آزادی عبارت خواهد بود از

$$f = 3N - c. \quad (9-74)$$

چون معادلات (۷۳-۹) مستقل اند، می توان c تا از $3N$ مختصه دکارتی را بر حسب $3N-c$ مختصات دیگر و ثابتهای a_1, \dots, a_c از آنها به دست آورد. بنابراین کافی است فقط $3N-c$ مختصه را تصریح کرد و اگر ثابتهای a_1, \dots, a_c معلوم باشند، سایر مختصات را می توان از معادله (۷۳-۹) به دست آورد. می توانیم این $3N-c$ مختصات دکارتی و c کمیت a_1, \dots, a_c تعریف شده به وسیله معادلات (۷۳-۹) و ثابت نگه داشته به وسیله قیود را به عنوان مختصات تعمیم یافته در نظر بگیریم. یا می توانیم $3N-c$ مختصه تعمیم یافته q_1, \dots, q_f را به هر طریق مناسبی تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, y_1, \dots, z_N; t), \\ q_2 &= q_2(x_1, y_1, \dots, z_N; t), \\ &\vdots \\ q_f &= q_f(x_1, y_1, \dots, z_N; t). \end{aligned} \quad (۷۵-۹)$$

مجموعه ای از $3N$ مختصه $q_1, \dots, q_f, a_1, \dots, a_c$ توسط معادلات (۷۳-۹) و (۷۵-۹) تعریف می شوند که نظیر معادلات (۱-۹) اند. می توان مختصات دکارتی را با حل آنها به دست آورد:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, \dots, q_f; a_1, \dots, a_c; t), \\ y_1 &= y_1(q_1, \dots, q_f; a_1, \dots, a_c; t), \\ &\vdots \\ z_N &= z_N(q_1, \dots, q_f; a_1, \dots, a_c; t). \end{aligned} \quad (۷۶-۹)$$

حال فرض کنید که $Q_1, \dots, Q_f, \dots, Q_{f+c}, \dots, Q_{f+1}$ و نیروهای تعمیم یافته مربوط به مختصات $q_1, \dots, q_f, a_1, \dots, a_c$ باشند. بنابراین مجموعه ای از معادلات لاگرانژ برای مختصات مقید و مجموعه ای دیگر برای مختصات بی قید داریم

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, f, \quad (۷۷-۹)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_j} - \frac{\partial T}{\partial a_j} = Q_{f+j}, \quad j = 1, \dots, c; c+f = 3N. \quad (۷۸-۹)$$

اهمیت این تجزیه مسئله به دو گروه معادله این است که نیروهای قیدی را می توان چنان اختیار کرد که همان طور که، در بند بعد نشان خواهیم داد بی شکستن قیود هیچ کاری انجام ندهند. اگر این درست باشد در این صورت طبق تعریف (۳۰-۹) نیروی تعمیم یافته نیروهای قیدی در نیروی تعمیم یافته Q_k وابسته به یک مختصه آزاد از قید q_k سهمی نخواهند داشت. چون اندازه های مختصات مقید a_1, \dots, a_c ثابت نگه داشته می شوند می توانیم با حل معادلات (۷۷-۹)، حرکت دستگاه را بر حسب مختصات q_1, \dots, q_f و با در نظر گرفتن a_1, \dots, a_c به عنوان ثابتهای داده شده، و بی دانستن نیروهای قیدی به دست آوریم. این امتیازی بزرگ است زیرا نیروهای قیدی به چگونگی حرکت دستگاه بستگی دارند و به طور کلی نمی توان آنها را تعیین کرد مگر بعد از آنکه حرکت به دست آمده باشد. معمولاً اطلاع ما در مورد نیروهای قیدی منحصر به این است که آنها اندازه های لازم برای حفظ قیود را دارند. پس از حل معادلات (۷۷-۹) برای پیدا کردن $q_1(t), \dots, q_f(t)$ اگر مایل باشیم می توانیم این توابع را در معادلات (۷۸-۹)

جایگزین و نیروهای قیدی را حساب کنیم. این ممکن است برای مهندسی که باید تحقیق کند که آیا عناصر قیدی تاب پایداری در مقابل نیروهای قیدی را دارند یا نه، دارای اهمیت فراوان باشد، بنابراین معادلات لاگرانژ مسئله پیدا کردن حرکت هر دستگاه هولونومیکی را که دارای f درجه آزادی است به مسئله حل f معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۹-۷۷) منجر می‌کند. وقتی که صحبت از مختصات تعمیم یافته می‌کنیم، مختصات مقید a_1, \dots, a_c بنا به مصلحت ممکن است منظور بشوند یا نشوند.

اگر دانه تسبیحی بر روی سیم بی‌اصطکاکی سر بخورد، سیم فقط می‌تواند نیروهای قیدی عمود بر خود را بر آن وارد کند، بنابراین تا زمانی که دانه تسبیح روی سیم باقی بماند هیچ‌گونه کاری بر آن انجام نمی‌شود.^۱ اگر اصطکاک وجود داشته باشد، می‌توانیم نیروی وارد بر ذره را به یک مؤلفه عمود بر سیم که دانه را بر روی سیم نگه می‌دارد و کاری انجام نمی‌دهد، و یک مؤلفه اصطکاک در امتداد سیم که کار انجام می‌دهد و بنابراین باید در نیروی تعمیم یافته وابسته به حرکت در امتداد سیم منظور گردد، تجزیه کنیم. اگر نیروی اصطکاک، مانند حالت اصطکاک لغزشی خشک، به نیروی عمودی بستگی داشته باشد در این صورت نمی‌توانیم اول معادلات (۹-۷۷) را مستقل از معادلات (۹-۷۸) حل کنیم و بعضی امتیازات روش لاگرانژ از بین می‌روند. در این حالت، ابتدا معادلات (۹-۷۸) را به کار برده تا نیروهای عمودی را بر حسب $q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ به دست آوریم و سپس اینها را در جملات نیروی اصطکاکی در معادلات (۹-۷۷) جایگزین می‌کنیم. اگر دو ذره توسط میله صلبی به فاصله ثابتی از هم قرار گرفته باشند، طبق قانون سوم نیوتن، نیروی وارد به وسیله میله بر یکی از دو ذره با نیروی وارد بر دیگری مساوی و مختلف‌الجهت است. در بخش ۵-۱ نشان داده شده که تا وقتی که قیود حفظ شده باشند، یعنی تا وقتی که میله کشیده یا فشرده نشده باشد، کار خالصی به وسیله میله روی دستگاه انجام نمی‌شود. وضع مشابهی در تمام حالات دیگر پیدا می‌شود. قیود ممکن است همواره به وسیله نیروهایی حفظ شوند که هیچ‌گونه کاری انجام نمی‌دهند.

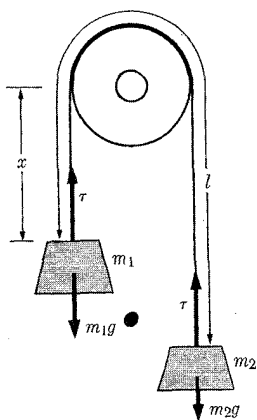
اگر نیروهای Q_1, \dots, Q_f را بتوان از یک تابع انرژی پتانسیل به دست آورد، در این صورت می‌توان یک تابع لاگرانژی $L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ تعریف کرد که ممکن است در بعضی حالات به t و همچنین ضرایب ثابت a_1, \dots, a_c بستگی داشته باشد. در این صورت f معادله اول لاگرانژ (۹-۷۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f. \quad (9-79)$$

۹-۵ مثالهایی از دستگاههای مقید

یک دستگاه مکانیکی ساده که قیودی دارد ماشین آتوود^۲ است که در شکل ۹-۵ نشان داده شده است. وزنه‌های m_1 و m_2 به وسیله ریسمانی به طول l واقع بر روی قورقه ثابتی به هم وصل

۱. اگر سیم متحرک باشد نیروی وارد توسط سیم ممکن است کاری بر روی دانه تسبیح انجام دهد ولی تغییر مکانهای مجازی که نیروهای تعمیم یافته بر حسب آنها تعریف شده‌اند باید این طور تصور شوند که در لحظه ثابتی از زمان رخ داده‌اند و برای چنین تغییر مکانی که از قیود سرپیچی نمی‌کند، کاری انجام داده نمی‌شود، بنابراین حتی در مورد قیود متحرک، نیروهای قیدی در نیروهای تعمیم یافته وابسته به مختصات بی‌قید ظاهر نمی‌شوند.



شکل ۵-۹ ماشین آنود.

شده‌اند. فرض می‌کنیم که وزنه‌ها فقط به‌طور قائم حرکت کنند. بنابراین فقط یک درجه آزادی وجود خواهد داشت. x ، فاصله m_1 از سطح محور قرقه و l طول ریسمان را به‌عنوان مختصات در نظر می‌گیریم. مختصه l مقید است که اندازه ثابتی داشته باشد و اگر منظور ما فقط پیدا کردن معادله حرکت دستگاه باشد، می‌توانیم آن را از اول نادیده انگاریم. ولی اگر پیدا کردن نیروی کشش ریسمان نیز مورد نظر باشد، باید l را به‌عنوان یک مختصه وارد کنیم. انرژی جنبشی عبارت است از:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{l} - \dot{x})^2. \quad (۸۰-۹)$$

تنها نیروهای وارد بر m_1 و m_2 نیروی کشش τ در ریسمان و نیروی ثقل است. وقتی l ثابت و x به اندازه δx افزایش یابد، کار انجام شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta W &= (m_1 g - \tau) \delta x - (m_2 g - \tau) \delta x \\ &= (m_1 - m_2) g \delta x = Q_x \delta x, \end{aligned} \quad (۸۱-۹)$$

که از اینجا

$$Q_x = (m_1 - m_2) g. \quad (۸۲-۹)$$

توجه کنید که Q_x مستقل از τ است. وقتی x ثابت و l به اندازه δl افزایش می‌یابد، کار انجام شده عبارت است از

$$\delta W = (m_2 g - \tau) \delta l = Q_l \delta l, \quad (۸۳-۹)$$

که از اینجا

$$Q_l = m_2 g - \tau. \quad (۸۴-۹)$$

توجه کنید که برای به‌دست آوردن معادله‌ای که شامل نیروی قیدی τ باشد، باید حرکتی را در نظر بگیریم که قید را می‌شکنند. این موضوع در مورد اندازه‌گیری یک نیرو به‌طور فیزیکی نیز درست است و باید لااقل حرکت کوچکی در جهت نیرو مجاز باشد. (چون $l = \dot{l} = 0$) معادلات حرکت لاگرانژ عبارت‌اند از:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = (m_1 + m_2) \ddot{x} = (m_1 - m_2) g, \quad (۸۵-۹)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{j}} \right) - \frac{\partial T}{\partial l} = -m_2 \ddot{x} = m_2 g - \tau. \quad (۸۶-۹)$$

برای پیدا کردن حرکت باید معادله اول را حل کنیم:

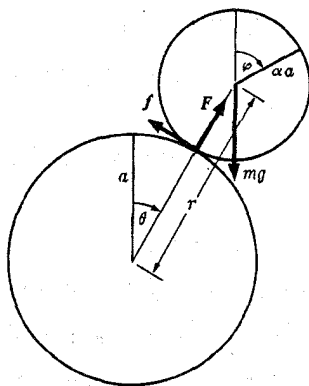
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{\gamma} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2. \quad (۸۷-۹)$$

سپس می توان معادله دوم را به کار برد و نیروی کشش τ لازم برای برقراری قید را به دست آورد.

$$\tau = m_2 (g + \ddot{x}) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (۸۸-۹)$$

در این حالت نیروی کشش مستقل از زمان است و می توان آن را بی درنگ از معادلات (۸۵-۹) و (۸۶-۹) به دست آورد اگرچه در اکثر حالات نیروهای قیدی به حرکت بستگی دارند و تنها بعد از پیدا شدن حرکت، معین می شوند. معادلات (۸۵-۹) و (۸۶-۹) دارای تفسیر فیزیکی واضحی اند و می توانستیم مانند بخش ۱-۷ مستقیماً با در نظر گرفتن ملاحظات اولیه بنویسیم.

مسئله ای که اهمیت عملی آن ناچیز ولی آموزندگی آن بسیار است، مسئله ای است که در آن استوانه ای همان طور که در شکل ۹-۶ نشان داده شده است بر روی استوانه دیگر می غلتد. استوانه ای که شعاع آن a است ثابت است و استوانه ای که شعاع آن αa است، تحت تأثیر نیروی ثقل دور آن می غلتد. فرض کنید که ضریب اصطکاک استاتیکی بین دو استوانه μ ، و ضریب اصطکاک لغزشی صفر است،^۱ و استوانه متحرک در حالی که مرکز آن به طور قائم در بالای مرکز استوانه ثابت قرار گرفته است از سکون شروع به حرکت می کند. فرض می کنیم که محور استوانه متحرک ضمن حرکت، همواره افقی باقی می ماند. در تمام مسائل به ویژه در این مسئله توصیه می شود که قبل از سعی در پیدا کردن راه حل ریاضی حرکت، به دقت راجع به آن فکر کنید. واضح است که استوانه متحرک نمی تواند دور تا دور استوانه ثابت بگردد زیرا نیروی قائم F که به وسیله استوانه ثابت به استوانه متحرک وارد می شود، فقط به سمت خارج است و هرگز به سمت داخل نیست. بنابراین



شکل ۹-۶ غلتیدن یک استوانه بر روی استوانه ای دیگر.

۱. این متضمن آن است که اگر اصطکاک استاتیکی به اندازه کافی زیاد باشد، استوانه متحرک بی لغزیدن می غلتد یا بی هیچ گونه اصطکاکی سر می خورد. فرض دوم برای ساده کردن مسئله منظور شده است.

استوانه متحرک از روی استوانه ثابت جدا خواهد شد. نقطه جدایی نقطه‌ای است که در آن:

$$F = 0. \quad (۸۹-۹)$$

به‌علاوه استوانه نمی‌تواند تا این نقطه بی‌لغزیدن بغلتد زیرا نیروی اصطکاک f که مانع سر خوردن می‌شود به وسیله شرط زیر محدود می‌شود

$$f \leq \mu F, \quad (۹۰-۹)$$

و محققاً μF قبل از نقطه‌ای که در آن معادله (۸۹-۹) برقرار است آنقدر کوچک می‌شود که نمی‌تواند مانع سر خوردن شود. بنابراین حرکت به سه قسمت تقسیم می‌شود. اول استوانه بی‌سر خوردن به اندازه زاویه θ_1 که به وسیله شرط

$$f = \mu F. \quad (۹۱-۹)$$

تعیین می‌شود، می‌غلتد. بعد از زاویه θ_1 ، استوانه بی‌اصطکاک سر می‌خورد تا به زاویه θ_2 که به وسیله معادله (۸۹-۹) معین می‌شود برسد و بعد از آن از استوانه ثابت جدا می‌شود و آزادانه می‌افتد. ممکن است انتظار داشته باشیم که چون وضع اولیه استوانه متحرک، تعادلی ناپایدار است، چند اشکال ریاضی مربوط به قسمت اول حرکت به وجود آید. از نظر فیزیکی مشکلی در کار نیست زیرا کوچکترین اختلال سبب می‌شود که استوانه به طرف پایین بغلتد. ولی از نظر ریاضی ممکن است مشکلی وجود داشته باشد که نظر به اینکه اختلال مختصر لازم در معادلات ظاهر نمی‌شود، باید مراقب آن بود.

اینک آن قسمت از حرکت را که استوانه متحرک بی‌سر خوردن می‌غلتد پیدا می‌کنیم. در این صورت فقط یک درجه آزادی وجود دارد و ما مکان استوانه را به وسیله زاویه θ بین قائم و خط واصل مراکز دو استوانه مشخص می‌کنیم. برای محاسبه انرژی جنبشی، زاویه کمکی φ را که استوانه متحرک به اندازه آن حول محورش چرخیده است، وارد می‌کنیم. شرط غلتش بی‌لغزش استوانه به معادله قیدی زیر منجر می‌شود:

$$a\dot{\theta} = \alpha a(\dot{\varphi} - \dot{\theta}), \quad (۹۲-۹)$$

که از انتگرال‌گیری آن نتیجه می‌شود:

$$(1 + \alpha)\theta = \alpha\varphi. \quad (۹۳-۹)$$

اگر فقط حرکت غلتشی مورد نظر بود اکنون می‌توانستیم به تشکیل معادله لاگرانژ برای θ پردازیم، ولی تا جایی که به دانستن نیروهای قیدی F و f احتیاج داریم لازم است که مختصات دیگری به کار وارد کنیم که به وسیله این نیروهای قیدی ثابت نگه داشته می‌شوند. نیروی اصطکاک f قید (۹۳-۹) را برقرار می‌دارد و یک مختصه مناسب عبارت است از

$$\gamma = \theta - \frac{\alpha\varphi}{1 + \alpha}. \quad (۹۴-۹)$$

تا زمانی که استوانه بی‌سر خوردن بغلتد، $\gamma = 0$. γ زاویه لغزش حول استوانه ثابت است. نیروی

قائم F فاصله r مراکز استوانه‌ها را ثابت نگه می‌دارد:

$$r = a + \alpha a = (1 + \alpha)a. \quad (۹۵-۹)$$

انرژی جنبشی استوانه غلتان عبارت است از مجموع انرژی وابسته به حرکت مرکز جرم آن و انرژی دورانی حول مرکز جرم:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2. \quad (۹۶-۹)$$

چون برای یک استوانه توپر به شعاع αa ، گشتاور ماند $I = \frac{1}{2}m\alpha^2 a^2$ ، با جایگزین کردن φ از معادله (۹۴-۹) داریم:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(1 + \alpha)^2 a^2 (\dot{\theta}^2 - 2\dot{\gamma}\dot{\theta} + \dot{\gamma}^2). \quad (۹۷-۹)$$

معادلات قیدی ((۹۵-۹) و $\gamma = 0$) نباید به کار برده شوند مگر بعد از اینکه معادلات حرکت نوشته شده باشند. نیروهای تعمیم‌یافته را به‌سادگی می‌توان با کمک معادله (۹-۳۰) تعیین کرد. آنها عبارت‌اند از:

$$Q_\theta = mgr \sin \theta, \quad (۹۸-۹)$$

$$Q_\gamma = -fa(1 + \alpha), \quad (۹۹-۹)$$

$$Q_r = F - mg \cos \theta. \quad (۱۰۰-۹)$$

اکنون معادلات لاگرانژ برای θ ، γ ، و r عبارت‌اند از:

$$m[r^2 + \frac{1}{2}\alpha^2(1 + \alpha)^2]\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - \frac{1}{2}ma^2(1 + \alpha)^2\ddot{\gamma} = mgr \sin \theta, \quad (۱۰۱-۹)$$

$$-\frac{1}{2}ma^2(1 + \alpha)^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ma^2(1 + \alpha)^2\ddot{\gamma} = -fa(1 + \alpha), \quad (۱۰۲-۹)$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F - mg \cos \theta. \quad (۱۰۳-۹)$$

حال می‌توان قیود $r = (1 + \alpha)a$ و $\gamma = 0$ را داخل کرد و معادلات فوق را به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{3}{2}(1 + \alpha)^2 ma^2 \ddot{\theta} = (1 + \alpha) m g a \sin \theta, \quad (۱۰۴-۹)$$

$$f = \frac{1}{2}(1 + \alpha) m a \ddot{\theta}, \quad (۱۰۵-۹)$$

$$F = mg \cos \theta - (1 + \alpha) m a \dot{\theta}^2. \quad (۱۰۶-۹)$$

اگر ما از عبارات شامل $\dot{\gamma}$ در انرژی جنبشی چشم‌پوشی می‌کردیم معادله θ که معادله حرکت را تعیین می‌کند به‌طور صحیح به‌دست می‌آید، ولی معادله نیروی قیدی f یک جمله کم می‌داشت. این هنگامی اتفاق می‌افتد که مختصات مقید بر مختصات بی‌قید عمود نباشند زیرا در این صورت جمله $(\dot{\gamma}\dot{\theta})$ در انرژی جنبشی ظاهر می‌شود.

معادله حرکت ((۹-۱۰۴) را می‌توان به‌وسیله روش انرژی حل کرد. انرژی کل تا زمانی که استوانه

بی‌سر خوردن می‌غلتد عبارت است از

$$\frac{3}{4}(1 + \alpha)^2 m a^2 \dot{\theta}^2 + (1 + \alpha) m g a \cos \theta = E, \quad (۱۰۷-۹)$$

و همان طور که از معادله (۹-۱۰۴) به آسانی می توان نشان داد، مقدار ثابتی است و در هر حال می دانیم که ثابت است، زیرا نیروی ثقل کنسرواتیو است و نیروهای قیدی کاری انجام نمی دهند. چون استوانه متحرک از $\theta = 0$ از حالت سکون شروع به حرکت می کند، داریم:

$$E = (1 + \alpha)mga. \quad (9-108)$$

با جایگزین کردن این معادله در معادله (۹-۱۰۷) و حل آن، θ نتیجه می شود:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\left(\frac{\beta g}{a}\right)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{\gamma}, \quad (9-109)$$

که در آن

$$\beta = \frac{\gamma}{3(1 + \alpha)}. \quad (9-110)$$

اکنون می توان انتگرال گرفت و $\theta(t)$ را به دست آورد:

$$\int_0^\theta \frac{(1/\gamma) d\theta}{\sin \theta/\gamma} = \left(\frac{\beta g}{a}\right)^{1/2} \int_0^t dt, \quad (9-111)$$

$$\left[\ln \tan \frac{\theta}{\gamma}\right]_0^\theta = \left(\frac{\beta g}{a}\right)^{1/2} t. \quad (9-112)$$

وقتی حد پایین $\theta = 0$ را جایگزین می کنیم با اشکالی مواجه می شویم زیرا $-\infty = \ln 0$! این همان مشکلی است که انتظارش را داشتیم و ناشی از این حقیقت است که $\theta = 0$ یک نقطه تعادل است، اگرچه تعادل ناپایدار. اگر هیچ گونه اختلالی وجود نداشته باشد زمانی بی نهایت طولانی لازم است تا استوانه از نقطه تعادل بغلتد. اما فرض کنید که بر اثر اختلال ناچیزی استوانه از نقطه تعادل فرو بغلتد و زمان $t = 0$ زمانی باشد که زاویه θ دارای مقدار کوچک θ_0 است، اکنون اشکالی وجود ندارد و داریم:

$$\tan \frac{\theta}{\gamma} = \left(\tan \frac{\theta_0}{\gamma}\right) \exp \left[\left(\frac{\beta g}{a}\right)^{1/2} t \right]. \quad (9-113)$$

هنگامی که $t \rightarrow \infty$ ، زاویه θ به سمت 2π میل می کند و اگر برقراری قیود ادامه داشته باشد استوانه متحرک دورادور استوانه ثابت می غلتد. لکن قید غلتش تا وقتی پابرجاست که معادله (۹-۹۰) برقرار باشد. با جایگزین کردن معادلات (۹-۱۰۵)، (۹-۱۰۶)، و (۹-۱۰۹)، معادله (۹-۹۰) به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{1}{3} mgs \sin \theta \leq \frac{1}{3} \mu mg (\nu \cos \theta - 4). \quad (9-114)$$

در $\theta = 0$ این نامساوی محققاً برقرار است به طوری که همان طور که فرض کرده ایم استوانه از ابتدا می غلتد. لکن در $\theta = \pi/2$ محققاً برقرار نیست چون در این حالت جمله سمت راست منفی و جمله سمت چپ مثبت است. زاویه θ_1 که در آن لغزیدن شروع می شود به وسیله معادله زیر تعیین می شود

$$\sin \theta_1 = \mu (\nu \cos \theta_1 - 4), \quad (9-115)$$

که جوابش عبارت زیر است:

$$\cos \theta_1 = \frac{28\mu^2 + [1 + 33\mu^2]^{1/2}}{1 + 49\mu^2} \quad (۱۱۶-۹)$$

قسمت دوم حرکت که طی آن استوانه متحرک بی اصطکاک دور استوانه ثابت می لغزد به وسیله حل معادلات (۱۰۱-۹) و (۱۰۲-۹) و به دست آوردن $\theta(t)$ و $\gamma(t)$ با $f = 0$ و تنها قید $r = (1 + \alpha)a$ و با مقادیر اولیه $\dot{\theta} = \dot{\theta}_1$ ، $\theta = \theta_1$ ، که به وسیله معادلات (۱۱۶-۹) و (۱۰۹-۹) تعیین شده است، به دست می آید. جواب بی اشکال اساسی به دست می آید و زاویه θ که در آن استوانه متحرک از استوانه ثابت جدا می شود به وسیله معادلات (۱۰۶-۹) و (۸۹-۹) تعیین می شود. این محاسبات را به عهده خواننده می گذاریم.

۹-۶ ثابتهای حرکت و مختصات قابل اغماض

در فصل ۳ متذکر شدیم که یک روش عمومی برای حل مسائل دینامیکی این است که ثابتهای حرکت را پیدا کنیم یعنی تابعی از مختصات و سرعتها که نسبت به زمان ثابت اند. یک حالت متداول که در آن چنین ثابتهایی پیدا می شوند هنگامی است که دستگاه دینامیکی به وسیله تابعی لاگرانژی مشخص می شود که در آن یک صفحه q_k به طور صریح ظاهر نشده است. در این صورت معادله لاگرانژ مربوط به (۵۷-۹) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0. \quad (۱۱۷-۹)$$

از این معادله می توان فوراً انتگرال گرفت:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \text{ثابت}. \quad (۱۱۸-۹)$$

بنابراین هر وقت که یک مختصه q_k در تابع لاگرانژ به طور صریح ظاهر نشود، p_k به اندازه حرکت مربوط به آن یک ثابت حرکت است. چنین مختصه q_k را مختصه قابل اغماض می گویند. اگر q_k قابل اغماض باشد می توان \dot{q}_k را از معادله (۱۱۸-۹) برحسب مختصات و سرعتهای دیگر و اندازه حرکت ثابت p_k ، به دست آورد و سپس در معادلات لاگرانژ باقیمانده جایگزین کرد تا \dot{q}_k حذف گردد و در نتیجه از تعداد متغیرهای مسئله یکی کم شود: q_k قبلاً در معادلات وجود نداشت زیرا قابل اغماض فرض شده بود). وقتی بقیه متغیرها به دست آمدند می توان آنها را در معادله (۱۱۸-۹) جایگزین کرد تا \dot{q}_k به صورت تابعی از t به دست آید. سپس می توان q_k را از راه انتگرال گیری به دست آورد. اگر تمام مختصات بجز یکی قابل اغماض باشند مسئله را می توان به مسئله ای یک بعدی تبدیل کرد و اگر تابع L به طور صریح به t بستگی نداشته باشد آن را با روش انتگرال انرژی حل کرد.

به عنوان مثال در مورد نیروهای مرکزی، انرژی پتانسیل فقط به فاصله r از مبدأ بستگی دارد بنابراین اگر مختصات قطبی r و θ در صفحه را به کار ببریم، V مستقل از θ خواهد بود. چون طبق معادله (۱۴-۹)، T نیز مستقل از θ است (البته T به θ بستگی دارد) خواهیم داشت

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (T - V) = 0, \quad (۱۱۹-۹)$$

و بنابراین

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m r^2 \dot{\theta} = p_{\theta} = \text{ثابت}, \quad (۱۲۰-۹)$$

این نتیجه‌ای است که ما در بخش ۳-۱۳ به روش دیگری به دست آوردیم. مشاهده می‌کنیم که ثابت بودن p_{θ} نتیجه‌ای از تقارن دستگاه نسبت به مبدأ است به طوری که L به θ بستگی ندارد.

اگر دستگاهی از ذرات تحت تأثیر نیروهای خارجی واقع نشود، در این صورت اگر تمام دستگاه را در هر جهتی چنان تغییر مکان دهیم که سرعتها و مکانهای نسبی ذرات تغییر نکنند در T یا V یا در L هیچ‌گونه تغییری حاصل نخواهد شد. اگر X, Y, Z مختصات دکارتی مرکز جرم باشند و اگر بقیه مختصات هم نسبت به مرکز جرم باشند به طوری که تغییر X به منزله تغییر مکان تمام دستگاه باشد در این صورت

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0, \quad (۱۲۱-۹)$$

و بنابراین p_X ، اندازه حرکت خطی کل در جهت x ثابت خواهد بود و این نتیجه‌ای است که در بخش ۴-۱ به روش دیگری ثابت کردیم.

جالب این است که ببینیم چگونه می‌توان با معادلات لاگرانژ نشان داد که انرژی کل، یک ثابت حرکت است. برای پیدا کردن یک انتگرال انرژی معادلات حرکت به شکل لاگرانژی، لازم است بدانیم چگونه انرژی کل بر حسب تابع لاگرانژی L بیان می‌شود. برای این منظور دستگاهی را در نظر می‌گیریم که بر حسب دستگاه مختصات ثابتی توصیف شده باشد به طوری که انرژی جنبشی T تابع درجه دوم همگنی از سرعتهای تعمیم یافته $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ باشد. (یعنی در معادله (۹-۱۳) $T_1 = T_0 = 0$). بنا به قضیه اولر^۱ داریم:

$$\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T. \quad (۱۲۲-۹)$$

بنابراین اگر

$$L = T - V, \quad (۱۲۳-۹)$$

که در آن V فقط تابعی از مختصات q_1, \dots, q_f است، در این صورت طبق معادله (۹-۱۲۲)

$$\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = T + V = E. \quad (۱۲۴-۹)$$

اکنون مشتق طرف چپ معادله (۹-۱۲۴) را نسبت به زمان در نظر می‌گیریم. برای کلیت بیشتر ابتدا L را تابع صریحی از t می‌گیریم. در حالتی که قبلاً در نظر گرفتیم، L به طور صریح به t بستگی نداشت. ولی حالاتی وجود دارد که یک دستگاه تحت تأثیر نیروهای خارجی قرار می‌گیرد که با زمان

۱. رجوع شود به صفحه ۹۰، مسئله ۹ از کتاب

W. Kaplan, *Advanced Calculus*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1952.

خواننده‌ای که با قضیه اولر ناآشنا است می‌تواند با جایگزین کردن $T = T_1$ از معادله (۹-۹)، معادله (۹-۱۲۲) را برای خود ثابت کند.

تغییر می‌کنند و می‌توان آنها را از تابع پتانسیلی به دست آورد که با زمان تغییر می‌کند، مانند اتمی که تحت تأثیر نیروی الکتریکی متغیری قرار می‌گیرد. در چنین حالاتی معادلات حرکت را می‌توان به صورت لاگرانژی (۹-۵۷) نوشت که در آن تابع لاگرانژ به طور صریح به t بستگی دارد. همچنین در مورد دستگاههای مختصات متحرک اگر چه نیروها کنسرواتیووند، تابع لاگرانژ ممکن است وابسته به زمان باشد. مشتق طرف چپ معادله (۹-۱۲۴) نسبت به زمان عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) &= \sum_{k=1}^f \left[\ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (۹-۱۲۵)$$

اگر L به طور صریح به t بستگی نداشته باشد، طرف راست معادله (۹-۱۲۵) صفر است و در نتیجه:

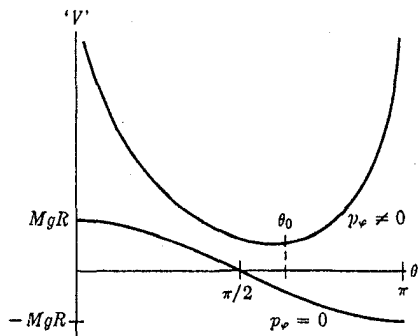
$$\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \text{ثابت}. \quad (۹-۱۲۶)$$

وقتی L مانند حالت دستگاههای مختصات ساکن به صورت $(T - V)$ باشد، معادله (۹-۱۲۶) همان قضیه بقای انرژی است. شکل تابع L هر چه باشد، وقتی که L به طور صریح شامل t نباشد، معادله (۹-۱۲۶) نمایش انتگرالی از معادلات لاگرانژ (۹-۵۷) است، ولی کمیت ثابت سمت چپ همیشه انرژی کل نیست. به تشابه بین بقای اندازه حرکت تعمیم یافته p_k وقتی که L مستقل از q_k است و بقای انرژی وقتی که L مستقل از t است، توجه کنید. تشابه رابطه بین زمان و انرژی از یک طرف و مختصه و اندازه حرکت مربوط به آن از طرف دیگر به صور مختلف ظاهر می‌شود.

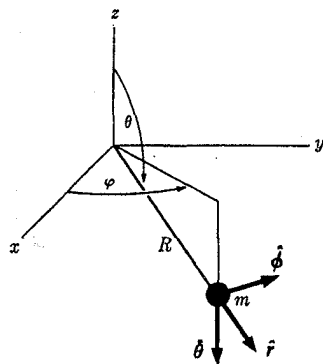
مشاهده کرده‌ایم که قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای را می‌توان نتایج تفاوت‌هایی دانست که دستگاههای مکانیکی که این قوانین در مورد آنها صادق‌اند، از خود نشان می‌دهند. یعنی این قوانین نتایجی از این واقعیت‌اند که تابع لاگرانژ L که تعیین‌کننده معادلات حرکت است، مستقل از زمان و مکان و طرز قرارگیری دستگاه در فضا است. این نتیجه که در اینجا برای مکانیک کلاسیک به دست آمد به طور کلی در سراسر فیزیک برقرار است. در مکانیک کوانتم و در نظریه نسبیت حتی در مواردی که نیروهای الکترومغناطیسی و انواع دیگر میدانهای نیرو را منظور می‌کنیم، قوانین بقا به تقارن معادلات اساسی مربوط می‌شوند. به عنوان مثال می‌توان انرژی را به صورت کمیتی تعریف کرد که ثابت است زیرا قوانین فیزیکی همیشه یکسان‌اند (اگر در حقیقت نیز چنین باشند!).

۹-۷ مثالهای دیگر

آونگ کروی آونگ ساده‌ای است که می‌تواند آزادانه تحت زاویه فضایی کاملی حول نقطه‌ای نوسان کند. گلوله آونگ مقید است که بر روی سطحی کروی به شعاع R حرکت کند. مکان گلوله را به وسیله مختصات کروی θ, φ تعیین می‌کنیم (شکل ۹-۷). اگر بخواهیم نیروی کشش ریسمان را پیدا کنیم می‌توانیم طول R آونگ را به عنوان یک مختصه در نظر بگیریم، ولی در اینجا این کار را نمی‌کنیم،



شکل ۸-۹ پتانسیل مؤثر $V'(\theta)$ برای آونگی کروی.



شکل ۷-۹ آونگی کروی.

زیرا فقط پیدا کردن حرکت مورد نظر است. اگر گلوله در بالای سطح افق نوسان کند، فرض می‌کنیم که همچنان بر روی کره باقی می‌ماند، چنانکه اگر به‌جای ریسمان از میله صلبی استفاده می‌شد صحت داشت. در غیر این صورت هرگاه تنشی فشاری برای نگهداری آن لازم باشد، قید از بین می‌رود زیرا ریسمان فقط نیروهای کشش را تحمل می‌کند نه فشار را. سرعت گلوله عبارت است از:

$$v = R\dot{\theta}\hat{\theta} + R\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}. \quad (۱۲۷-۹)$$

بنابراین انرژی جنبشی عبارت است از:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2. \quad (۱۲۸-۹)$$

انرژی پتانسیل ناشی از ثقل نسبت به صفحه افقی عبارت است از:

$$V = mgR\cos\theta. \quad (۱۲۹-۹)$$

بنابراین تابع لاگرانژ چنین است

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - mgR\cos\theta. \quad (۱۳۰-۹)$$

معادلات لاگرانژ عبارت‌اند از:

$$\frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}) - mR^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta = 0, \quad (۱۳۱-۹)$$

$$\frac{d}{dt}(mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0. \quad (۱۳۲-۹)$$

مختصه ϕ قابل اغماض است و از دومین معادله می‌توان بلافاصله انتگرال گرفت:

$$mR^2\sin^2\theta\dot{\phi} = p_\phi = \text{ثابت}. \quad (۱۳۳-۹)$$

همچنین چون

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (۱۳۴-۹)$$

کمیت

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + m g R \cos \theta \quad (۱۳۵-۹)$$

طبق معادله (۹-۱۲۶) ثابت است. کمیت سمت راست را به عنوان انرژی کل می‌شناسیم زیرا دستگانه مختصات ثابتی به کار می‌بریم. اگر این ثابت را E بنامیم و مقدار $\dot{\varphi}$ را از معادله (۹-۱۳۳) جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{2m R^2 \sin^2 \theta} + m g R \cos \theta = E. \quad (۱۳۶-۹)$$

ممکن است یک پتانسیل مؤثر $V'(\theta)$ برای حرکت به کار وارد کرد.

$$V'(\theta) = m g R \cos \theta + \frac{p_{\varphi}^2}{2m R^2 \sin^2 \theta}, \quad (۱۳۷-۹)$$

به طوری که

$$\frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 = E - V'(\theta). \quad (۱۳۸-۹)$$

چون سمت چپ ممکن نیست منفی باشد، حرکت محدود به مقادیری از θ می‌شود که برای آنها $V'(\theta) \leq E$. نمودار پتانسیل مؤثر $V'(\theta)$ در شکل ۹-۸ رسم شده است. می‌بینیم که برای $p_{\varphi} = 0$ ، تابع $V'(\theta)$ منحنی پتانسیل برای آونگی ساده است که می‌نیمی در $\theta = \pi$ و ماکزیممی در $\theta = 0$ دارد. اگر $E = -m g R$ آونگ در $\theta = \pi$ ساکن است. اگر $m g R > E > -m g R$ ، آونگ در اطراف $\theta = \pi$ نوسان می‌کند. اگر $E > m g R$ ، آونگ بین نقطه بالایی $\theta = 0$ و نقطه پایینی $\theta = \pi$ حرکتی دایره‌ای دارد. وقتی $p_{\varphi} \neq 0$ ، حرکت دیگر حرکت یک آونگ ساده نیست و $V'(\theta)$ دارای می‌نیممی در نقطه θ_0 بین $\pi/2$ و π است و در نقاط $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ به بی‌نهایت می‌رود. هر قدر p_{φ} بزرگتر باشد مقدار می‌نیمم تابع $V'(\theta)$ نیز بزرگتر و θ_0 به $\pi/2$ نزدیکتر است. اگر $E = V'(\theta_0)$ در این صورت θ ثابت و برابر θ_0 است و آونگ نیز در دایره‌ای حول محور قائم حرکت می‌کند. وقتی $p_{\varphi} \rightarrow \infty$ آونگ بیشتر و بیشتر در صفحه‌ای افقی نوسان می‌کند. اگر $E > V'(\theta_0)$ ، θ بین حداکثر و حداقلی نوسان می‌کند در حالی که آونگ حول محور قائم حرکت می‌کند. خواننده باید این نتایج را با ششم مکانیکی خود، یا تجربیات خود در مورد حرکت آونگی کروی، مقایسه کند. جواب $\theta(t)$ را نمی‌توان از معادله (۹-۱۳۸) برحسب توابع مقدماتی به دست آورد ولی حرکات دایره‌ای و تقریباً دایره‌ای را می‌توان به آسانی حل کرد. رابطه بین p_{φ} و θ_0 برای حرکت دایره‌ای یکنواخت آونگ حول محور z عبارت است از:

$$\left[\frac{dV'}{d\theta} \right]_{\theta_0} = -m g R \sin \theta_0 - \frac{p_{\varphi}^2 \cos \theta_0}{m R^2 \sin^3 \theta_0} = 0. \quad (۱۳۹-۹)$$

از این معادله آشکار است که $\theta_0 > \pi/2$ و وقتی $p_{\varphi} \rightarrow \infty$ ، $\theta_0 \rightarrow \pi/2$. با جایگزینی از

معادله (۹-۱۳۳) رابطه‌ای بین $\dot{\varphi}$ و θ برای حرکت دایره‌ای یکنواخت به دست می‌آوریم:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R} \frac{1}{(-\cos \theta_0)} \quad (9-140)$$

با به کار بردن معادلات (۹-۱۳۶) و (۹-۱۳۹) و این واقعیت که $\dot{\theta} = 0$ ، معادله انرژی برای حرکت دایره‌ای یکنواخت در یک زاویه θ_0 عبارت است از:

$$E_0 = \frac{mgR}{4} \left(\frac{2 - 3 \sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right) \quad (9-141)$$

برای یک انرژی کمی بزرگتر از E_0 و یک اندازه حرکت زاویه‌ای p_φ معلوم از معادله (۹-۱۳۹)، زاویه θ نوسانهای هارمونیک ساده‌ای حول θ_0 انجام خواهد داد. زیرا اگر

$$k = \left[\frac{d^2 V'}{d\theta^2} \right]_{\theta_0} = \frac{mgR}{-\cos \theta_0} (1 + 3 \cos^2 \theta_0), \quad (9-142)$$

در این صورت برای مقادیر کوچک $\theta - \theta_0$ می‌توانیم تابع $V'(\theta)$ را به صورت سری تیلور بسط دهیم:

$$V'(\theta) \doteq E_0 + \frac{1}{4} k (\theta - \theta_0)^2 \quad (9-143)$$

معادله انرژی (۹-۱۳۸) اکنون به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} k (\theta - \theta_0)^2 = E - E_0 \quad (9-144)$$

این انرژی یک نوسانگر هارمونیک با انرژی $E - E_0$ و مختصه $\theta - \theta_0$ و جرم $m R^2$ و ضریب ثابت k است. بنابراین فرکانس نوسان بر حسب θ از معادله زیر حاصل می‌شود

$$\omega^2 = \frac{k}{m R^2} = \frac{g}{R} \frac{1 + 3 \cos^2 \theta_0}{-\cos \theta_0} \quad (9-145)$$

این نوسان بر حسب θ با حرکتی دایره‌ای حول محور z با سرعت زاویه‌ای $\dot{\varphi}$ ، که به وسیله معادله (۹-۱۳۳) داده شده است، ترکیب می‌شود. هنگامی که θ نوسان می‌کند $\dot{\varphi}$ کمی تغییر می‌کند ولی تقریباً مساوی مقدار ثابتی می‌ماند، که به وسیله معادله (۹-۱۴۰) داده شده است. بد نیست که $\dot{\varphi}$ و ω را با هم مقایسه کنیم:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega^2} = \frac{1}{1 + 3 \cos^2 \theta_0} \quad (9-146)$$

چون $\theta_0 > \pi/2$ ، این نسبت از یک کمتر است و در نتیجه $\omega > \dot{\varphi}$ و آونگ در حین حرکت دایره‌ای، به بالا و پایین می‌لنگد. وقتی $\theta_0 = \pi/2$ ، $\dot{\varphi} = \omega$ و آونگ در صفحه‌ای که کمی نسبت به افق کج شده است حرکت دایره‌ای می‌کند. این حالت فقط در حد مقادیر بسیار زیاد p_φ اتفاق می‌افتد. از نظر فیزیکی روشن است که وقتی p_φ آنقدر بزرگ باشد که بتوانیم ثقل را قابل اغماض بدانیم، حرکت ممکن است در هر صفحه‌ای که از مبدأ می‌گذرد دایره‌ای باشد. آیا شما می‌توانید این موضوع را به صورت ریاضی نشان دهید؟ در نزدیکی $\theta_0 = 0$ ، $\omega = 2\dot{\varphi}$ ، بنابراین θ در هر دور دو مرتبه نوسان می‌کند و گلوله آونگ بر مدارای به شکل بیضی حرکت می‌کند که مرکز آن بر روی محور z قرار گرفته

است. این نظیر حرکت نوسانگر هارمونیک دوبعدی است که در بخش ۳-۱۰ مورد بحث بود و فرکانسهای آن با هم مساوی و در دو جهت عمود بر هم اند.

به عنوان آخرین مثال دستگاهی را در نظر می‌گیریم که شامل قیود متحرک است. دانهٔ تسبیحی به جرم m بر روی حلقه‌ای مدور به شعاع a بی‌اصطکاک می‌لغزد. حلقه در صفحهٔ قائمی قرار گرفته است که مقید است با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول قطر قائم بچرخد. فقط یک درجهٔ آزادی وجود دارد و چون به نیروهای قیدی کاری نداریم تنها یک مختصهٔ θ را که قوسی از دایره از پای قطر قائم تا دانه است، اختیار می‌کنیم (شکل ۹-۹). انرژی جنبشی در این صورت عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2 \theta, \quad (۹-۱۴۷)$$

و انرژی پتانسیل عبارت است از

$$V = -mga \cos \theta. \quad (۹-۱۴۸)$$

تابع لاگرانژ چنین است:

$$L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2 \theta + mga \cos \theta. \quad (۹-۱۴۹)$$

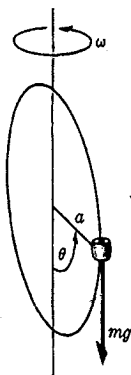
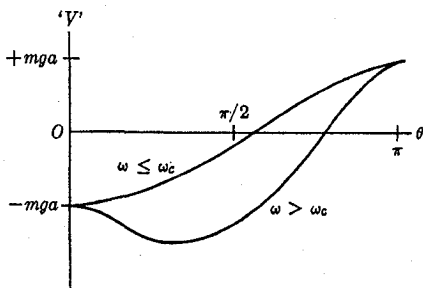
معادلهٔ حرکت لاگرانژ را به راحتی می‌توان نوشت ولی این کار ضروری نیست، زیرا توجه می‌کنیم که

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

و بنابراین طبق معادلهٔ (۹-۱۲۶)، کمیت

$$\theta \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta = 'E' \quad (۹-۱۵۰)$$

ثابت است. ثابت 'E' را نباید انرژی کل $T+V$ دانست زیرا جملهٔ وسطی دارای علامت نادرست است. واضح است که انرژی کل در این حالت ثابت نیست. (نیروی انجام‌دهندهٔ کار که موجب تغییرات در $T+V$ می‌شود کدام است؟). اما باید توجه کنیم که معادلهٔ (۹-۱۴۹) را می‌توان



شکل ۹-۱۰ انرژی پتانسیل مؤثر برای دستگاهی که در شکل ۹-۹ نشان داده شده است.

شکل ۹-۹ دانهٔ تسبیح لغزان روی حلقهٔ چرخان.

به عنوان یک تابع لاگرانژ در یک دستگاه مختصات ثابت تفسیر کرد که در آن جمله وسطی به عنوان قسمتی از یک انرژی پتانسیل مؤثر در نظر گرفته شده است.

$$V'(\theta) = -\frac{1}{\gamma} m a' \omega' \sin^2 \theta - m g a \cos \theta. \quad (151-9)$$

بنا به این تفسیر، 'E' همان انرژی است. جمله اول $V'(\theta)$ انرژی پتانسیل وابسته به نیروی گریز از مرکز است که اگر دستگاه دوار را ساکن بیانگاریم، باید اضافه شود. پتانسیل مؤثر در شکل ۹-۱۰ رسم شده است. شکل منحنی پتانسیل بستگی به بزرگتر یا کوچکتر بودن ω از یک سرعت زاویه‌ای بحرانی دارد:

$$\omega_c = (g/a)^{1/2}. \quad (152-9)$$

به عهده خواننده است که نکته فوق را تحقیق، و در باره چگونگی حرکت دانه در دو حالت بحث کند.

۸-۹ نیروهای الکترومغناطیسی و پتانسیلهای وابسته به سرعت

اگر نیروهای وارد بر دستگاهی دینامیکی به سرعت بستگی داشته باشند، ممکن است بتوانیم تابعی مانند $U(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t)$ چنان پیدا کنیم که

$$Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, f. \quad (153-9)$$

اگر بتوان چنین تابع U ای پیدا کرد، در این صورت می توان تابع لاگرانژی به صورت زیر تعریف کرد.

$$L = T - U, \quad (154-9)$$

به طوری که معادلات حرکت (۹-۵۳) را بتوان به شکل (۹-۵۷) نوشت

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f. \quad (155-9)$$

تابع U را می توان پتانسیل وابسته به سرعت^۱ نامید. اگر نیروهایی نیز وجود داشته باشد که بتوان آنها را از یک تابع انرژی پتانسیل معمولی $V(q_1, \dots, q_f)$ به دست آورد، در این صورت V ممکن است در U منظور شود، زیرا برای جملاتی که شامل سرعت نیستند، معادله (۹-۱۵۳) به معادله (۹-۳۳) مبدل می شود. تابع U ممکن است به طور صریح به t بستگی داشته باشد. اگر چنین نباشد و اگر دستگاه مختصات دستگاهی ثابت باشد، در این صورت L از t مستقل، و کمیت

$$E = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L, \quad (156-9)$$

بنا به معادله (۹-۱۲۶) یک ثابت حرکت خواهد بود. در این حالت اگر چه نیروها به سرعت بستگی دارند، می توانیم بگوییم که کنسرواتیونند. از این نتیجه آشکار است که امکان ندارد بتوان نیروهای اصطکاکی را به شکل (۹-۱۵۳) بیان داشت زیرا وقتی اصطکاک وجود دارد انرژی کل ثابت نخواهد

بود مگر آنکه انرژی گرمایی را هم منظور کنیم. ولی انرژی گرمایی را نمی توان بر حسب مختصات و سرعت‌های $q_1, \dots, q_f, \dots, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ تعریف کرد و در نتیجه نمی توان آن را در معادله (۹-۱۵۶) منظور داشت. می توان نشان داد که اگر قسمتهای وابسته به سرعت تابع U ، مانند اغلب مثالهای مهم فیزیکی بر حسب سرعتها خطی باشند انرژی E ، که به وسیله معادله (۹-۱۵۶) تعریف شده، درست $T + V$ است، که در آن V انرژی پتانسیل معمولی است و عباراتی شامل U را دربر دارد که مستقل از سرعتها هستند.

به عنوان مثال ذره‌ای با بار q را در نظر بگیرید که تحت تأثیر میدان مغناطیسی ثابت B قرار گرفته و یک نیروی مغناطیسی (در واحدها گوسی) بر آن وارد می شود:

$$F = \frac{q}{c} v \times B, \quad (۹-۱۵۷)$$

یا

$$F_x = \frac{q}{c} (\dot{y} B_z - \dot{z} B_y),$$

$$F_y = \frac{q}{c} (\dot{z} B_x - \dot{x} B_z), \quad (۹-۱۵۸)$$

$$F_z = \frac{q}{c} (\dot{x} B_y - \dot{y} B_x),$$

معادلات (۹-۱۵۸) با معادله (۹-۱۵۳) هم شکل اند به شرط آنکه:

$$U = \frac{q}{c} (z \dot{y} B_x + x \dot{z} B_y + y \dot{x} B_z). \quad (۹-۱۵۹)$$

در حقیقت می توان نیروی الکترومغناطیسی را برای هر میدان الکتریکی و مغناطیسی به شکل (۹-۱۵۳) بیان کرد. نیروی الکترومغناطیسی وارد بر ذره‌ای با بار q به وسیله معادله (۳-۲۸۳) داده می شود:

$$F = qE + \frac{q}{c} v \times B. \quad (۹-۱۶۰)$$

در نظریه الکترومغناطیسی نشان داده شده است^۱ که برای هر میدان الکترومغناطیسی می توان تابعی اسکالر (شمارواره‌ای) مانند $\phi(x, y, z, t)$ و تابعی برداری مانند $A(x, y, z, t)$ چنان تعریف کرد که:

$$E = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (۹-۱۶۱)$$

$$B = \nabla \times A. \quad (۹-۱۶۲)$$

تابع ϕ را پتانسیل اسکالر (شمارواره‌ای) و تابع A را پتانسیل برداری گویند. اگر این روابط را در معادله (۹-۱۶۰) جایگزین کنیم رابطه زیر به دست می آید.

$$F = -q \nabla\phi - \frac{q}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{q}{c} v \times (\nabla \times A). \quad (۹-۱۶۳)$$

۱. به کتاب زیر مراجعه کنید:

با استفاده از فرمول حاصل ضرب خارجی سه گانه (۳۵-۵)، جمله آخر رابطه فوق به صورت زیر نوشته می شود:

$$F = -q \nabla \phi - \frac{q}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{q}{c} v \cdot \nabla A + \frac{q}{c} \nabla (v \cdot A). \quad (۱۶۴-۹)$$

[[$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ مؤلفه های v و مستقل از x, y, z اند به طوری که اپراتور ∇ نمی تواند روی v عمل کند]. طبق معادله (۱۱۳-۸) دو جمله وسط را می توان با هم ترکیب کرد:

$$F = -q \nabla \phi - \frac{q}{c} \frac{dA}{dt} + \frac{q}{c} \nabla (v \cdot A), \quad (۱۶۵-۹)$$

که در آن dA/dt مشتق A نسبت به زمان است که در مکان ذره متحرک محاسبه شده است. اکنون با محاسبه مستقیم می توان تحقیق کرد که هرگاه تابع پتانسیل

$$U = q\phi - \frac{q}{c} v \cdot A, \quad (۱۶۶-۹)$$

در معادله (۱۵۳-۹) جایگزین شود و $x, y, z = q_1, q_2, q_3$ در نظر گرفته شوند، مؤلفه های نیروی F معادله (۱۶۵-۹) به دست خواهد آمد. از منظر قضیه مطرح شده در مسئله ۲۴ انتهای این فصل تابع لاگرانژی $L = T - U$ نیز بر حسب هر دسته ای از مختصات معادلات حرکت صحیحی را به دست می دهند. همچنین به سادگی می توان نشان داد که انرژی E ، که به وسیله معادله (۱۵۶-۹) تعریف شده است با در نظر گرفتن $L = T - U$ عبارت است از

$$E = T + q\phi. \quad (۱۶۷-۹)$$

اگر A و ϕ از t مستقل باشند در این صورت L نیز در دستگاه مختصات ثابت مستقل از t است و انرژی E ثابت است و این نتیجه ای است که با روشهای ابتدایی تری در بخش ۳-۱۷ (معادله (۳-۲۸۸)) به دست آمد.

وقتی یک تابع پتانسیل وابسته به سرعت وجود دارد مرسوم است که اندازه حرکت را بر حسب تابع لاگرانژ تعریف کنند و نه بر حسب انرژی جنبشی:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (۱۶۸-۹)$$

اگر پتانسیل وابسته به سرعت نباشد این تعریف با معادله (۹-۲۳) معادل است. در هر حال $\partial L / \partial \dot{q}_k$ است که مشتق آن نسبت به زمان در معادله لاگرانژ ظاهر می شود و اگر q_k قابل اغماض باشد، ثابت است. در حالتی که ذره ای تحت تأثیر نیروهای الکترومغناطیسی قرار می گیرد، مؤلفه های اندازه حرکت p_x, p_y, p_z و طبق معادلات (۹-۱۶۸) و (۹-۱۶۶) چنین خواهند بود:

$$p_x = m\dot{x} + \frac{q}{c} A_x,$$

$$p_y = m\dot{y} + \frac{q}{c} A_y, \quad (۱۶۹-۹)$$

$$p_z = m\dot{z} + \frac{q}{c} A_z,$$

جمله دوم نقش یک اندازه حرکت پتانسیلی را بازی می کند.

به نظر می آید که نیروهای ثقل و نیروهای الکترومغناطیسی و در حقیقت تمام نیروهای اساسی در فیزیک را می توان با انتخاب مناسب تابع پتانسیل U ، به شکل (۹-۱۵۳) بیان کرد. (نیروهای اصطکاک را به این معنی نیروهای اساسی به حساب نمی آوریم، زیرا آنها سرانجام به نیروهای الکترومغناطیسی بین اتمها تبدیل می شوند و بنابراین آنها را نیز در اصل می توان به صورت (۹-۱۵۳) بیان کرد به شرط آنکه تمام مختصات اتمها و ملکولهای که دستگاه فیزیکی را تشکیل می دهند منظور شده باشند). بنابراین حتی هنگامی که نیروهای وابسته به سرعت وجود دارند، معادلات حرکت هر دستگاه ذرات را می توان همیشه به شکل لاگرانژی (۹-۱۵۵) بیان کرد. به نظر می آید که در شکل معادله (۹-۱۵۵) نکته ای اساسی وجود دارد. همان طور که قبلاً توجه کرده ایم یک خاصیت مهم این معادلات این است که اگر هر مجموعه جدیدی از مختصات را به جای q_1, \dots, q_f بگذاریم، در شکل آنها تغییری حاصل نمی شود. این مطلب را می توان با محاسبه مستقیم (اگرچه قدری پرزحمت) نشان داد. بینش بیشتر معادلات لاگرانژ مستلزم مطالعه بیانهای ریاضی پیشرفته تر مکانیک و به کار بردن حساب تغییرات^۱ است که خارج از حدود این کتاب است.^۲

۹-۹ معادلات لاگرانژ برای ریسمان مرتعش

روش لاگرانژ را می توان بر محیطهای پیوسته نیز گسترش داد. ما فقط ساده ترین مثال، یعنی ریسمان مرتعش را در نظر می گیریم. با استفاده از علائم بخش ۸-۱ می توانیم $u(x)$ را به عنوان مجموعه ای از مختصات تعمیم یافته مشابه q_k اختیار کنیم. به جای اندیس k که نمایشگر درجات مختلف آزادی است، مختصه مکانی x را داریم که نمایشگر نقاط مختلف ریسمان است. تعداد درجات آزادی برای یک ریسمان پیوسته آرمانی بی نهایت زیاد است. تعمیم روش لاگرانژ برای کار با یک اندیس پیوسته x که نمایشگر درجات مختلف آزادی است، باعث بروز اشکالات ریاضی می شود که ما در اینجا سعی می کنیم از آن احتراز کنیم.^۳ بنابراین از نمایش تابع $u(x)$ به صورت سری فوری استفاده می کنیم. بنابه قضیه سری فوری که در بخش ۸-۲ نقل شد، اگر ریسمان در نقاط انتهایی $l, x=0$ بسته شده باشد می توان مکانش $u(x)$ را به وسیله سری (۸-۲۴) نمایش داد:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (9-170)$$

ضرایب q_k به وسیله معادله (۸-۲۵) داده می شود:

$$q_k = \frac{2}{l} \int_0^l u(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9-171)$$

چون ضرایب q_k مکان ریسمان را به طور کامل توصیف می کنند به منزله مجموعه مناسبی از مختصات

1. calculus of variations

۲. به کتاب زیر مراجعه کنید:

H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1950. (Chapter 2).

۳. برای روش حل این مسئله به فصل ۱۱ کتاب فوق الذکر، مراجعه کنید.

تعمیم یافته‌اند. وقتی ریسمان مرتعش می‌شود، مختصات q_k به صورت توابعی از t درمی‌آیند:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (172-9)$$

اما هنوز بی‌نهایت مختصه q_k باقی است ولی آنها به اندیس جدای k بستگی دارند و می‌توان با آنها درست مانند مختصات تعمیم یافته‌ای که در بخشهای قبلی این فصل در نظر گرفته شدند، رفتار کرد. چون ریسمان را در اصل می‌توان دستگاهی در نظر گرفت که دارای تعداد بسیار زیادی ذره است و چون مجازیم که دستگاه را با هر مجموعه مناسبی از مختصات تعمیم یافته توصیف کنیم، پس برای نوشتن معادلات حرکت فقط کافی است تابع لاگرانژ را برحسب مختصات q_k بیان کنیم.

ابتدا باید انرژی جنبشی را حساب کنیم، که البته عبارت است از

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (173-9)$$

اگر از معادله (۱۷۲-۹) نسبت به زمان مشتق بگیریم و به توان دو برسانیم رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_k \dot{q}_j \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (174-9)$$

اکنون معادله فوق را در $\sigma dx/2$ ضرب می‌کنیم و از 0 تا l ، جمله به جمله انتگرال می‌گیریم.^۱ چون

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} l, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad (175-9)$$

نتیجه به دست آمده چنین است:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} l \sigma \dot{q}_k^2. \quad (176-9)$$

حال نیروی تعمیم یافته Q_k را حساب می‌کنیم. اگر مختصه q_k به اندازه δq_k افزایش یابد در حالی که بقیه ثابت نگه داشته شده‌اند، نقطه‌ای مانند x روی ریسمان به اندازه فاصله داده شده به وسیله معادله (۱۷۰-۹) حرکت می‌کند:

$$\delta u = \delta q_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (177-9)$$

نیروی رو به بالای وارد بر جزء dx ریسمان به وسیله معادله (۸-۳) داده می‌شود. بنابراین کار انجام شده عبارت است از

$$\delta W = Q_k \delta q_k = \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u dx. \quad (178-9)$$

۱. برای اینکه بتوان از یک سری نامتناهی جمله به جمله مشتق و انتگرال گرفت و ترتیب جمع کردن را تغییر داد (چنانکه ما آزادانه در این بخش خواهیم کرد)، باید سری به‌طور یکنواخت همگرا باشد. و این شرط هنگامی برقرار است که $u(x, t)$ و مشتقهای آن توابع پیوسته باشند. (برای بیان دقیق‌تر و استنتاج شرایط کار با سریهای نامتناهی به کتابی در خصوص حساب دیفرانسیل و انتگرال عالی، مثلاً به کتاب زیر مراجعه کنید:

مقدار $\partial u / \partial x$ را از معادله (۹-۱۷۰) و مقدار δu را از معادله (۹-۱۷۷) جایگزین می‌کنیم و جمله به جمله انتگرال می‌گیریم (τ ثابت فرض شده است):

$$Q_k = -\frac{1}{4} l \tau \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 q_k. \quad (9-179)$$

واضح است که نیروهای Q_k را می‌توان از تابع انرژی پتانسیل به دست آورد:

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} l \tau \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 q_k^2. \quad (9-180)$$

از نظر آموزندگی بد نیست که V را مستقیماً به وسیله محاسبه کار انجام شده در مقابل نیروی کشش τ وقتی ریسمان از وضع تعادل خود به وضع $u(x)$ می‌رسد، به دست آوریم. در عین حال باید تحقیق کرد که این کار مستقل از چگونگی انتقال ریسمان به وضع $u(x)$ است. فرض کنید $u(x, t)$ وضع ریسمان در هر لحظه t باشد هنگامی که ریسمان به وضع $u(x)$ منتقل می‌شود، [تابع $u(x, t)$ به الزام جواب معادله حرکت نیست، زیرا ما می‌خواهیم که طریقی دلخواه برای انتقال ریسمان از $u = 0$ به $u = u(x)$ را در نظر بگیریم.] در $t = 0$ ریسمان در حال تعادل است:

$$u(x, 0) = 0. \quad (9-181)$$

فرض کنید $t = t_1$ زمانی باشد که ریسمان به وضع نهایی خود می‌رسد:

$$u(x, t_1) = u(x). \quad (9-182)$$

کار انجام شده در مقابل مؤلفه‌های قائم کشش (معادله (۸-۳)) در طول فاصله dt عبارت است از

$$dV = - \int_{x=0}^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dx.$$

با در نظر گرفتن اینکه u و $\partial u / \partial t$ به ترتیب در $x = l$ و $x = 0$ برابر صفرند، به روش انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} dV &= \int_{x=0}^l \tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx dt \\ &= dt \frac{\partial}{\partial t} \int_{x=0}^l \frac{1}{4} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (9-183)$$

کار کل انجام شده عبارت است از

$$\begin{aligned} V &= \int_{t=0}^{t_1} dV \\ &= \left[\int_{x=0}^l \frac{1}{4} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right]_{t=0}^{t_1} \\ &= \int_{x=0}^l \frac{1}{4} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (9-184)$$

که در آن در آخرین عبارت، $u = u(x)$ به وضع نهایی ریسمان مربوط می شود. نتیجه فقط به وضع نهایی ریسمان بستگی دارد. این اثبات مستقل از کنسرواتيو بودن نیروی کشش است.

کار انجام شده در مقابل کشش به صورت انرژی پتانسیل در ریسمان کشیده شده ذخیره می شود. اگر مقدار $\partial u / \partial x$ را از معادله (۹-۱۷۰) به دست آوریم و در معادله (۹-۱۸۴) جایگزین کنیم، دوباره می توانیم معادله (۹-۱۸۰) را به دست آوریم. در معادله (۸-۶۱) برای ریسمانی از ذرات، طرف راست شامل دو جمله است که نمایشگر مؤلفه های قائم نیروی بین زوجهای ذرات مجاور است. راه سومی برای به دست آوردن انرژی پتانسیل این است که تابع انرژی پتانسیل را بین جفتی از ذرات که این نیرو را می دهد، پیدا کنیم. سپس باید نشان داد که وقتی این تابع بر روی تمام جفتیهای ذرات مجاور جمع بندی شود، نتیجه در حد $h \rightarrow 0$ به سمت معادله (۹-۱۸۴) میل می کند.

اکنون تابع لاگرانژ برای ریسمان مرتعش را می توان به صورت زیر نوشت

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4} l \sigma \dot{q}_k^2 - \frac{1}{4} l \tau \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 q_k^2 \right]. \quad (9-185)$$

تابع لاگرانژ حاصله برای q_k عبارت است از

$$\frac{1}{4} l \sigma \ddot{q}_k + \frac{1}{4} l \tau \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 q_k = 0, \quad (9-186)$$

که جواب عمومی آن عبارت است از:

$$q_k = A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t, \quad (9-187)$$

که در آن

$$\omega_k = \frac{\pi k}{l} \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{1/2} = \frac{\pi k c}{l}. \quad (9-188)$$

این نتیجه را می توان در معادله (۹-۱۷۲) جایگزین کرد و جواب زیر را به دست آورد:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \sin \frac{k \pi x}{l} \cos \omega_k t + B_k \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \omega_k t \right), \quad (9-189)$$

که با معادله (۸-۲۳) توافق دارد. اگر $u = u(x)$ و $\partial u / \partial t = v(x)$ در $t = 0$ داده شده باشد، می توان ثابتهای A_k و B_k ، مانند معادلات (۸-۲۵)، پیدا کرد:

$$A_k = q_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x) \sin \frac{k \pi x}{l} dx, \quad (9-190)$$

$$B_k = \frac{\dot{q}_k(0)}{\omega_k} = \frac{2}{\omega_k l} \int_0^l v(x) \sin \frac{k \pi x}{l} dx.$$

روابط فوق با معادلات (۸-۲۵) توافق دارند.

مختصات q_k که به وسیله معادلات (۹-۱۷۰) و (۹-۱۷۱) تعریف می شوند، مختصات طبیعی^۱ ریسمان مرتعش نامیده می شوند. بدیهی است که هر مختصه نماینده یک وجه طبیعی نوسان است. مختصات طبیعی همچنین در بررسی حالتی که یک نیروی $f(x, t)$ در امتداد ریسمان

وارد می‌شود، (به مسئله ۲۶ در پایان این فصل مراجعه کنید)، بسیار مفید و مناسب‌اند. مختصات طبیعی از نظر ریاضی دارای این خاصیت‌اند که تابع لاگرانژی L به صورت مجموعی از جملات درمی‌آید که هر یک از آنها فقط یک درجه آزادی دارند. بنابراین مسئله در مختصات طبیعی به مسائل جداگانه (یک مسئله برای هر یک از درجات آزادی) تقسیم می‌شود.

البته از حسن تصادف بود که مختصات q_k که در ابتدای مسئله انتخاب کردیم، مختصات طبیعی از آب درآمد. در حالت کلی این حالت پیش نمی‌آید. به عنوان مثال ریسمانی را در نظر بگیرید که چگالی آن در امتداد طول طبق معادله زیر تغییر کند:

$$\sigma = \sigma_0 + a \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (۹-۱۹۱)$$

این ریسمان در نزدیکی مرکزش از همه جا سنگینتر است. همان مختصات q_k را به کار می‌بریم که به وسیله معادلات (۹-۱۷۰) و (۹-۱۷۱) معین می‌شوند. معادلات (۹-۱۹۱) و (۹-۱۷۲) را در معادله (۹-۱۷۳) جایگزین می‌کنیم و پس از مقداری محاسبه به جای معادله (۹-۱۷۶) معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{V} T_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (۹-۱۹۲)$$

که در آن

$$T_{kj} = \frac{1}{V} l \sigma_0 + \frac{4la}{\pi} \frac{k^2}{4k^2 - 1}, \quad \text{اگر } k=j \quad (۹-۱۹۳)$$

$$T_{kj} = -\frac{4la}{\pi} \frac{kj}{[(k+j)^2 - 1][(k-j)^2 - 1]}, \quad \text{اگر } k \neq j$$

و k, j هر دو زوج یا هر دو فردند. در غیر این صورت

$$T_{kj} = 0.$$

بدیهی است که برای ریسمان، q_k ها مختصات طبیعی نیستند. در معادلات لاگرانژ q_k هایی که k در آنها زوج است همه با هم جفت می‌شوند، همین‌طور در مورد k فرد. در این صورت مسئله بسیار دشوار است و در اینجا از پیدا کردن جواب آن صرف نظر می‌کنیم.

۹-۱۰ معادلات هامیلتون

در این بخش بحث ما محدود به دستگاههایی مکانیکی است که از معادلات لاگرانژ به شکل (۹-۵۷) تبعیت می‌کنند. تابع لاگرانژی L تابعی از مختصات q_k و سرعت‌های \dot{q}_k و احتمالاً t است. وضع دستگاه مکانیکی در هر زمان، یعنی مکانها و سرعت‌های تمام قسمتهای آن به وسیله مختصات و سرعت‌های تعمیم یافته q_k و \dot{q}_k تصریح می‌شود. معادلات لاگرانژ معادلات مرتبه دومی هستند که شتابهای \ddot{q}_k را به مختصات و سرعت‌ها مربوط می‌سازند. وضع دستگاه همچنین ممکن است به وسیله مختصات q_k و اندازه‌های حرکت p_k که به وسیله معادله (۹-۱۶۸) تعریف شده است، تصریح شود:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, f. \quad (۹-۱۹۴)$$

این معادلات، p_k را بر حسب $q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ مشخص می‌کنند. در اصل می‌توان آنها را برای \dot{q}_k بر حسب $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f$ حل کرد.

تمرین جالبی است که معادلات حرکت را برحسب مختصات q_k و اندازه‌های حرکت p_k بنویسیم. ابتدا توجه کنید که با استفاده از تعریف (۹-۱۹۴) و معادلات حرکت (۹-۵۷) داریم:

$$dL = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_{k=1}^f (p_k d\dot{q}_k + \dot{p}_k dq_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (۹-۱۹۵)$$

حال تابع $H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f; t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L, \quad (۹-۱۹۶)$$

که در آن به جای سرعت‌های \dot{q}_k معادل آنها را برحسب مختصات و اندازه حرکت جایگزین می‌کنیم.

در این صورت از معادلات (۹-۱۹۶) و (۹-۱۹۵) داریم

$$dH = \sum_{k=1}^f (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (۹-۱۹۷)$$

تعریف (۹-۱۹۶) چنان اختیار شده است که dH به طور صریح به dq_k, dp_k و dt بستگی داشته باشد. با دقت در معادله (۹-۱۹۷) مشاهده می‌کنیم که

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, f, \quad (۹-۱۹۸)$$

و

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (۹-۱۹۹)$$

معادلات (۹-۱۹۸) معادلات حرکت موردنظرند که در آنها \dot{p}_k و \dot{q}_k برحسب مختصات و اندازه‌های حرکت بیان شده‌اند.

معادلات (۹-۱۹۸) معادلات حرکت هامیلتون برای یک دستگاه مکانیکی اند. تابع H که به وسیله معادله (۹-۱۹۶) تعریف می‌شود، تابع هامیلتون^۱ نامیده می‌شود. از معادله (۹-۱۲۴) مشاهده می‌کنیم که وقتی V برای یک دستگاه مختصات ساکن فقط تابعی از مختصات باشد، H درست همان انرژی کل است که برحسب مختصات و اندازه‌های حرکت بیان می‌شود. برای یک دستگاه مختصات متحرک که در آن T به وسیله معادله (۹-۱۳) داده می‌شود، تابع هامیلتون عبارت است از

$$H = T_p + V - T_v, \quad (۹-۲۰۰)$$

که در آن T_p بر حسب مختصات و اندازه‌های حرکت بیان می‌شود. طبق مطالب بخش ۹-۸ وقتی نیروهای الکترومغناطیسی وجود دارند، تابع H در دستگاه مختصات ساکن نیز انرژی کل است.

وقتی L به طور صریح شامل زمان نباشد، بنا به معادله (۹-۱۹۹)، H نیز به طور صریح شامل زمان نخواهد بود و این مطلب از روشی که H تعریف شد نیز آشکار است. H در این حالت طبق معادله (۹-۱۲۵) یک ثابت حرکت است. این نکته را می توان مستقیماً از معادله (۹-۱۹۸) نیز ثابت کرد زیرا به سادگی می توان نشان داد که:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (۹-۲۰۱)$$

(خواننده می تواند این رابطه را تحقیق کند).

اگر هر مختصه q_k به طور صریح در تابع H ظاهر نشود در این صورت از معادلات (۹-۱۹۸) نتیجه می شود که:

$$p_k = \text{ثابت}, \quad (۹-۲۰۲)$$

و این با معادله (۹-۱۱۸) توافق دارد. چون H شامل q_k نیست p_k را می توان به عنوان ثابت معلومی در نظر گرفت و در این صورت $(f-1)$ معادلات (۹-۱۹۸) برای مختصات و اندازه های حرکت دیگر، به منزله معادلات هامیلتون برای یک دستگاه با $(f-1)$ درجه آزادی اند. بنابراین درجات آزادی مربوط به مختصاتی که در H ظاهر نمی شوند از مسئله خارج می گردند. این مبدأ اصطلاح «مختصه قابل اغماض» است. پس از آن که اندازه های حرکت و مختصات غیر قابل اغماض از معادلات حرکت باقیمانده به دست آمدند، هر مختصه قابل اغماض به وسیله معادله (۹-۱۹۸) به صورت انتگرالی روی t به دست می آید:

$$q_k(t) = q_k(0) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial p_k} dt. \quad (۹-۲۰۳)$$

معادلات هامیلتون بیان ریاضی جدیدی از معادلات حرکت نیوتن اند و در حالات ساده به معادلاتی تبدیل می شوند که با استفاده از قوانین نیوتن بلافاصله نوشته می شدند. برای مثال، در نوسانگر هارمونیک با مختصه x ، اندازه حرکت عبارت است از:

$$p = m\dot{x}. \quad (۹-۲۰۴)$$

بنابراین تابع هامیلتون عبارت است از

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2. \quad (۹-۲۰۵)$$

معادلات (۹-۱۹۸) به صورت زیر در می آیند

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -kx. \quad (۹-۲۰۶)$$

که اولی تعریف p و دومی، معادله حرکت نیوتن است.

اگرچه معادلات هامیلتون به عنوان وسیله ای برای نوشتن معادلات حرکت یک دستگاه به نسبت ارزش کمی دارند، ولی به دو دلیل کلی دارای اهمیت اند. اول آن که نقطه شروع مفیدی برای نوشتن قوانین مکانیک آماری و مکانیک کوانتوم اند. در اصل هامیلتون معادلات خود را از تشابه با بیان ریاضی مشابهی که در مبحث نور مفید یافته بود، به دست آورد. پس عجیب نیست که معادلات هامیلتون نقطه شروع مکانیک موجی باشند. دوم آنکه روشهای حل متعددی برای مسائل مکانیکی

وجود دارند که براساس بیان ریاضی معادلات حرکت به شیوه هامیلتون پایه گذاری شده اند. از طریقی که معادلات هامیلتون (۹-۱۹۸) به دست آمدند پیداست که آنها مانند معادلات لاگرانژ برای هر مجموعه از مختصات تعمیم یافته q_1, \dots, q_f و اندازه های حرکت مربوطه p_1, \dots, p_f که به وسیله معادله (۹-۱۹۴) تعریف شده است، معتبرند. در واقع معادلات هامیلتون برای گروه وسیع تری از دستگاه های مختصات معتبرند که از طریق تعریف مختصات و اندازه های حرکت جدیدی به صورت توابعی از مختصات و اندازه های حرکت اصلی به دست می آیند. این اساس فایده معادلات هامیلتون در حل مسائل مکانیکی است. بحث بیشتر این مطالب از حدود این کتاب خارج است.^۱ لکن در بخش بعدی قضیه ای کلی را ثابت می کنیم که به تفهیم اهمیت متغیرهای p_k و q_k کمک می کند.

۱۱-۹ قضیه لیوویل^۲

می توان مختصات q_1, \dots, q_f را به عنوان مختصات نقطه ای در فضای f بعدی یعنی فضای آرایش^۳ دستگاه مکانیکی در نظر گرفت. به هر نقطه از فضای آرایش، اجزاء دستگاه مکانیکی مربوط می شود. نقطه q_1, \dots, q_f با حرکت دستگاه مسیری در فضای آرایش به وجود می آورد. این مسیر نمایشگر تاریخچه دستگاه است. البته مسیرهای فراوانی وجود دارد که از هر آرایشی از q_1, \dots, q_f از آنها بگذرد و لذا اجزاء دستگاه می توانند سرعتهایی چون $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ داشته باشند.

اگر بخواهیم آرایش و حرکت یک دستگاه هر دو را در هر لحظه معین کنیم باید مختصات و سرعتها و یا مختصات و اندازه های حرکت را تصریح کنیم و این هر دو با هم معادل است. فضای $2f$ بعدی که نقاطش به وسیله مختصات و اندازه های حرکت $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ تصریح می شوند، فضای فاز^۴ دستگاه مکانیکی نامیده می شود. با حرکت دستگاه، نقطه فاز $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ مسیری در فضای فاز به وجود می آورد. سرعت نقطه فاز به وسیله معادلات هامیلتون (۹-۱۹۸) داده می شود.

هر نقطه فاز نمایشگر یک حالت ممکن دستگاه مکانیکی است. تصور کنید که هر نقطه فاز به وسیله یک «ذره» که طبق معادلات حرکت (۹-۱۹۸) حرکت می کند، اشغال می شود. این ذرات مسیرهایی را به وجود می آورند که نمایشگر تمام تاریخچه های ممکن دستگاه مکانیکی اند. از هر نقطه فاز تنها یک مسیر وجود دارد لذا اگر مکانها و سرعتها یا مکانها و اندازه حرکتها داده شوند جواب معادلات حرکت به صورت منحصر به فرد تعیین می شود. قضیه لیوویل می گوید که «ذرات» فاز به مانند سیال تراکم ناپذیری حرکت می کنند. به عبارت دقیق تر حجم فاز اشغال شده به وسیله مجموعه ای از «ذرات» ثابت است.

برای اثبات قضیه لیوویل از تعمیم قضیه (۸-۱۲۱) به فضای $2f$ بعدی استفاده می کنیم. می توانیم بحثی را که منجر به معادله (۸-۱۱۶) شد تعمیم دهیم یا می توانیم از تعمیم قضیه دیورژانس گاوس استفاده کنیم که برای هر تعداد ابعاد معتبر است. در هر یک از این دو حال برای حجم V در فضای فاز که با «ذرات» حرکت می کند، داریم:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \dots \int_V \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f, \quad (۹-۲۰۷)$$

۱. فصلهای ۷، ۸، ۹ و کتاب H. Goldstein را که در چند صفحه پیش ذکر شد ملاحظه کنید.

که معادله (۸-۱۲۱) است که برای فضای فاز \mathcal{V} بعدی نوشته شده است. اکنون با جایگزین کردن سرعتها از معادله هامیلتون (۹-۱۹۸) داریم:

$$\frac{dV}{dt} = \int \dots \int_{\mathcal{V}} \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} \right) dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f = 0. \quad (۹-۲۰۸)$$

این قضیه لیوویل است و باید توجه داشت که حتی وقتی H به طور صریح به t بستگی دارد این قضیه برقرار است.

در مورد نوسانگر هارمونیک، فضای فاز صفحه‌ای است با محورهای مختصات x و p . نقاط فاز روی بیضیهایی، ثابت H ، که به وسیله معادله (۹-۲۰۵) داده می‌شوند با سرعتهایی که به وسیله (۹-۲۰۶) داده می‌شوند، حرکت می‌کنند. طبق قضیه لیوویل حرکت، همان حرکت یک سیال تراکم‌ناپذیر دوبعدی است. به‌ویژه یک مجموعه از نقاط که در ناحیه‌ای به مساحت A قرار گرفته‌اند در هر زمان بعدی در ناحیه دیگری به مساحت A قرار خواهند گرفت.

قضیه لیوویل مختصات و اندازه‌های حرکت را برای بسیاری از مقاصد فیزیکی مفیدتر از مختصات و سرعتها می‌کند. به سبب این قضیه، مفهوم فضای فاز وسیله مهمی در مکانیک آماری است. تعداد زیادی دستگاه مکانیکی در نظر بگیرید که با دستگاه معلومی شبیه، ولی شرایط اولیه آنها متفاوت باشند، فرض کنید که هر دستگاه به وسیله نقطه‌ای در فضای فاز مشترکشان نمایش داده شده باشد و فرض کنید که این نقاط طبق معادلات هامیلتون حرکت کنند. خواص آماری این مجموعه از دستگاهها را می‌توان در هر زمان t به وسیله چگالی $\rho(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f; t)$ نقاط دستگاه بر حسب واحد حجم در فضای فاز تصریح کرد. قضیه لیوویل متضمن آن است که چگالی ρ در همسایگی هر نقطه دستگاه، باید ضمن حرکت نقطه در فضای فاز ثابت بماند. (چرا؟) اگر تعادل آماری را به صورت توزیعی تعریف کنیم که در آن ρ در هر نقطه ثابت فضای فاز نسبت به زمان ثابت باشد در این صورت واضح است که شرط لازم و کافی برای تعادل این است که ρ در امتداد خطوط سیلان نقاط دستگاه یکنواخت باشد (چرا؟)

ما توانستیم در این بخش فقط یک نظر اجمالی به قدرت روشهای هامیلتون بیفکنیم.

مسائل

۱. مختصات u و w طبق معادلات زیر بر حسب مختصات قطبی r و θ تعریف شده‌اند

$$u = \ln(r/a) - \theta \cot \xi,$$

$$w = \ln(r/a) + \theta \tan \xi,$$

که در آن a و ξ ثابت‌اند. منحنیهای u ثابت و منحنیهای w ثابت را رسم کنید. انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم m را بر حسب u ، w و \dot{u} ، \dot{w} پیدا کنید. عباراتی برای Q_u و Q_w بر حسب مؤلفه‌های نیروی قطبی F_r و F_θ به دست آورید. p_u و p_w را پیدا کنید. مطلوب است نیروهای Q_u و Q_w که برای حرکت دادن ذره با تندی ثابت \dot{z} در امتداد مارپیچی با u ثابت ($u = u_0$)، لازم است.

۲. دو جرم m_1 و m_2 تحت تأثیر نیروی جاذبه ثقلی متقابل خود در میدان ثقل خارجی یکنواختی به شتاب g حرکت می‌کنند. مختصات دکارتی X, Y, Z مرکز جرم را به عنوان مختصات به کار برید

(Z) را در جهت g بگیرید) و فاصله بین m_1 و m_2 را r و زوایای قطبی که امتداد خط واصل m_1 به m_2 را تصریح می‌کنند، θ و φ اختیار کنید. معادلات انرژی جنبشی و شش نیروی Q_x, \dots, Q_φ و شش اندازۀ حرکت را به دست آورید. شش معادلۀ حرکت لاگرانژ را بنویسید.

۳. (الف) انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم m را برحسب مختصات دوبعدی سهموی f و h به صورتی که در مسئله ۱۷ فصل ۳ تعریف شد، بنویسید. اندازۀ‌های حرکت P_f و P_h را پیدا کنید. (ب) با فرض اینکه نیرویی به ذره وارد نمی‌شود، معادلات لاگرانژ را برحسب این مختصات بنویسید.

۴. (الف) مطلوب است نیروهای Q_f و Q_h لازم برای آنکه ذره مذکور در مسئله ۳ در زمان $t = 0$ از نقطه $h = 0$ با سرعت تعمیم یافته ثابت $\dot{h} = \dot{h}_0$ در امتداد سهمی، ثابت $f = f_0$ ، حرکت کند. (ب) نیروهای F_x و F_y مربوط در دستگاه مختصات دکارتی را پیدا کنید.

۵. (الف) معادلات حرکت لاگرانژ را در مختصات کروی r, θ, φ برای ذره‌ای به جرم m به دست آورید، که تحت تأثیر نیرویی که مؤلفه‌های کروی آن F_φ, F_θ, F_r اند، قرار گرفته باشد. (ب) مطلوب است معادلات لاگرانژ برای حرکت همین ذره در یک دستگاه مختصات کروی که با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z دوران می‌کند. (پ) نیروهای گریز از مرکز و کوریولی تعمیم یافته $'Q_r'$ ، $'Q_\theta'$ ، و $'Q_\varphi'$ را مشخص کنید که به وسیله آنها معادلات در دستگاه مختصات دوران کننده بتوانند دارای همان شکلی باشند که در دستگاه مختصات ثابت دارند. مؤلفه‌های کروی $'F_r'$ ، $'F_\theta'$ ، و $'F_\varphi'$ این نیروهای گریز از مرکز و کوریولی را محاسبه کنید و نشان دهید که نتیجه شما با نتیجه‌ای که در فصل ۷ به دست آمد، توافق دارد.

۶. تابع لاگرانژ دستگاه مکانیکی شکل ۴-۱۶ را با به کار بردن مختصات x_1, x_2, x_3 به صورتی که نشان داده شده است، پیدا کنید. معادلات حرکت را به دست آورید و نشان دهید که این معادلات با معادلاتی که از به کار بردن مستقیم قانون حرکت نیوتن به دست می‌آیند، معادل‌اند.

۷. مختصات مناسبی انتخاب کنید و تابع لاگرانژ را برای مسئله سه جسمی در حالت خاص بنویسید. نشان دهید که نتیجه همان معادلات حرکتی است که در بخش ۷-۶ به دست آمد.

۸. اجرام m و $2m$ به وسیله ریسمانی به طول l_1 از دو سوی قرقه‌ای و اجرام $3m$ و $4m$ نیز به همین شکل به وسیله ریسمانی به طول l_2 از دو سوی قرقه دیگری آویزان شده‌اند. این دو قرقه از دو انتهای ریسمانی به طول l_3 که بر روی قرقه ثابت دیگری قرار دارد، آویزان شده‌اند. معادلات لاگرانژ را بنویسید و شتابها و نیروهای کشش را در ریسمانها پیدا کنید.

۹. لوله بی‌جرمی در یکی از دو انتهایش لولا شده است. میله یکنواختی به جرم m و به طول l آزادانه در داخل لولا سرمی‌خورد. محوری که لولا حول آن دوران می‌کند افقی است و در نتیجه حرکت در یک صفحه محدود است. مختصۀ تعمیم یافته مناسبی برای هر درجه آزادی اختیار کنید و معادلات لاگرانژ را بنویسید.

۱۰. معادلات لاگرانژ در یکنواختی را که محور آن از امتداد شاقول کمی انحراف داشته باشد، بنویسید زمان تناوب نوسانهای کوچک چه مقدار است؟

۱۱. آونگ دوگانه‌ای از جرم m_2 که به وسیله ریسمانی به طول l_2 به جرم دیگر m_1 که به نوبه خود به وسیله ریسمان دیگری به طول l_1 از نقطه آویزش ثابتی آویخته، تشکیل شده است. (الف) با فرض این که آونگ دوگانه در یک صفحه قائم حرکت کند مجموعه‌ای از مختصات مناسب اختیار کنید و توابع لاگرانژ آن را بنویسید. (ب) معادلات لاگرانژ را بنویسید و نشان دهید که اگر ریسمان تقریباً قائم باقی بماند به معادلات لاگرانژ برای یک جفت نوسانگر جفت شده تبدیل می‌شوند. (پ) فرکانسهای طبیعی ارتعاشات کوچک آونگ دوگانه را پیدا کنید. ماهیت ارتعاشهای آن را وصف کنید. مقادیر حدی این فرکانسها را برای حالات $m_1 \gg m_2$ و $m_2 \gg m_1$ به دست آورید. نشان دهید که با در نظر گرفتن چگونگی وجوه طبیعی ارتعاش وقتی یکی از اجرام تا حد اغماض کوچک می‌شود به دلایل فیزیکی باید انتظار این مقادیر حدی را داشت.

۱۲. نردبانی به دیوار صافی متکی است و بی اصطکاک بر روی دیوار و زمین می‌لغزد. با فرض اینکه نردبان تماس خود را با دیوار حفظ کند، معادلات حرکت را به دست آورید. اگر زاویه اولیه نردبان با زمین α باشد، در چه زاویه‌ای (در صورت وجود)، نردبان از دیوار جدا می‌شود؟

۱۳. انتهای میله‌ای به جرم یکنواخت M با دیوار قائم صافی و انتهای دیگر آن با کف افقی همواری، در تماس است. دانه تسبیحی به جرم m و ابعاد ناچیز بر روی میله می‌لغزد. مختصات مناسبی اختیار کنید و تابع لاگرانژ و معادلات لاگرانژ را بنویسید. میله در صفحه‌ای قائم، که عمود بر دیوار است، حرکت می‌کند.

۱۴. حلقه‌ای به جرم M بر روی سطح افقی صافی قرار گرفته است و در نقطه‌ای از محیطش چنان سنجاق شده است که می‌تواند آزادانه حول محور قائمی نوسان کند. حشره کوچکی به جرم m با تندی ثابتی دور حلقه حرکت می‌کند. (الف) با در نظر گرفتن این دستگاه به عنوان دستگاهی که دو درجه آزادی دارد و این که نیروی وارد توسط حشره به حلقه باید از این شرط که حشره با سرعت ثابت حرکت می‌کند تعیین شود، معادلات حرکت را به دست آورید. (ب) اکنون با در نظر گرفتن این دستگاه به عنوان دستگاهی که یک درجه آزادی دارد و این که حشره مقید است در هر لحظه از زمان در نقطه معینی از حلقه باشد، معادلات حرکت را به دست آورید. نشان دهید که هر دو نوع بیان ریاضی مسئله با هم معادل‌اند.

۱۵. گلوله آونگی به جرم m به وسیله ریسمانی به طول l از نقطه‌ای آویزان شده است. نقطه آویز در امتداد محور افقی x طبق معادله زیر پیش و پس می‌رود

$$x = a \cos \omega t.$$

فرض کنید که آونگ فقط در صفحه قائمی حرکت می‌کند که شامل محور x است. فرض کنید که وضع آونگ به وسیله زاویه θ که ریسمان با خط قائم رو به پایین می‌سازد، وصف می‌شود. (الف) تابع لاگرانژ را به دست آورید و معادله لاگرانژ را بنویسید. (ب) نشان دهید که برای مقادیر کوچک θ ، معادله به معادله نوسانگر هارمونیک واداشته‌ای تبدیل می‌شود و حرکت حالت پاینده مربوط به آن را پیدا کنید. چگونه دامنه نوسان حالت پاینده به a, l, m و ω بستگی دارد؟

۱۶. گلوله آونگی به جرم m به وسیله ریسمانی به طول l از واگنی به جرم M آویزان شده است که

در امتداد ریل هوایی افقی بی اصطکاک حرکت می‌کند. آونگ در صفحه قائمی که شامل ریل است نوسان می‌کند. (الف) معادلات لاگرانژ را پیدا کنید. (ب) نشان دهید که مختصه‌های قابل اغماض وجود دارد. آن را حذف کنید و به وسیله روش انرژی در باره چگونگی حرکت بحث کنید.

۱۷. نیروی کشش ریسمان آونگ کروی مورد بحث در بخش ۹-۷ را به صورت تابعی از E ، p_φ ، و θ پیدا کنید. زاویه θ_1 را که در آن ریسمان پاره می‌شود برای E و p_φ معلومی تعیین کنید.

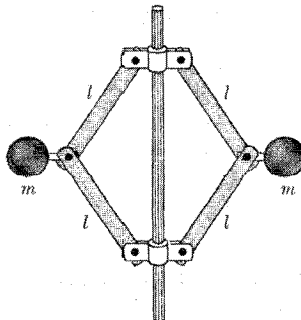
۱۸. ذره‌ای به جرم m در سطح داخلی مخروط معکوسی به نیم‌زاویه رأس α ، حرکت می‌کند. نوک مخروط در مبدأ قرار دارد و محور مخروط قائم و به سمت بالا است. نیروی ثقل تنها نیرویی است که بجز نیروی قیدی به ذره وارد می‌شود. (الف) با به کار بردن ρ ، فاصله افقی ذره از محور و φ زاویه‌ای از دایره‌ای افقی حول مخروط به‌عنوان مختصات، معادلات حرکت را به دست آورید. نشان دهید که φ قابل اغماض است و به وسیله روش پتانسیل مؤثر در باره حرکت بحث کنید. (ب) برای شعاع داده شده ρ ، سرعت زاویه‌ای چرخش $\dot{\varphi}$ را در دایره‌ای افقی، و ω ، فرکانس زاویه‌ای نوسانهای کوچک حول این حرکت دایره‌ای را به دست آورید. نشان دهید که برحسب آن که زاویه α بزرگتر یا کوچکتر از زاویه

$$\alpha_c = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

باشد، نوسانهای کوچک، حرکت لنگی یا حرکت مارپیچی بالا و پایینی خواهند بود.

۱۹. گلوله‌های تنظیم ماشین بخاری در شکل ۹-۱۱ نشان داده شده است. دو گلوله هریک به جرم m به وسیله چهار بازوی لولا شده هریک به طول l به مهره ماسوره‌هایی وصل شده‌اند که بر روی میله قائمی می‌لغزند. مهره ماسوره بالایی به میله بسته شده است و ماسوره پایینی به جرم M آزاد است و با دور و نزدیک شدن گلوله‌ها به میله، به بالا و پایین می‌لغزد. دستگاه میله و گلوله با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. (الف) با چشم‌پوشی از وزن میله و بازوها، معادلات حرکت را بنویسید. با استفاده از روش انرژی در باره حرکت بحث کنید. (ب) اندازه ارتفاع مهره ماسوره پایینی از پایین‌ترین نقطه‌اش را به صورت تابعی از ω برای دوران پاینده گلوله‌ها، به دست آورید. و فرکانس نوسانهای کوچک z حول این مقدار پاینده را پیدا کنید.

۲۰. در مسئله ۱۹ فرض کنید که میله مقید نیست که با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد بلکه آزاد است که



شکل ۹-۱۱ گلوله‌های تنظیم ماشین بخار.

بی‌وارد شدن گشتاور - نیرویی خارجی به آن، دوران کند. در باره حرکت ماشین در این حالت بحث کنید. (الف) سرعت زاویه‌ای چرخش دائم برای ارتفاع z داده شده مهره ماسوره را پیدا کنید. (ب) فرکانس ارتعاشات کوچک را حول این حرکت پاینده به دست آورید. (پ) تفاوت این حرکت از حرکت مسئله ۱۹ چیست؟

۲۱. یک دستگاه مختصات دکارتی با محورهای x, y, z با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω حول محور z می‌چرخد. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر انرژی پتانسیل $V(x, y, z)$ حرکت می‌کند. (الف) معادلات حرکت لاگرانژ را به دست آورید. (ب) نشان دهید که این معادلات را می‌توان معادلات حرکت ذره‌ای دانست که در دستگاه مختصات ثابتی تحت تأثیر نیروی $-\nabla V$ - و نیروی دیگری که از یک پتانسیل وابسته به سرعت U به دست می‌آید، قرار می‌گیرد. از این جا انرژی پتانسیل وابسته به سرعت را برای نیروهای گریز از مرکز و کوریولی پیدا کنید. (پ) U را در مختصات کروی r, θ, φ ، $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ و بیان کنید و تحقیق کنید که به نیروهای Q_r ، Q_θ ، و Q_φ به دست آمده در مسئله ۵، منجر می‌شوند.

۲۲. نشان دهید که میدان مغناطیسی یکنواخت B در جهت z را می‌توان در دستگاه مختصات استوانه‌ای (شکل ۳-۲۲) به وسیله پتانسیل برداری زیر نمایش داد:

$$A = \frac{1}{c} B \rho \hat{\phi}.$$

تابع لاگرانژ را برای ذره‌ای که در چنین میدانی قرار گرفته است، بنویسید. معادلات حرکت را بنویسید و نشان دهید که سه ثابت حرکت وجود دارد. این مسئله را با مسئله ۷۵ فصل ۳ مقایسه کنید.

۲۳. قسمت جنبشی تابع لاگرانژ ذره‌ای به جرم m در مکانیک نسبیت عبارت است از:

$$L_k = -mc^2 [1 - (v/c)^2]^{1/2}.$$

نشان دهید که این رابطه، فرمول صحیح (۴-۷۵) را برای مؤلفه‌های اندازه حرکت می‌دهد. نشان دهید که اگر تابع پتانسیل برای نیروهای الکترومغناطیسی معادله (۹-۱۶۶) را کم کنیم و اگر A و ϕ به طور صریح به t بستگی نداشته باشد در این صورت $T + q\phi$ که در آن T به وسیله فرمول (۴-۷۴) داده می‌شود، ثابت است.

*۲۴. با محاسبه مستقیم نشان دهید که اگر معادلات (۹-۱۵۵) برای تابعی مانند

$$L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t)$$

برقرار باشد و مختصات جدید q_1^*, \dots, q_f^* را که در آن

$$q_k = f_k(q_1^*, \dots, q_f^*; t), \quad k = 1, \dots, f,$$

وارد کنیم، در این صورت

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_l^*} - \frac{\partial L^*}{\partial q_l^*} = 0, \quad l = 1, \dots, f,$$

که در آن تساوی $L^*(q_1^*, \dots, q_f^*; \dot{q}_1^*, \dots, \dot{q}_f^*; t) = L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t)$ را می‌توان با جایگزین کردن $f_k(q_1^*, \dots, q_f^*; t)$ به جای q_k به دست آورد.

۲۵. فرمول (۹-۱۸۴) را برای ریسمان دانه‌دانه بخش ۸-۴ با نوشتن انرژی پتانسیلی که نیروهای بین

ذرات از آن حاصل می شود و گرفتن حد وقتی $h \rightarrow 0$ به دست آورید.

۲۶. ریسمان کشیده شده ای تحت تأثیر نیرویی خارجی با چگالی خطی $f(x, t)$ قرار می گیرد. مختصات طبیعی q_k را وارد کنید و عبارتی برای نیروی وارده تعمیم یافته $Q_k(t)$ به دست آورید. با استفاده از روش لاگرانژ، مسئله ۶ (الف) فصل ۸ را حل کنید.

۲۷. با استفاده از مختصات q_k که به وسیله معادلات (۹-۱۷۰) و (۹-۱۷۱) تعریف می شوند، مسئله ۷ فصل ۸ را حل کنید.

۲۸. تابع هامیلتون را برای یک آونگ کروی بنویسید. معادلات حرکت هامیلتون را بنویسید و از آنها معادله (۹-۱۳۶) را به دست آورید.

* ۲۹. با استفاده از تابع لاگرانژ مسئله ۲۳، تابع نسبت هامیلتون را برای ذره ای که تحت تأثیر نیروهای الکترومغناطیسی قرار گرفته است، به دست آورید. معادلات حرکت هامیلتون را بنویسید و نشان دهید که با معادلات لاگرانژ معادل اند.

۳۰. از معادله (۹-۱۸۵) شروع کنید و تابع هامیلتون $H(q_k, p_k)$ را برای ریسمان مرتعش به دست آورید. معادله ای بنویسید که اندازه های حرکت p_k را با تابع $u(x, t)$ که حرکت ریسمان را توصیف می کند، مربوط کند. از اینجا نشان دهید که $H = T + V$ که در آن T و V به وسیله معادلات (۹-۱۷۳) و (۹-۱۸۴) داده می شوند.

۳۱. تابع هامیلتون مسئله ۲ را بنویسید. معادلات هامیلتون را بنویسید. مختصات قابل اغماض را معلوم کنید و نشان دهید که دو مسئله جداگانه (هریک با یک درجه آزادی) باقی می ماند که می توان آنها را (از نظر اصولی) از روش انرژی حل کرد. تابع انرژی پتانسیل هر کدام چیست؟

۳۲. اشعه ای از الکترون در امتداد محور z تابیده می شود. الکترونها روی سطح مقطع اشعه، که دایره ای است به شعاع a ، به طور یکنواخت توزیع شده اند و مؤلفه های اندازه حرکت عرضی آنها، (p_x, p_y) نیز در دایره ای به شعاع p (در فضای اندازه حرکت) به طور یکنواخت توزیع شده اند. اگر الکترونها توسط دستگاهی از عدسیها چنان متمرکز شده باشند که لکه ای به شعاع a_1 تشکیل دهند، توزیع اندازه حرکت الکترونها ی وارد به لکه را پیدا کنید. (راهنمایی: از قضیه لیوویل استفاده کنید.)

۳۳. تعدادی ذره، هر یک به جرم m ، که ارتفاع اولیه و اندازه حرکت قائم آنها در مربع $-b \leq p \leq b$ و $-a \leq z \leq a$ قرار گرفته است، به مدت t به طور آزادانه در میدان ثقل زمین فرو می افتند. ناحیه ای را در فضای فاز پیدا کنید که ذرات در زمان t ، داخل آن قرار خواهند گرفت و با محاسبه مستقیم نشان دهید که مساحت آن هنوز $4ab$ است.

۳۴. در یک میکروسکوپ الکترونی، الکترونهايي که از جسمی به ارتفاع z_0 پراکنده می شوند، به وسیله یک عدسی در فاصله D_0 از جسم متمرکز می شوند و تصویری به ارتفاع z_I در فاصله D_I تشکیل می دهند. روزنه عدسی A است. با محاسبه مستقیم نشان دهید که سطح فازی در صفحه فازی (z, p_z) که توسط الکترونهاي ترک کننده جسم (که از عدسی عبور خواهند کرد)، اشغال می شود، همان سطح فازی است که توسط الکترونهاي وارد شونده در تصویر اشغال می شود. فرض کنید که $z_I \ll D_I$ و $z_0 \ll D_0$ باشد.

جبر تانسوری - تانسورهای ماند و تنش

در این فصل جبر توابع برداری خطی یا تانسورها را به صورت وسیله‌ای ریاضی که در حل بسیاری از مسائل مفید است بسط خواهیم داد. بویژه در بررسی حرکت کلی اجسام صلب، و بیان ریاضی مفهوم تنش در جامدات یا در سیالهای چسبنده، به تانسورها احتیاج خواهیم داشت.

۱-۱۰ اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم صلب

معادله حرکت برای دوران یک جسم صلب به وسیله معادله (۵-۵) داده می‌شود:

$$\frac{dL}{dt} = N, \quad (1-10)$$

که در آن L اندازه حرکت زاویه‌ای و N گشتاور - نیرو حول یک نقطه P است که ممکن است نقطه‌ای ثابت یا مرکز جرم جسم باشد. در بخش ۵-۲ دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت را بررسی کردیم. برای حل مسئله عمومی دوران یک جسم حول نقطه P باید رابطه بین بردار اندازه حرکت زاویه‌ای L و بردار سرعت زاویه‌ای ω را پیدا کنیم.

جسمی را در نظر بگیرید که از اجرام نقطه‌ای m_k واقع در نقاط r_k نسبت به مبدأ مختصات واقع بر P ، تشکیل شده باشد. در بخش ۷-۲ نشان داده‌ایم که کلی‌ترین حرکت جسم حول نقطه P حرکتی دورانی با سرعت زاویه‌ای ω است و نشان داده‌ایم که سرعت v_k هر ذره از جسم به وسیله رابطه زیر داده می‌شود:

$$v_k = \omega \times r_k. \quad (2-10)$$

اندازه حرکت زاویه‌ای داده شده به وسیله معادله (۳-۱۴۲) را برای تمام ذرات جمع می‌کنیم:

$$L = \sum_{k=1}^N m_k r_k \times v_k = \sum_{k=1}^N m_k r_k \times (\omega \times r_k). \quad (3-10)$$

معادله (۳-۱۰) بردار L را به صورت تابعی از ω و $L(\omega)$ بیان می‌کند. از طریق جایگزین کردن در معادله (۳-۱۰) به آسانی تحقیق می‌کنیم که تابع $L(\omega)$ برای هر زوج از دو بردار ω و ω' هر عدد اسکالر (شمارواره) c در روابط زیر صادق است:

$$L(c\omega) = cL(\omega), \quad (4-10)$$

$$L(\omega + \omega') = L(\omega) + L(\omega'). \quad (5-10)$$

تابعی برداری نظیر $L(\omega)$ ، با خواص $(4-10)$ ، $(5-10)$ را تابع برداری خطی می‌نامند. توابع برداری خطی به این دلیل مهم‌اند، که دارای خواص ریاضی ساده‌اند و اغلب در مسائل فیزیکی ظاهر می‌شوند.

برای ظاهر کردن تشابه بین معادلات $(3-10)$ و $(9-5)$ در مورد دوران حول یک محور، از معادله $(3-3)$ استفاده می‌کنیم:

$$L = \sum_{k=1}^N [m_k r_k \check{\omega} - m_k r_k (r_k \cdot \omega)] \quad (6-10)$$

عامل ω مستقل از k است و می‌توان آن را از مجموع اول خارج کرد. همچنین می‌توان آن را به شکلی صرفاً صوری از مجموع دوم نیز خارج کرد:

$$L = \left(\sum_{k=1}^N m_k r_k \check{\omega} \right) \omega - \left(\sum_{k=1}^N m_k r_k r_k \right) \cdot \omega \quad (7-10)$$

البته جمله دوم خالی از معنی است زیرا تسلسل $r_k r_k$ دو بردار هنوز تعریف نشده است. در بخش بعدی سعی خواهیم کرد که معنایی برای آن ارائه دهیم.

۲-۱۰ جبر تانسوری

حاصل ضرب دو تایی AB دو بردار به وسیله معادله زیر تعریف می‌شود:

$$(AB) \cdot C = A(B \cdot C) \quad (8-10)$$

که در آن C بردار دلخواهی است. عبارت طرف راست این معادله برحسب حاصل ضربهای تعریف شده در بخش ۳-۱ بیان می‌شود و عبارت طرف چپ بنا به تعریف، برداری است که به وسیله عبارت طرف راست داده می‌شود. توجه کنید که دو تایی AB فقط برحسب حاصل ضرب داخلی آن با بردار دلخواه C تعریف می‌شود. از تعریف $(8-10)$ به آسانی می‌توان نشان داد که حاصل ضرب یک بردار در یک دو تایی اپراتوری خطی به این معنی است که:

$$(AB) \cdot (cC) = c[(AB) \cdot C], \quad (9-10)$$

$$(AB) \cdot (C + D) = (AB) \cdot C + (AB) \cdot D. \quad (10-10)$$

بنابراین دو تایی AB برای بردارهای ثابت A و B ، تابع برداری خطی $F(C)$ را تعریف می‌کند:

$$F(C) = (AB) \cdot C. \quad (11-10)$$

حاصل ضرب دو تایی AB مثالی است برای یک اپراتور برداری خطی، یعنی نمایشگر عملی است که روی هر بردار C انجام می‌گیرد تا بردار جدید $(AB) \cdot C$ را که تابعی خطی از C است، بدهد. یک اپراتور برداری خطی را تانسور^۱ نیز می‌گویند. تانسورها با حروف بزرگ سیاه بی‌زایده^۲

۱. به طور دقیق‌تر، یک اپراتور برداری خطی را می‌توان یک تانسور رده دوم نامید تا بتوان آن را از تانسورهای رده سه به بالا که از ترکیب خطی سه گانه ABC و غیره به دست می‌آیند، تمیز داد. در این کتاب فقط تانسورهای رده دوم مورد نظر است که برای سهولت آنها را تانسور می‌نامیم.

۲. مانند H, B, A به تمایز از H, B, A .

مانند A, B, C و غیره نمایش داده می‌شوند. به عنوان مثال T را می‌توان تانسوری دانست که به وسیلهٔ دو تایی AB بیان می‌شود:

$$T = AB. \quad (12-10)$$

معنی تانسور T به وسیلهٔ تعریف زیر تصریح می‌شود:

$$T \cdot C = A(B \cdot C), \quad (13-10)$$

که نتیجهٔ عمل تانسور T روی بردار C است. به وسیلهٔ جمع دو تاییها می‌توان اپراتورهای برداری خطی کلی‌تری تشکیل داد. حاصل جمع دو تایی یا تانسورهای S و T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(S + T) \cdot C = S \cdot C + T \cdot C. \quad (14-10)$$

توجه کنید که تمام تعریفهای اعمال جبری روی تانسورها (مانند تعریف $S + T$ بالا)، برحسب عمل تانسورها روی بردار دلخواه C بیان شده‌اند. حاصل جمع یک یا چند دو تایی را جمع دو تاییها نامند.

بنابه تعریف (۱۴-۱۰)، نتیجهٔ عمل جمع دو تاییها $(AB + DE)$ روی بردار C بردار زیر است:

$$(AB + DE) \cdot C = A(B \cdot C) + D(E \cdot C). \quad (15-10)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که مجموع دو اپراتور خطی، یک اپراتور خطی است. بنابراین جمعهای دو تایی نیز اپراتورهای برداری خطی‌اند و برای هر جمع دو تاییها یا تانسور T داریم

$$T \cdot (cC) = c(T \cdot C), \quad (16-10)$$

$$T \cdot (C + D) = T \cdot C + T \cdot D. \quad (17-10)$$

روابط خطی بودن (۱۶-۱۰) و (۱۷-۱۰) همراه تعریف (۱۴-۱۰) تضمین می‌کنند که حاصل ضربهای دو تایی، مجموعه‌های تانسورها و حاصل ضربهای داخلی تانسورها با بردارها همه از قوانین جبری حاصل جمعها و حاصل ضربها پیروی می‌کنند. همچنین می‌توان حاصل ضرب داخلی یک دو تایی را با برداری که طرف چپ قرار گرفته باشد به صورت بدیهی زیر تعریف کرد:

$$C \cdot (AB) = (C \cdot A)B, \quad (18-10)$$

و به همین ترتیب برای مجموع دو تاییها، توجه داشته باشید که حاصل ضرب داخلی یک جمع دو تایی با یک بردار، خاصیت نقل پذیری ندارد یعنی رابطهٔ

$$T \cdot C = C \cdot T \quad (19-10)$$

در حالت کلی برقرار نیست. می‌توان cT ، حاصل ضرب یک تانسور در یک اسکالر (شمارواره) را که دارای خواص جبری است که باید در انتظارش باشیم، به طریق واضحی تعریف کرد. (مسئلهٔ ۱ را ببینید).

یک تانسور بسیار ساده به وسیلهٔ جمع دو تاییهای زیر داده می‌شود،

$$1 = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}, \quad (20-10)$$

که در آن $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ و مجموعه‌ای از بردارهای یک متعامدند که به ترتیب در امتداد محورهای x, y, z قرار گرفته‌اند. با استفاده از تعاریف (۱۴-۱۰) و (۱۸-۱۰) نتیجهٔ عمل تانسور 1 بر بردار A را حساب می‌کنیم:

$$1 \cdot A = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z = A. \quad (21-10)$$

تانسور ۱ را تانسور یکه نامند. می توان آن را به صورت اپراتوری تعریف کرد که وقتی روی برداری عمل کند، حاصل برابر همان بردار خواهد بود. بدیهی است که تانسور ۱ یکی از حالات خاصی است که برای آن

$$1 \cdot A = A \cdot 1 \quad (22-10)$$

اگر c اسکالر (شمارواره) باشد، حاصل ضرب $c1$ را تانسور ثابت نامند، که دارای خاصیت زیر است:

$$(c1) \cdot A = A \cdot (c1) = cA. \quad (23-10)$$

با استفاده از تعاریف فوق اکنون می توان معادله (۷-۱۰) را به صورت زیر نوشت:

$$L = I \cdot \omega, \quad (24-10)$$

که در آن I تانسور مانند جسم صلب است که به وسیله رابطه زیر تعریف می شود:

$$I = \sum_{k=1}^N (m_k r_k^i r_k^j - m_k r_k^j r_k^i). \quad (25-10)$$

برای دورانهای کلی، تانسور مانند I مشابه گشتاور ماند برای دورانهای حول یک محور است. توجه کنید که در حالت کلی L و ω موازی نیستند. بعد از بسط خواص لازم تانسورها، تانسور ماند را عمیق تر بررسی خواهیم کرد.

اگر تمام بردارها را برحسب مؤلفه هایشان بنویسیم

$$C = C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z}, \quad (26-10)$$

در این صورت واضح است که با انجام عمل ضرب در مورد حاصل ضربهای دوتایی و جمع جمله ها می توان هر جمع دوتایی را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} T &= T_{xx} \hat{x} \hat{x} + T_{xy} \hat{x} \hat{y} + T_{xz} \hat{x} \hat{z} \\ &+ T_{yx} \hat{y} \hat{x} + T_{yy} \hat{y} \hat{y} + T_{yz} \hat{y} \hat{z} \\ &+ T_{zx} \hat{z} \hat{x} + T_{zy} \hat{z} \hat{y} + T_{zz} \hat{z} \hat{z} \end{aligned} \quad (27-10)$$

درست همان طور که هر بردار A ممکن است به وسیله مؤلفه های سه گانه اش (A_x, A_y, A_z) بیان شود، هر جمع دوتایی را می توان به وسیله مؤلفه های نه گانه اش (T_{xx}, \dots, T_{zz}) توصیف کرد، که می توان آنها را برای سهولت کار به صورت یک ماتریس مربع نوشت:

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}. \quad (28-10)$$

به عنوان مثال، خواننده می تواند نشان دهد که مؤلفه های تانسور ماند (۲۵-۱۰) عبارت اند از:

$$I_{xx} = \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad I_{xy} = - \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k, \quad \text{و غیره.} \quad (29-10)$$

برای سهولت در نوشتن مؤلفه‌های تانسور، اغلب راحت‌تر است به جای به کار بردن x, y, z و محورهای مختصات را x_1, x_2, x_3 و شماره گذاری کنیم:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3. \quad (۱۰-۳۰)$$

و بردارهای یکه آنها را به صورت \hat{e}_i می‌نویسیم:

$$\hat{x} = \hat{e}_1, \quad \hat{y} = \hat{e}_2, \quad \hat{z} = \hat{e}_3. \quad (۱۰-۳۱)$$

اکنون معادلات (۱۰-۲۶) و (۱۰-۲۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C = \sum_{i=1}^3 C_i \hat{e}_i, \quad (۱۰-۳۲)$$

و

$$T = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j. \quad (۱۰-۳۳)$$

مزیت دیگر این علامت‌گذاری این است که می‌توان به آسانی با تغییر دادن حد مجموع، بحث بردارها و تانسورها را به فضای n بعدی تعمیم داد.

با استفاده از تعاریف حاصل ضرب و حاصل جمع دو تایی، می‌توان مؤلفه‌های بردار $T \cdot C$ را بر حسب مؤلفه‌های T و C بیان کرد:

$$(T \cdot C)_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} C_j, \quad (۱۰-۳۴)$$

خواننده باید صحت معادله فوق را بررسی کند. به همین ترتیب

$$(C \cdot T)_i = \sum_{j=1}^3 C_j T_{ji}. \quad (۱۰-۳۵)$$

توجه داریم که طبق معادله (۱۰-۳۳)

$$T_{ij} = \hat{e}_i \cdot (T \cdot \hat{e}_j) = (\hat{e}_i \cdot T) \cdot \hat{e}_j. \quad (۱۰-۳۶)$$

می‌توان پرانتزها را حذف کرد زیرا ترتیب انجام دادن اعمال ضرب مهم نیست.

اکنون می‌توان نشان داد که هر تابع برداری خطی ممکن است به وسیله یک جمع دو تایی نمایش داده شود. فرض کنید $F(C)$ یک تابع خطی از C باشد. ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که C یک بردار یکه \hat{e}_j باشد و فرض کنید که در آن حالت مؤلفه‌های $F(C)$ ، T_{ij} باشند:

$$F(\hat{e}_j) = \sum_{i=1}^3 T_{ij} \hat{e}_i. \quad (۱۰-۳۷)$$

اکنون هر بردار C را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C = \sum_{j=1}^3 C_j \hat{e}_j. \quad (۱۰-۳۸)$$

بنابراین با استفاده از خاصیت خطی $F(C)$ ، داریم

$$\begin{aligned} F(C) &= \sum_{j=1}^r F(C_j \hat{e}_j) = \sum_{j=1}^r C_j F(\hat{e}_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^r C_j T_{ij} \hat{e}_i. \end{aligned} \quad (39-10)$$

بنابراین مؤلفه‌های $F(C)$ را می‌توان بر حسب اعداد T_{ij} بیان کرد:

$$[F(C)]_i = \sum_{j=1}^r T_{ij} C_j. \quad (40-10)$$

اگر جمع دو تایی T را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$T = \sum_{i,j=1}^r T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j, \quad (41-10)$$

در این صورت از معادلات (۴۰-۱۰) و (۳۴-۱۰) نتیجه می‌شود که

$$F(C) = T \cdot C. \quad (42-10)$$

بنابراین مفاهیم جمع دو تایی و اپراتور برداری خطی یا تانسور یکسانند و با مفهوم تابع برداری خطی معادل‌اند بدین معنی که هر تابع برداری خطی، تانسور یا جمع دو تایی معینی را معین می‌کند و به عکس.

می‌توان حاصل ضرب داخلی دو تانسور را به صورت زیر تعریف کرد:

$$(T \cdot S) \cdot C = T \cdot (S \cdot C). \quad (43-10)$$

عمل اپراتور $T \cdot S$ روی هر برداری بدین معنی است که ابتدا S و سپس T عمل کند. اکنون با استفاده از تعریف (۴۳-۱۰)، عمل اپراتور $T \cdot S$ روی بردار C را بر حسب مؤلفه‌ها حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} (T \cdot S) \cdot C &= T \cdot \sum_{j,k=1}^r S_{jk} C_k \hat{e}_j \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j,k=1}^r T_{ij} S_{jk} C_k \hat{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^r \left[\sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^r T_{ij} S_{jk} \right) C_k \right] \hat{e}_i. \end{aligned} \quad (44-10)$$

از مقایسه معادله فوق با معادله (۳۴-۱۰) نتیجه می‌شود که:

$$(T \cdot S)_{ik} = \sum_{j=1}^r T_{ij} S_{jk}. \quad (45-10)$$

همچنین اگر $T \cdot S$ را از طریق نوشتن حاصل ضرب داخلی و حاصل ضرب دوتایی و جمع جمله‌ها حساب کنیم، معادله (۴۵-۱۰) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} T \cdot S &= \sum_{ijkl=1}^3 T_{ij} S_{kl} \hat{e}_i \hat{e}_j \cdot \hat{e}_k \hat{e}_l \\ &= \sum_{ijl=1}^3 T_{ij} S_{jl} \hat{e}_i \hat{e}_l, \end{aligned} \quad (46-10)$$

و این نشان می‌دهد که تعریف (۴۳-۱۰) با قواعد معمولی جبر سازگار است. اگر طبق معادله (۲۸-۱۰)، تانسورهای T و S را به صورت ماتریس بنویسیم، در این صورت معادله (۴۵-۱۰) قاعده ریاضی معمولی برای ضرب ماتریسها است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که از تعریف (۱۴-۱۰) نتیجه می‌شود که تانسورها به وسیله جمع ماتریسهای مؤلفه‌هایشان طبق قاعده زیر با هم جمع می‌شوند:

$$(T + S)_{ij} = T_{ij} + S_{ij}. \quad (47-10)$$

جمع و ضرب تانسورها از تمام قواعد معمولی جبر تبعیت می‌کنند به استثنای اینکه حاصل ضرب داخلی در حالت کلی دارای خاصیت نقل‌پذیری نیست:

$$T + S = S + T, \quad (48-10)$$

$$T \cdot (S + P) = T \cdot S + T \cdot P, \quad (49-10)$$

$$T \cdot (S \cdot P) = (T \cdot S) \cdot P, \quad (50-10)$$

$$1 \cdot T = T \cdot 1 = T, \quad (51-10)$$

و غیره؛ ولی در حالت کلی معادله زیر برقرار است:

$$T \cdot S \neq S \cdot T. \quad (52-10)$$

اغلب تعریف ترانسپوز^۱ T^t یک تانسور T به صورت زیر، مفید است:

$$T^t \cdot C = C \cdot T. \quad (53-10)$$

بر حسب مؤلفه‌ها

$$T^t_{ij} = T_{ji}. \quad (54-10)$$

اغلب ترانسپوز به صورت \tilde{T} نوشته می‌شود، ولی علامت T^t به دلایل چاپی ارجحیت دارد. خواص زیر به سادگی ثابت می‌شوند:

$$(T + S)^t = T^t + S^t, \quad (55-10)$$

$$(T \cdot S)^t = S^t \cdot T^t, \quad (56-10)$$

$$(T^t)^t = T. \quad (57-10)$$

تانسور را متقارن گویند اگر

$$T^t = T. \quad (58-10)$$

به عنوان مثال، تانسور مانند که به وسیله معادله (۱۰-۲۵) داده می شود، متقارن است. برای یک تانسور متقارن،

$$T_{ji} = T_{ij}. \quad (10-59)$$

یک تانسور متقارن را می توان به وسیله شش مؤلفه تصریح کرد، سپس سه مؤلفه باقیمانده به وسیله معادله (۱۰-۵۹) تعیین می شوند.

تانسور را ضد متقارن گویند اگر

$$T^t = -T. \quad (10-60)$$

مؤلفه های یک تانسور ضد متقارن در معادله زیر صدق می کنند:

$$T_{ji} = -T_{ij}. \quad (10-61)$$

بدیهی است که سه مؤلفه قطری T_{ii} همگی صفرند و اگر سه مؤلفه غیرقطری داده شده باشد، سه مؤلفه دیگر به وسیله معادله (۱۰-۶۱) داده می شوند. یک تانسور ضد متقارن فقط دارای سه مؤلفه مستقل (در فضای سه بعدی) است. به عنوان مثال اپراتور خطی زیر را می توان نام برد:

$$T \cdot C = \omega \times C, \quad (10-62)$$

که در آن ω بردار ثابتی است. از مقایسه معادله (۱۰-۶۲) با معادله (۷-۲۰) نتیجه می شود که اپراتور T را می توان این طور تفسیر کرد که معین کننده سرعت هر بردار C است، که با سرعت زاویه ای ω دوران می کند. از مقایسه معادله (۱۰-۶۲) با معادله (۱۰-۳۴) مشاهده می شود که مؤلفه های T عبارت اند از:

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{22} = T_{33} &= 0, \\ T_{21} = -T_{12} &= \omega_3, \\ T_{32} = -T_{23} &= \omega_1, \\ T_{13} = -T_{31} &= \omega_2, \end{aligned} \quad (10-63)$$

چون یک تانسور ضد متقارن (مانند یک بردار) دارای سه مؤلفه مستقل است، می توان به هر تانسور ضد متقارن T ، برداری مانند ω (فقط در فضای سه بعدی) نسبت داد که مؤلفه های آن به وسیله معادله (۱۰-۶۳) به مؤلفه های T مربوط می شوند. در این صورت طبق معادله (۱۰-۶۲) اپراتور $T \cdot$ با اپراتور $\omega \times$ معادل خواهد بود.

هرگاه هر تانسور T در دست باشد، می توان به وسیله روابط زیر یک تانسور متقارن و یک تانسور ضد متقارن تعریف کرد:

$$T_s = \frac{1}{2}(T + T^t), \quad (10-64)$$

$$T_a = \frac{1}{2}(T - T^t), \quad (10-65)$$

به طوری که

$$T = T_s + T_a. \quad (10-66)$$

در بند پیش دیدیم که یک تانسور ضد متقارن را می توان به طور هندسی به وسیله برداری مانند ω نمایش داد. در بخش ۱۰-۴ خواهیم دید که چگونه یک تانسور متقارن را می توان نشان داد. چون

تانسورهای متقارن و ضدمتقارن دارای خواص هندسی متفاوت اند، تانسورهایی که در فیزیک پیش می آیند اغلب متقارن یا ضدمتقارن یا ترکیبی از هر دو اند. در فضای سه بعدی، همیشه می توان به وسیله استفاده از بردار وابسته، از به کار بردن تانسور ضدمتقارن اجتناب کرد. بنابراین متقارن بودن تانسورهای دو مثال اصلی در این فصل، یعنی تانسور ماند و تانسور تنش، تصادفی نیست.

۱۰-۳ تبدیلهای مختصات

در بخش پیشین دیدیم که تانسوری مانند T را می توان از نظر هندسی از طریق تصریح نتیجه عمل آن روی بردار دلخواه C به صورت یک اپراتور برداری خطی تعریف کرد. به طریق دیگر، تانسور را می توان از نظر جبری از طریق مشخص کردن مؤلفه هایش یعنی T_{ij} تصریح کرد. بین این دو تعریف تانسور ناهماهنگی مشهود است، زیرا به نظر می آید که تعریف جبری تانسور به انتخاب دستگاه مختصات خاصی بستگی داشته باشد. ناهماهنگی مشابهی نیز در مورد یک بردار در بخش ۱-۳ ذکر شد. اکنون از طریق یافتن راهی برای تبدیل مؤلفه های بردارها و تانسورها ضمن عوض کردن دستگاه مختصات، این ناهماهنگی را برطرف می کنیم. بحث را به مختصات دکارتی محدود می کنیم.

دو دستگاه مختصات x_1, x_2, x_3 و x'_1, x'_2, x'_3 را که دارای مبدأ مشترک اند، در نظر می گیریم. مختصات یک نقطه در دو دستگاه به وسیله معادلات (۷-۱۳) بهم مربوط می شوند:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad (10-67)$$

که در آن

$$a_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \quad (10-68)$$

کسینوس زاویه بین محورهای x'_i و x_j است، به همین ترتیب

$$x_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} x'_i. \quad (10-69)$$

روابط بین مؤلفه های زیردار و بی زیر هر بردار

$$C = \sum_{i=1}^3 C'_i \hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 C_j \hat{e}_j \quad (10-70)$$

را می توان به همین راه به وسیله تشکیل حاصل ضرب داخلی \hat{e}_i یا \hat{e}_j با معادله (۱۰-۷۰) به دست آورد:

$$C'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} C_j, \quad (10-71)$$

$$C_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} C'_i. \quad (10-72)$$

اکنون می توان یک بردار را از نظر جبری به صورت مجموعه ای از سه مؤلفه (C_1, C_2, C_3) تعریف کرد که وقتی دستگاه مختصات تغییر می کند، مانند مختصات (x_1, x_2, x_3) تبدیل می یابد. این تعریف با مراجعه به تمام دستگاههای مختصات، هیچ دستگاه مختصات خاصی را بر دیگران ترجیح

نمی‌کند. به همین ترتیب مؤلفه‌های زبرداری و بی‌زیر تانسور

$$T = \sum_{i,k=1}^3 T'_{ik} \hat{e}'_i \hat{e}'_k = \sum_{j,l=1}^3 T_{jl} \hat{e}_j \hat{e}_l \quad (۷۳-۱۰)$$

به وسیله روابط زیر بهم مربوط می‌شوند (معادله ۱۰-۳۶) را ببینید).

$$T'_{ik} = \hat{e}'_i \cdot T \cdot \hat{e}'_k = \sum_{j,l=1}^3 a_{ij} a_{kl} T_{jl}, \quad (۷۴-۱۰)$$

$$T_{jl} = \hat{e}_j \cdot T \cdot \hat{e}_l = \sum_{i,k=1}^3 a_{ij} a_{kl} T'_{ik}. \quad (۷۵-۱۰)$$

تانسور را می‌توان از نظر جبری به صورت مجموعه‌ای از ۹ مؤلفه (T_{ij}) تعریف کرد که طبق قاعده داده شده در معادلات (۷۴-۱۰) و (۷۵-۱۰) تبدیل می‌یابند. به تمایز بین تانسور و ماتریس توجه کنید. مفهوم ماتریس فقط مفهومی ریاضی است، یعنی ماتریسها مجموعه‌هایی از اعدادند که طبق قواعد (۱۰-۴۵) و (۱۰-۴۷) جمع و ضرب می‌شوند. در حالی که مفهوم تانسور مفهومی هندسی است. تانسور را می‌توان در هر دستگاه مختصات خاصی به وسیله یک ماتریس نمایش داد، اما اگر دستگاه مختصات تغییر یابد، ماتریس باید طبق قاعده معینی تبدیل شود.

ضرایب a_{ij} که به وسیله معادله (۱۰-۶۸) تعریف می‌شوند، مؤلفه‌های بردارهای یکه \hat{e}'_i در دستگاه مختصات بی‌زبرد و به عکس:

$$\hat{e}'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \hat{e}_j, \quad (۷۶-۱۰)$$

و

$$\hat{e}_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \hat{e}'_i. \quad (۷۷-۱۰)$$

چون $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ و $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ مجموعه‌ای از بردارهای یکه متعامند، مشاهده می‌شود که اعداد a_{ij} باید در معادلات زیر صدق کنند:

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_k = \sum_{j=1}^3 a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}, \quad (۷۸-۱۰)$$

که در آن علامت اختصاری برای

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq k \\ 1 & \text{اگر } i = k \end{cases}. \quad (۷۹-۱۰)$$

است. شش رابطه (۷۸-۱۰) بین نه ضریب a_{ik} وجود دارد. بنابراین اگر سه ضریب از ضرایب a_{ij} معین شده باشند، باقی را می‌توان از معادلات (۷۸-۱۰) به دست آورد. واضح است که باید سه ثابت مستقل برای تعیین مکان محورها زبرداری نسبت به محورها بی‌زیر، معین کرد (یا به عکس). زیرا محور x'_1 ممکن است در هر امتداد باشد و بنابراین برای تعیین مکان آن دو مختصه لازم است. همین که مکان محور x'_1 معین شد، مکان محور x'_2 که ممکن است در هر جای صفحه‌ای عمود بر x'_1

باشد، به وسیله یک مختصه معین می شود. در این صورت مکان محور x'_p (بجز جهت آن) معین می گردد. با استفاده از روابط زیر، می توان روابط دیگری بین a_{ij} ها نوشت:

$$(۱۰-۸۰) \quad \hat{e}_j \cdot \hat{e}_l = \delta_{jl}, \quad \hat{e}_i \times \hat{e}_p = \pm \hat{e}_q, \quad \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_p \times \hat{e}_q) = \pm 1, \quad \text{و غیره.}$$

چون لاقبل سه ضریب از ضرایب a_{ij} باید مستقل باشند، واضح است که روابط به دست آمده از معادلات (۱۰-۸۰) مستقل نیستند ولی می توان آنها را به طور جبری از معادلات (۱۰-۷۸) به دست آورد. رابطه جالبی از حاصل ضرب زیر به دست می آید:

$$(۱۰-۸۱) \quad e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm 1,$$

که در آن اگر دستگاههای زیردار و بی زیر، هر دو راست گرد یا هر دو چپ گرد باشند، نتیجه $+1$ ، و اگر یکی از دستگاهها راست گرد و دیگری چپ گرد باشد، نتیجه -1 خواهد بود. بنابراین برحسب اینکه راست گردی یا چپ گردی دستگاه مختصات تغییر داده شود یا تغییر داده نشود، دترمینان $|a_{ij}|$ برابر $+1$ یا -1 خواهد بود.

در یک دستگاه چپ گرد، حاصل ضرب خارجی باید با به کار بردن دست چپ به جای راست تعریف شود. [در معادله (۱۰-۸۱)، حاصل ضرب سه گانه طرف چپ باید در دستگاه زیردار محاسبه شود]. در این صورت تعریف جبری در هر دو حالت یکسان است:

$$(۱۰-۸۲) \quad (A \times B) = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1).$$

این تعریف متضمن آن است که حاصل ضرب خارجی $A \times B$ دو بردار معمولی، خود برداری معمولی نیست، زیرا وقتی چپ گردی یا راست گردی دستگاه مختصات را تغییر می دهیم، جهت آن معکوس می شود. یک بردار معمولی که جهتش مستقل از دستگاه مختصات است، بردار قطبی نامیده می شود. برداری را که جهتش به راست گردی یا چپ گردی دستگاه مختصات بستگی دارد، بردار محوری یا شبه بردار می نامند. بردار سرعت زاویه ای ω و هر بردار دیگری که جهتش به وسیله «قاعده دست راست» تعریف شود، بردار محوری است. بردار وابسته به یک تانسور ضد متقارن (معمولی)، برداری محوری است. حاصل ضرب خارجی یک بردار محوری با یک بردار قطبی، $\omega \times C$ خود برداری قطبی است. تمایز بین بردارهای محوری و قطبی تنها هنگامی رخ می دهد که بخواهیم هر دو دستگاه مختصات راست گرد و چپ گرد را در نظر بگیریم. در کاربردهای این کتاب فقط باید دورانه های دستگاه مختصات را در نظر بگیریم. از آنجا که دوران، چپ گردی یا راست گردی دستگاه مختصات را تغییر نمی دهد، به این تمایز کاری نخواهیم داشت.

تبدیل تعریف شده به وسیله معادلات (۱۰-۶۷)، (۱۰-۷۱)، و (۱۰-۷۴) وقتی ضرایب در معادله (۱۰-۷۸) صدق می کنند، متعامد نامیده می شود. همان طور که از اسم آن برمی آید با یک تبدیل متعامد می توانیم مجموعه ای از بردارهای یک متعامد را به مجموعه دیگری از بردارهای یک متعامد تغییر دهیم.

طرف راست معادله (۷۱-۱۰) از نظر صوری مشابه طرف راست معادله (۳۴-۱۰) است و این تشابه ما را به تفسیر دیگری از معادلات (۷۱-۱۰) رهبری می‌کند. تانسوری مانند A با مؤلفه‌های زیر را تعریف می‌کنیم

$$A_{ij} = a_{ij}, \quad (۸۳-۱۰)$$

و بردار C را در نظر می‌گیریم

$$C' = A \cdot C. \quad (۸۴-۱۰)$$

مؤلفه‌های C' بردار C' به وسیله معادله (۷۱-۱۰) معلوم است. به همین ترتیب طبق معادله (۷۲-۱۰)،

$$C = A^t \cdot C'. \quad (۸۵-۱۰)$$

بنابراین معادلات (۷۱-۱۰) و (۷۲-۱۰) را به طریق دیگر می‌توان چنین تفسیر کرد که نمایشگر نتیجه عمل تانسورهای A و A^t به ترتیب روی بردارهای C و C' است. در تفسیر اولیه C و C' مؤلفه‌های یک بردار C در دستگاه مختصات متفاوت اند. در این تفسیر جدید، C و C' مؤلفه‌های دو بردار متفاوت C و C' در یک دستگاه مختصات متفاوت اند. لکن در وهله نخست تفسیر اول مورد نظر ماست که در آن این معادلات نمایشگر یک تبدیل مختصات اند. ولی اغلب می‌توان از تفسیر دوم برای به دست آوردن خواص جبری معادلات (۷۱-۱۰) و (۷۲-۱۰) استفاده کرد که البته از چگونگی تفسیر ما مستقل اند. در حالتی که محورهای زبردار در یک جسم صلب دوران‌کننده ثابت باشند، هر یک از دو تفسیر مفیدند. اگر محورهای زبردار اول بر محورهای بی‌زبر منطبق باشند، در این صورت می‌توان معادلات (۷۱-۱۰) و (۷۲-۱۰) را به عنوان بیان‌کننده تبدیل از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگر تفسیر کرد. به طریق دیگر تانسور A را می‌توان به عنوان تانسوری تفسیر کرد که نمایشگر عمل دوران جسم از مکان اولیه خود به مکان فعلی باشد، یعنی برداری که در جسم ثابت و ابتدا بر C منطبق است، چنان دوران داده می‌شود که بر بردار $C' = A \cdot C$ منطبق شود. با استفاده از معادلات (۸۴-۱۰)، (۸۵-۱۰)، و (۴۳-۱۰) نتیجه می‌شود که:

$$A^t \cdot (A \cdot C) = (A^t \cdot A) \cdot C = C. \quad (۸۶-۱۰)$$

بنابراین طبق معادله (۷۲-۱۰)،

$$A^t \cdot A = 1, \quad (۸۷-۱۰)$$

و به همین ترتیب

$$A \cdot A^t = 1. \quad (۸۸-۱۰)$$

تانسوری که دارای این خاصیت باشد تانسور متعامد نامیده می‌شود. واضح است که معادلات (۸۷-۱۰) و (۸۸-۱۰) معادل اند. در تفسیر دوم معادلات (۷۴-۱۰) و (۷۵-۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T' = A \cdot T \cdot A^t, \quad (۸۹-۱۰)$$

$$T = A^t \cdot T' \cdot A. \quad (۹۰-۱۰)$$

تانسور متعامد تنها مثالی است که ما از تانسوری که دارای معنی هندسی معین است داریم، یعنی نه متقارن است و نه ضد متقارن. در عوض تانسور متعامد دارای خاصیت تعامد است که به وسیله معادله (۸۷-۱۰) بیان می‌شود.

با در نظر گرفتن این واقعیت که اعمال برداری متفاوت بی‌رجوع به یک دستگاه مختصات تعریف

شدند، واضح است که تمام قواعد محاسبه حاصل جمع و حاصل ضرب و ترانسپوز و غیره بردارها و تانسورها از تبدیل متعامد مختصات تأثیر نمی پذیرد. بنابراین برای مثال،

$$(B + C)'_j = B'_j + C'_j, \quad (91-10)$$

$$(T \cdot C)'_j = \sum_{l=1}^r T'_{jl} C'_l, \quad (92-10)$$

$$(T^t)'_{ij} = T'_{ji}. \quad (93-10)$$

همچنین می توان معادلات فوق و معادلات مشابه آنها را مستقیماً با استفاده از معادلات تبدیل و قواعد جبر تانسور و بردار تحقیق کرد. این کار را به سادگی می توان با استفاده از تفسیر دوم معادلات تبدیل، انجام داد. برای مثال، معادله (۹۳-۱۰) را با توجه به روابط زیر ثابت می کنیم:

$$\begin{aligned} (T^t)' &= A \cdot T^t \cdot A^t && [\text{طبق معادله (۸۹-۱۰)}] \\ &= A \cdot (A \cdot T)^t && [\text{طبق معادلات (۵۶-۱۰) و (۵۷-۱۰)}] \\ &= [(A \cdot T) \cdot A^t]' && [\text{طبق معادلات (۵۶-۱۰) و (۵۷-۱۰)}] \\ &= (T^t)^t, Q.E.D && [\text{طبق معادله (۸۹-۱۰)}] \end{aligned}$$

هر خاصیت یا هر رابطه بین بردارها و تانسورها که در تمام دستگاههای مختصات به صورت جبری یکسانی بیان می شوند، دارای یک معنی هندسی است که از دستگاه مختصات مستقل است و آن را خاصیت یا رابطه پایا می نامند.

با در دست داشتن تانسوری مانند T می توان یک کمیت اسکالر (شمارواره) که تریس^۱ تانسور T نامیده می شود، به صورت زیر تعریف کرد.

$$\text{tr}(T) = \sum_{i=1}^r T_{ii}. \quad (94-10)$$

چون این تعریف بر حسب مؤلفه ها است، باید نشان دهیم که تریس تانسور T در تمام دستگاههای مختصات، یکسان است:

$$\begin{aligned} \text{tr}(T) &= \sum_{i=1}^r T_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j,l=1}^r a_{ji} a_{li} T'_{jl} && [\text{طبق معادله (۷۵-۱۰)}] \\ &= \sum_{i,l=1}^r \left[\sum_{j=1}^r a_{ji} a_{li} \right] T'_{jl} && [\text{با تغییر ترتیب جمع بندیها}] \\ &= \sum_{i,l=1}^r T'_{jl} \delta_{jl} && [\text{مانند معادله (۷۸-۱۰)}] \\ &= \sum_{j=1}^r T'_{jj} \quad Q.E.D. && [\text{طبق معادله (۷۹-۱۰)}] \end{aligned}$$

کمیت اسکالر (شمارواره) پایای دیگری که به یک تانسور مربوط می شود، دترمینان است:

$$\text{del}(T) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}, \quad (95-10)$$

که پایا بودن آن را می توان با محاسبه مستقیم نیز تحقیق کرد.

اکنون نتیجه دو تبدیل مختصات فوق را یکی پس از دیگری بررسی می کنیم. مختصات زبرداری به وسیله معادله (۱۰-۶۷) بر حسب مختصات بی زیر تعریف می شوند. فرض کنید که مختصات دو زبرداری به صورت زیر تعریف شوند:

$$x''_k = \sum_{i=1}^3 a'_{ki} x'_i. \quad (96-10)$$

مقدار x'_i را از معادله (۱۰-۶۷) جایگزین می کنیم تا مختصات دو زبرداری را بر حسب مختصات بی زیر به دست آوریم:

$$\begin{aligned} x''_k &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a'_{ki} a_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{i=1}^3 a'_{ki} a_{ij} \right] x_j \\ &= \sum_{j=1}^3 a''_{kj} x_j, \end{aligned} \quad (97-10)$$

که در آن ضرایب تبدیل $x \rightarrow x''$ به وسیله

$$a''_{kj} = \sum_{i=1}^3 a'_{ki} a_{ij}. \quad (98-10)$$

داده می شوند. بنابراین ماتریس ضرایب a''_{kj} به وسیله ضرب کردن ماتریسهای a'_{ki} و a_{ij} طبق قاعده ضرب ماتریسها به دست می آید. اگر ضرایب تبدیل را به عنوان مؤلفه های تانسور A ، A' ، و A'' تفسیر کنیم، در این صورت از معادلات (۱۰-۹۸) و تعریف ضرب دو تانسور (۱۰-۴۵) مشاهده می کنیم که

$$A'' = A' \cdot A. \quad (99-10)$$

این نتیجه از دوبار به کار بردن معادله (۱۰-۸۴) نیز بی درنگ به دست می آید و لذا روش دیگری برای به دست آوردن معادله (۱۰-۹۸) در اختیار داریم.

۴-۱۰ قطری کردن تانسور متقارن

تانسور ثابتی که به وسیله معادله (۱۰-۲۳) تعریف می شود، در هر دستگاه مختصات^۱ دارای ماتریس زیر است:

$$c_1 = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \quad (100-10)$$

یک تانسور غیر ثابت ممکن است در یک دستگاه مختصات خاص، دارای ماتریس زیر باشد:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & \circ & \circ \\ \circ & T_2 & \circ \\ \circ & \circ & T_3 \end{pmatrix}. \quad (10-101)$$

در این صورت می‌گویند که تانسور T به شکل قطری است. تانسور T را تانسور قطری نمی‌نامیم زیرا خاصیت (10-101) فقط به دستگاه مختصات خاصی مربوط می‌شود. و بعد از تغییری در مختصات [معادله (10-74)]، تانسور T معمولاً به شکل قطری باقی نخواهد ماند. اگر T به صورت قطری باشد در این صورت تأثیر آن بر روی برداری مانند C به وسیله معادله زیر داده می‌شود:

$$(T \cdot C)_i = T_i C_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10-102)$$

اهمیت شکل قطری تانسور در قضیه اصلی زیر است:

هر تانسور متقارن را می‌توان به وسیله یک تبدیل متعامد به شکل قطری درآورد. در این صورت عناصر قطری مگر از نظر ترتیب، منحصر به فردند و محورهای مربوط نیز مگر از نظر چندگانگی آنها، منحصر به فردند.

قبل از اینکه این قضیه مهم را ثابت کنیم سعی می‌کنیم که معنی آن را درک کنیم. بنابه قضیه، با در دست داشتن هر تانسور متقارن T ، همواره می‌توان محورهای مختصات را چنان اختیار کرد که تانسور T به وسیله ماتریسی قطری نمایش داده شود. به علاوه انجام این عمل اساساً تنها به یک طریق امکان پذیر است زیرا برای تانسور معلومی مانند T فقط یک شکل قطری (10-101) وجود دارد، مگر از نظر ترتیبی که عناصر قطری T_1 ، T_2 ، و T_3 ظاهر می‌شوند و هر عنصر نیز به یک محور منحصر به فرد در فضا مربوط می‌شود مگر از نظر چندگانگی آنها، یعنی مگر وقتی که دو یا سه عنصر قطری مساوی باشند. محورهای \hat{e}_1 ، \hat{e}_2 ، و \hat{e}_3 در دستگاه مختصاتی که تانسور در آن دارای شکلی قطری است، محورهای اصلی آن دستگاه نامیده می‌شوند. عناصر قطری T_1 ، T_2 ، و T_3 را مقادیر مشخص تانسور T می‌نامند. هرگاه عنصر تانسوری را فقط با یک اندیس بنویسیم، مقصود نمایاندن یک مقدار مشخص است. هر بردار C که با یک محور اصلی موازی باشد، بردار مشخص تانسور T نامیده می‌شود. یک بردار مشخص طبق معادله (10-102)، دارای این خاصیت است که عمل T روی آن به عمل ضرب در مقدار مشخص مربوط تبدیل می‌شود:

$$T \cdot C = T_i C_i, \quad (10-104)$$

که در آن T_i مقدار مشخص مربوط به محور اصلی \hat{e}_i موازی C است.

بنابه قضیه (10-103) می‌توان تانسور متقارن T را به صورت مجموعه‌ای از سه عدد وابسته به سه جهت معین در فضا تصور کرد. اگر T را در فضای برداری بر هر بردار C عامل بدانیم، در این صورت فرمول (10-102) نشان می‌دهد که اثر T بر بردار C یک کشیدگی یا فشردگی در امتداد هر یک از محورهای اصلی است و اگر T_i منفی باشد، انعکاس نیز وجود دارد. در بخش 10-2 دیدیم که یک تانسور متقارن را می‌توان به وسیله شش مؤلفه T_{ij} در هر دستگاه مختصات انتخابی دلخواه، تصریح کرد. اکنون می‌بینیم که می‌توان تانسور T را به وسیله تصریح محورهای اصلی (چنانکه دیدیم، یعنی تعیین سه عدد)، و سه مقدار مشخص مربوط به آنها، تعیین کرد.

اگر دو یا سه مقدار مشخص مساوی باشند، می‌گوییم که مقدار مشخص دوگانه یا سه‌گانه است. اگر مقدار مشخص سه‌گانه باشد، تانسور به‌وضوح تانسوری ثابت (معادلهٔ (۱۰۰-۱۰۰))، و در هر دستگاه مختصاتی قطری خواهد بود. در این صورت محورهای اصلی دیگر منحصر به فرد نخواهند بود و هر محوری، محور اصلی است. هر بردار، بردار مشخص تانسور ثابت است. اگر دو مقدار مشخص مساوی باشند، مثلاً $T_1 = T_2$ ، در این صورت اگر دوران محورهای مختصات در صفحهٔ $\hat{e}_1\hat{e}_2$ را در نظر بگیریم، مشاهده خواهیم کرد که تانسور به‌صورت قطری باقی خواهد ماند. چهار عنصری که مربوط به این صفحه می‌شوند مانند یک تانسور ثابت در آن صفحه رفتار می‌کنند. این بار نیز محورهای اصلی منحصر به فرد نیستند، زیرا دو تا از آنها می‌تواند در هر جای صفحهٔ $\hat{e}_1\hat{e}_2$ قرار گیرد لکن محور سوم \hat{e}_3 وابسته به مقدار مشخص یگانه T_3 منحصر به فرد است. می‌توان ثابت کرد که هر محوری در صفحهٔ $\hat{e}_1\hat{e}_2$ یک محور اصلی است. برای اثبات کافی است اثر T را روی هر بردار

$$C = C_1\hat{e}_1 + C_2\hat{e}_2 \quad (105-10)$$

در این صفحه در نظر بگیریم. با توجه به معادلهٔ (۱۰۲-۱۰۰)، اگر $T_1 = T_2$ ، داریم:

$$\begin{aligned} T \cdot C &= T_1 C_1 \hat{e}_1 + T_2 C_2 \hat{e}_2 \\ &= T_1 C, \end{aligned} \quad (106-10)$$

و در نتیجه C یک بردار مشخص T است. هر بردار در صفحهٔ $\hat{e}_1\hat{e}_2$ یک بردار مشخص تانسور T با مقدار مشخص T_1 است. اگر مایل باشیم، می‌توانیم بگوییم که یک صفحهٔ اصلی وابسته به یک مقدار مشخص دوگانه وجود دارد.

اکنون قضیهٔ (۱۰۳-۱۰۰) را با نشان دادن اینکه چگونه محورهای اصلی پیدا می‌شوند، ثابت می‌کنیم. فرض کنید که تانسور متقارن T بر حسب مؤلفه‌هایش T_{ij} در دستگاه مختصاتی که آن را دستگاه مختصات اولیه می‌نامیم، داده شده باشد. برای یافتن یک محور اصلی باید درصدد یافتن یک بردار مشخص T باشیم. فرض کنید که C چنین بردار مشخص و T' مقدار مشخص مربوط به آن باشد. معادلهٔ (۱۰۴-۱۰۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(T - T') \cdot C = 0. \quad (107-10)$$

اگر این معادله را بر حسب مؤلفه‌ها بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (T_{11} - T')C_1 + T_{12}C_2 + T_{13}C_3 &= 0, \\ T_{21}C_1 + (T_{22} - T')C_2 + T_{23}C_3 &= 0, \\ T_{31}C_1 + T_{32}C_2 + (T_{33} - T')C_3 &= 0. \end{aligned} \quad (108-10)$$

البته این معادلات برای بردار مجهول C دارای جواب بی‌اهمیت $C = 0$ اند. اگر جواب C_i را برحسب دترمینانها بنویسیم، مشاهده می‌کنیم که $C = 0$ تنها جواب خواهد بود مگر اینکه دترمینان آن صفر باشد یعنی:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - T' & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - T' & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - T' \end{vmatrix} = 0, \quad (109-10)$$

که در این حالت جواب C_i نامعین است. در این حالت، در نظریه معادلات خطی^۱ نشان داده شده است که معادلات (۱۰۸-۱۰) نیز جوابهای با اهمیت C_i دارند. واضح است که معادلات (۱۰۸-۱۰) نمی‌توانند اعداد C_1, C_2, C_3 و C_4 را به‌طور منحصر به‌فرد معین کنند، بلکه فقط می‌توانند نسبتهای آنها به یکدیگر یعنی $C_1:C_2:C_3$ را تعیین کنند. این مطلب از معادله (۱۰۷-۱۰) نیز که ماکار را از آن شروع کردیم، واضح است. از نظر هندسی فقط امتداد C معین است و نه اندازه و جهت آن. معادله (۱۰۹-۱۰) که معادله ویژه^۲ نامیده می‌شود، نمایشگر معادله‌ای درجه سوم است که باید آن را برای محاسبه مقدار مشخص T' حل کرد. در حالت کلی سه ریشه T'_1, T'_2, T'_3 و T'_4 وجود خواهد داشت. اگر هر یک از ریشه‌های T'_j معلوم باشد، می‌توان آن را در معادلات (۱۰۸-۱۰) جایگزین کرد و نسبتهای $C_1:C_2:C_3$ را از آن به‌دست آورد. هر برداری که مؤلفه‌هایش به نسبتهای $C_1:C_2:C_3$ باشد، یک بردار مشخص T مربوط به مقدار مشخص T'_j است. در این صورت برای هر مقدار مشخص T'_j ، می‌توان یک بردار یکه \hat{e}_j در امتداد بردارهای مشخص مربوط گرفت. در این صورت محورهای $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ و \hat{e}'_4 محورهای اصلی T اند. وقتی مؤلفه‌های \hat{e}_j را به‌ازای یک T'_j معلوم از معادلات (۱۰۸-۱۰) به‌دست می‌آوریم، سه عدد a_{ji} (که برای $T'_j = T'$ مساوی C_i اند) به‌دست می‌آید که مؤلفه‌های \hat{e}_j در امتداد محورهای \hat{e}_i دستگاه مختصات اولیه‌اند:

$$\hat{e}'_j = \sum_{i=1}^3 a_{ji} \hat{e}_i. \quad (10-110)$$

این درست همان معادله (۱۰۶-۷۶) است. بنابراین اعداد a_{ji} ضرایب تبدیل متعامد از دستگاه مختصات اولیه به محورهای اصلی اند. می‌گوییم که تبدیل با ضرایب a_{ji} تانسور T را قطری می‌کند. برای اینکه مطمئن باشیم که عملیات فوق قابل انجام‌اند، باید چنانکه خواننده ممکن است توجه کرده باشد، سه لم را ثابت کنیم. اول آن که باید ثابت کنیم که ریشه‌های T' معادله ویژه (۱۰۹-۱۰) حقیقی‌اند وگرنه نمی‌توانیم جوابهای حقیقی معادلات (۱۰۸-۱۰) را برای C_1, C_2, C_3 و C_4 به‌دست آوریم. دوم آن که باید ثابت کنیم که بردارهای \hat{e}_j که از معادلات (۱۰۸-۱۰) برای مقادیر مشخص متفاوت به‌دست می‌آیند، بر یکدیگر عمودند وگرنه مجموعه‌ای از بردارهای یکه متعامد به‌دست نمی‌آوریم. سوم آنکه باید نشان دهیم که در حالت چندگانگی دو (یا سه) بردارهای یکه متعامد \hat{e}_j می‌توان یافت که به یک مقدار مشخص مربوط می‌شوند.

(۱۱۱-۱۰) ۱. ریشه‌های معادله ویژه (۱۰۹-۱۰) برای یک تانسور متقارن، حقیقی‌اند.

معادله (۱۰۹-۱۰) از معادله مقدار مشخص (۱۰۴-۱۰) به‌دست می‌آید:

$$T.C = T'.C. \quad (10-112)$$

برای اثبات این لم ابتدا T' را مختلط فرض می‌کنیم. همچنین ناچاریم که مؤلفه‌های C_i بردار C را مختلط فرض کنیم. البته برداری مانند C که مؤلفه‌های مختلط دارد، دارای هیچ‌گونه معنی هندسی به

۱. به‌عنوان مثال به قضیه ۱۰ فصل IX کتاب زیر مراجعه کنید:

Knebelman and Thomas, *Principles of College Algebra*. New York: Prentice-Hall, Inc., 1942.

مفهوم معمولی نیست اما می‌توان تمام تعاریف جبری اعمال برداری مختلف را در مورد بردارهایی که مؤلفه‌های مختلط دارند، نیز صادق دانست. قضایای مختلف جبر برداری برای بردارهایی که مؤلفه‌های مختلط دارند نیز صادق خواهد بود. [البته یک استثناء وجود دارد. طول یک بردار مختلط را نمی‌توان به وسیله معادله (۳-۱۳) تعریف کرد بلکه باید آن را به وسیله رابطه زیر تعریف کرد:

$$|A| = (A^* \cdot A)^{1/2}. \quad (113-10)$$

این تعریف در اینجا ضروری نخواهد بود. برداری که مؤلفه‌هایش مزدوجهای بردار C باشد، با C^* نمایش می‌دهیم. حال C^* را در معادله (۱۰-۱۱۲) ضرب می‌کنیم:

$$C^* \cdot T \cdot C = T' (C^* \cdot C). \quad (114-10)$$

اگر از این معادله مزدوج بگیریم، داریم:

$$C \cdot T \cdot C^* = T'^* (C^* \cdot C), \quad (115-10)$$

زیرا T حقیقی است و با توجه به معادله (۳-۱۸) رابطه فوق برقرار است. اکنون بنا به تعریف (۱۰-۵۳)

$$C^* \cdot T = T^t \cdot C^*. \quad (116-10)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} C^* \cdot T \cdot C &= (C^* \cdot T) \cdot C \\ &= (T^t \cdot C^*) \cdot C \quad [\text{طبق معادله (۱۰-۵۳)}] \\ &= C \cdot T^t \cdot C^* \quad [\text{طبق معادله (۳-۱۸)}] \end{aligned} \quad (117-10)$$

برای یک تانسور متقارن $T = T^t$ ، لذا طرف چپ معادلات (۱۰-۱۱۴) و (۱۰-۱۱۵) با هم برابرند و

$$T' = T'^*, \quad (118-10)$$

و در نتیجه T' حقیقی است.

۲. لم ۱۱۹-۱۰ بردارهای مشخص یک تانسور متقارن مربوط به مقادیر مشخص متفاوت، متعامدند.

برای اثبات این لم فرض می‌کنیم که T'_1 و T'_2 دو مقدار مشخص تانسور T مربوط به بردارهای مشخص C_1 و C_2 باشند:

$$T \cdot C_1 = T'_1 C_1, \quad (120-10)$$

$$T \cdot C_2 = T'_2 C_2. \quad (121-10)$$

معادله (۱۰-۱۲۰) را در C_2 و معادله (۱۰-۱۲۱) را در C_1 ضرب می‌کنیم:

$$C_2 \cdot T \cdot C_1 = T'_1 (C_2 \cdot C_1), \quad (122-10)$$

$$C_1 \cdot T \cdot C_2 = T'_2 (C_2 \cdot C_1). \quad (123-10)$$

چون T متقارن است، طرف چپ دو معادله فوق با هم مساوی‌اند و داریم (اثبات معادله (۱۰-۱۱۷) را ببینید):

$$(T'_1 - T'_2) (C_2 \cdot C_1) = 0. \quad (124-10)$$

اگر مقادیر مشخص T'_1 و T'_2 برابر نباشند، بردارهای مشخص C_1 و C_2 برهم عمود خواهند بود.
 لم ۳. در مورد دو یا سه گانگی، معادلات (۱۰۸-۱۰) دارای دو یا سه جواب دوبه‌دو (۱۰۸-۱۰) متعامد برای بردار C اند.

برای اثبات (۱۲۵-۱۰)، فرض کنید که $T'_1 = T'_2$. اگر $T' = T'_1$ را در معادلات (۱۰۸-۱۰) جایگزین کنیم، بنا به قضیه‌ای که در پانویس صفحه ۴۱۸ به آن اشاره شده است، لااقل یک جواب با اهمیت C_1, C_2, C_3 وجود دارد. فرض کنید که \hat{e}'_1 بردار یکه موازی بردار (C_1, C_2, C_3) باشد. در این صورت

$$T \cdot \hat{e}'_1 = T'_1 \hat{e}'_1. \quad (126-10)$$

اکنون هر جفت بردار یکه متعامد \hat{e}''_2 و \hat{e}''_3 عمود بر \hat{e}'_1 را اختیار کنید و از معادلات (۱۰۸-۶۸) و (۱۰۸-۷۴) برای تبدیل مؤلفه‌های T به دستگاه مختصات دو زبردار $\hat{e}'_1, \hat{e}''_2, \hat{e}''_3$ استفاده کنید. از مقایسه معادلات (۱۰۸-۱۲۶) و (۱۰۸-۳۶) نتیجه می‌شود که باید

$$T''_{11} = T'_1, \quad T''_{21} = 0, \quad T''_{31} = 0. \quad (127-10)$$

چون T متقارن است، بنابراین مؤلفه‌های دو زبردار آن باید به وسیله معادله زیر داده شوند

$$T = \begin{pmatrix} T'_1 & 0 & 0 \\ 0 & T''_{22} & T''_{23} \\ 0 & T''_{23} & T''_{33} \end{pmatrix}. \quad (128-10)$$

به‌علاوه معادله ویژه

$$\begin{vmatrix} T'_1 - T' & 0 & 0 \\ 0 & T''_{22} - T' & T''_{23} \\ 0 & T''_{23} & T''_{33} - T' \end{vmatrix} = 0. \quad (129-10)$$

باید دارای همان ریشه‌هایی باشد که معادله (۱۰۹-۱۰) دارد. این صحیح است، زیرا طرف چپ هر دو معادله دترمینانهای همان تانسور $(T - T')$ اند که در دستگاههای مختصات دوزبردار و بی‌زی بیان شده‌اند و در انتهای بخش ۱۰-۳ متذکر شدیم که دترمینان یک تانسور در تمام دستگاههای مختصات، دارای مقدار واحدی است. اگر دترمینان (۱۰۹-۱۲۹) را برحسب عناصر سطر اول بسط دهیم نتیجه می‌شود که

$$(T'_1 - T') \begin{vmatrix} T''_{22} - T' & T''_{23} \\ T''_{23} & T''_{33} - T' \end{vmatrix} = 0. \quad (130-10)$$

چون T'_1 ریشه دوگانه یا سه‌گانه این معادله است، باید ریشه معادله زیر باشد:

$$\begin{vmatrix} T''_{22} - T' & T''_{23} \\ T''_{23} & T''_{33} - T' \end{vmatrix} = 0. \quad (131-10)$$

بنابراین معادلات

$$\begin{aligned} (T''_{22} - T'_1) C''_2 + T''_{23} C''_3 &= 0, \\ T''_{23} C''_2 + (T''_{33} - T'_1) C''_3 &= 0, \end{aligned} \quad (132-10)$$

جواب غیر صفری دارند که یک بردار مشخص (C''_1, C''_2, C''_3) در صفحه $\hat{e}''_1 \hat{e}''_2$ با مقدار مشخص T'_1 را تعریف می‌کند. بنابراین بردار مشخص یکم دومی، \hat{e}'_1 ، داریم که موازی (C''_2, C''_3) و عمود بر \hat{e}'_1 است. اگر بردار یکم سومی مانند \hat{e}'_2 را عمود بر \hat{e}'_1 و \hat{e}'_2 بگیریم، در این دستگاه مختصات زبردار،

باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} T'_{11} &= T'_1, & T'_{21} &= 0, & T'_{31} &= 0, \\ T'_{12} &= 0, & T'_{22} &= T'_1, & T'_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (133-10)$$

پس T باید دارای مؤلفه‌های زیر باشد

$$T = \begin{pmatrix} T'_1 & 0 & 0 \\ 0 & T'_1 & 0 \\ 0 & 0 & T'_1 \end{pmatrix}, \quad (134-10)$$

و $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ و $\hat{e}''_1, \hat{e}''_2, \hat{e}''_3$ محورهای اصلی اند. اگر T'_1 ریشه سه گانه معادله $(109-10)$ باشد، ریشه سه گانه معادله ویژه زیر نیز خواهد بود

$$\begin{vmatrix} T'_1 - T' & 0 & 0 \\ 0 & T'_1 - T' & 0 \\ 0 & 0 & T'_1 - T' \end{vmatrix} = (T'_1 - T')(T'_1 - T')(T'_1 - T') = 0. \quad (135-10)$$

بنابراین $T'_1 = T'_2 = T'_3$ است و سه بردار مشخص متعامد داریم که مربوط به سه ریشه $T'_1 = T'_2 = T'_3$ اند. سه لم فوق اثبات قضیه اصلی $(103-10)$ را کامل می‌کند. عملیات جبری این بخش را می‌توان به فضاهای برداری با ابعاد دلخواه با نتایج مشابه مربوط به وجود محورهای اصلی یک تانسور متقارن، تعمیم داد.

در انتهای بخش ۱۰-۳ متذکر شدیم که تریس و دترمینان تانسور T در تمام دستگاههای مختصات دارای مقداری یکسان اند. از معادله $(101-10)$ مشاهده می‌کنیم که تریس، حاصل جمع مقایر مشخص T

$$\text{tr}(T) = T_1 + T_2 + T_3, \quad (136-10)$$

و دترمینان، حاصل ضرب مقادیر مشخص است:

$$\det(T) = T_1 T_2 T_3. \quad (137-10)$$

از طریق جمع حاصل ضربهای دوه‌دوی مقادیر مشخص، می‌توانیم کمیت اسکالر (شمارواره) پایای سومی وابسته به یک تانسور متقارن تشکیل دهیم:

$$M(T) = T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1. \quad (138-10)$$

از طریق به دست آوردن سه ریشه T_1, T_2, T_3 و معادله ویژه $(109-10)$ و با استفاده از معادله $(138-10)$ ، می‌توانیم $M(T)$ را در هر دستگاه مختصاتی حساب کنیم. با توجه به این مطلب که مجموع $(138-10)$ باید ضرب T' در معادله $(109-10)$ [که خود جمع ماینورهای^۱ قطری دترمینان T است] باشد،

می توان از حل معادله (۱۰-۱۰۹) اجتناب ورزید:

$$M(T) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{33} & T_{31} \\ T_{13} & T_{11} \end{vmatrix}. \quad (10-139)$$

همچنین می توانستیم به وسیله محاسبه مستقیم نشان دهیم که $M(T)$ به صورتی که به وسیله معادله (۱۰-۱۳۹) داده شده است، بعد از تبدیل مختصات داده شده به وسیله معادله (۱۰-۷۴) دارای همان مقدار است. برای هر تانسور T ، دترمینان $(T - T')$ باید در تمام دستگاههای مختصات مقدار یکسانی داشته باشد. بنابراین ریشه های T' معادله (۱۰-۱۰۹) به خصوص، حتی برای تانسورهایی که متقارن نیستند، در تمام دستگاههای مختصات یکسان خواهند بود. ریشه های T' را همچنان مقادیر مشخص T می نامیم. اگر T متقارن نباشد، یک مقدار مشخص حقیقی، و دو مقدار مشخص دیگر یک جفت عدد مختلط خواهند بود که مزدوج یکدیگرند. برای مقدار مشخص حقیقی، می توانیم یک بردار مشخص پیدا کنیم. برای مقادیر مشخص مختلط در حالت کلی نمی توانیم بردارهای مشخص پیدا کنیم. (البته فقط به شرط این که بردارهایی با مؤلفه های مختلطی را بپذیریم که فقط ارزش جبری دارند. حتی در آن صورت نیز نمی توانیم در حالت کلی ثابت کنیم که بردارهای مشخص، متعامدند). در هر حال عباراتی که به وسیله معادلات (۱۰-۱۳۶)، (۱۰-۱۳۷)، (۱۰-۱۳۸)، و (۱۰-۱۳۹) داده می شوند هنوز حقیقی و مستقل از دستگاه مختصات اند.

به عنوان مثالی از روش قطری کردن یک تانسور، تانسور زیر را که به وضوح متقارن است، قطری می کنیم:

$$T = AA + BD + DB,$$

A ، B ، و D را برابر عبارات زیر فرض می کنیم:

$$A = 4ae_1,$$

$$B = 7ae_2 + ae_3,$$

$$D = ae_2 - ae_3.$$

در این صورت تانسور T در این دستگاه مختصات به وسیله ماتریس زیر بیان می شود:

$$T = \begin{pmatrix} 16a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 14a^2 & -6a^2 \\ 0 & -6a^2 & -2a^2 \end{pmatrix}.$$

در این حالت معادله ویژه (۱۰-۱۰۹) عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} 16a^2 - T' & 0 & 0 \\ 0 & 14a^2 - T' & -6a^2 \\ 0 & -6a^2 & -2a^2 - T' \end{vmatrix} = (16a^2 - T')$$

$$\times (T'^2 + 12a^2 T' - 64a^3) = 0.$$

ریشه ها (که به ضرورت حقیقی اند) عبارت اند از:

$$T'_1 = 16a^2, \quad T'_2 = 16a^2, \quad T'_3 = -4a^2.$$

معادلات (۱۰۸-۱۰) برای ریشه‌های دوگانه $T' = 16a^2$ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} & 0 = 0, \\ & -2a^2 C_\gamma - 6a^2 C_\mu = 0, \\ & -6a^2 C_\gamma - 18a^2 C_\mu = 0. \end{aligned}$$

واضح است که C_1 دلخواه است و اگر

$$C_\gamma = -3C_\mu.$$

دو معادله آخر هر دو برقرار خواهند بود. بنابراین هر بردار به شکل

$$C = C_1 \hat{e}_1 - 3C_\mu \hat{e}_\gamma + C_\mu \hat{e}_\beta$$

برای C_1 و C_μ دلخواه، یک بردار مشخص است. بنابراین خانواده‌ای دو پارامتری از بردارهای مشخص ممکن داریم، که از آنها می‌توانیم برای \hat{e}'_1 و \hat{e}'_β دو بردار یکه متعامد دلخواه انتخاب کنیم. مثلاً فرض می‌کنیم:

$$\hat{e}'_1 = \hat{e}_1, (C_1 = 1, C_\mu = 0 \text{ یعنی}),$$

$$\hat{e}'_\beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \hat{e}_\beta - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{e}_\gamma, (C_1 = 0, C_\mu = 1/\sqrt{10} \text{ یعنی}).$$

می‌توانستیم مقدار \hat{e}'_1 را از شکل تانسور T حدس بزنیم. خواننده باید نشان دهد که \hat{e}'_1 و \hat{e}'_β در واقع هر بردار واقع در صفحه $\hat{e}'_1 \hat{e}'_\beta$ در معادله (۱۰۴-۱۰) به شرط $T_i = 16a^2$ صدق می‌کند. معادله (۱۰۸-۱۰) به‌ازای $T' = -4a^2$ چنین می‌شود

$$\begin{aligned} & 20a^2 C_1 = 0, \\ & 18a^2 C_\gamma - 6a^2 C_\mu = 0, \\ & -6a^2 C_\gamma + 2a^2 C_\mu = 0. \end{aligned}$$

اکنون فقط یک خانواده یک پارامتری از جوابها وجود دارد.

$$C_1 = 0, \quad C_\mu = 3C_\gamma,$$

که فقط یکی از آنها بردار مشخص یکه (صرف‌نظر از علامت) است:

$$\hat{e}'_\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{e}_\beta + \frac{3}{\sqrt{10}} \hat{e}_\gamma,$$

که در آن علامت مثبت اختیار شده است تا \hat{e}'_1 ، \hat{e}'_β ، و \hat{e}'_μ یک دستگاه راست‌گرد تشکیل دهند. راست‌گردی یا چپ‌گردی را می‌توان با تجسم سه بردار یا با بررسی رابطه $1 + (\hat{e}'_1 \times \hat{e}'_\beta) \cdot \hat{e}'_\mu$ تعیین کرد. همان‌طور که از لم ۱ نتیجه می‌شود، بردار \hat{e}'_μ باید بر صفحه $\hat{e}'_1 \hat{e}'_\beta$ عمود باشد. می‌توان تحقیق کرد که \hat{e}'_μ یک بردار مشخص تانسور T با مقدار مشخص $-4a^2$ است.

با مراجعه به معادله (۱۰۷-۷۶)، می‌توانیم ضرایب تبدیل محورهای اصلی تانسور T را بنویسیم:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

خواننده باید تحقیق کند که این ضرایب در معادلات (۷۸-۱۰) صادق‌اند و بردارهای \hat{e}_j طبق معادلات (۷۱-۱۰) و (۷۲-۱۰) به‌طور مناسب تبدیل یافته‌اند و در این حالت عبارت‌اند از:

$$\delta_{jk} = \sum_{i=1}^3 a_{ki} e'_{ji}, \quad e'_{ji} = \sum_{k=1}^3 a_{ki} \delta_{jk},$$

که در آن i, e'_{ji} امین مؤلفه \hat{e}_j در دستگاه مختصات بی‌زبر، و δ_{jk} ، k امین مؤلفه \hat{e}_j در دستگاه مختصات زبردار است و همچنین \mathbf{T} طبق معادله (۷۴-۱۰) به‌طور مناسب از شکل اولیه خود به شکل قطری تبدیل یافته است.

۱۰-۵ تانسور ماند

تانسور ماند یک جسم صلب به‌وسیله معادله (۲۵-۱۰) داده می‌شود. برای جسمی با چگالی $\rho(x, y, z)$ تانسور ماند را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$I_0 = \iiint \rho (r^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}\mathbf{r}) dV, \quad (۱۴۰-۱۰)$$

که در آن اندیس « O » به این منظور به کار رفته است که به‌خاطر آوریم که تانسور ماند نسبت به یک مجموعه از محورها با مبدأ O محاسبه می‌شود. مگر هنگامی که چند مبدأ مورد بحث باشد از نوشتن اندیس O صرف‌نظر می‌کنیم، مؤلفه‌های قطری تانسور I درست همان گشتاورهای ماند (معادله (۵-۸۰)) حول سه محورند:

$$I_{xx} = \iiint \rho (y^2 + z^2) dV,$$

$$I_{yy} = \iiint \rho (z^2 + x^2) dV, \quad (۱۴۱-۱۰)$$

$$I_{zz} = \iiint \rho (x^2 + y^2) dV.$$

مؤلفه‌های غیرقطری که اغلب حاصل ضربهای ماند نامیده می‌شوند، عبارت‌اند از

$$I_{xy} = I_{yx} = - \iiint \rho xy dV,$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \iiint \rho yz dV, \quad (۱۴۲-۱۰)$$

$$I_{zx} = I_{xz} = - \iiint \rho zx dV.$$

چون می‌توان از معادله (۷۴-۱۰) برای محاسبه مؤلفه‌های تانسور ماند نسبت به هر مجموعه دیگری از محورها که از همان مبدأ می‌گذرند استفاده کرد، از معادلات (۷۴-۱۰) و (۱۴۱-۱۰) نتیجه می‌شود که گشتاور ماند حول هر محور مار بر O در جهتی که به‌وسیله بردار یکه \hat{n} مشخص می‌شود، عبارت است از

$$I_{\hat{n}} = \hat{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{n}. \quad (۱۴۳-۱۰)$$

اگر محور \hat{n} محور تقارن جسم نباشد اغلب راحت تر این است که مؤلفه‌های تانسور ماند را نسبت به مجموعه مناسبی از محورها حساب کنیم و سپس معادله (۱۰-۱۴۳) را به کار ببریم تا آنکه $I_{\hat{n}}$ را مستقیماً حساب کنیم. (به عنوان مثال، مسئله ۲۵ را ملاحظه کنید).

از طریق محاسبه تانسور ماند I_O نسبت به یک مبدأ مختصات دلخواه O بر حسب تانسور ماند I_G نسبت به مرکز جرم G ، می توانیم قضیه مفیدی مشابه قضیه محوری موازی (۵-۸۱) برای گشتاور ماند به دست آوریم. فرض کنید r و r' به ترتیب بردارهای مکانی هر نقطه P واقع در جسم نسبت به O و G باشند و فرض کنید R مختصه G نسبت به O باشد (شکل ۵-۱۲)،

$$r = r' + R. \quad (10-144)$$

در این صورت از معادله (۱۰-۱۴۰) نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} I_O &= \iiint \rho [(r' + R) \cdot (r' + R)] - (r' + R)(r' + R) dV \\ &= \iiint \rho [(r' \cdot r') - r' r'] dV + [(R \cdot R) - RR] \iiint \rho dV \\ &\quad + 2 \mathbf{1} [R \cdot \iiint \rho r' dV] - \left[\iiint \rho r' dV \right] R - R \iiint \rho r' dV. \quad (10-145) \end{aligned}$$

با توجه به تعریف (۵-۵۳) مرکز جرم نتیجه می شود

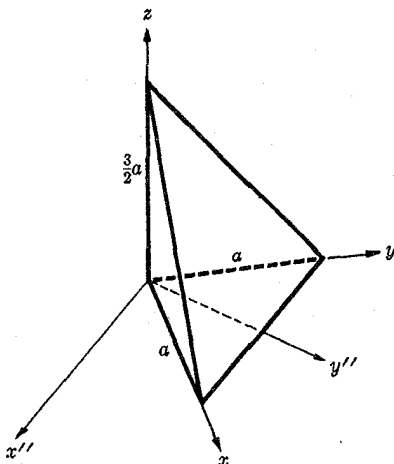
$$\iiint \rho r' dV = 0. \quad (10-146)$$

در این صورت معادله (۱۰-۱۴۵) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$I_O = I_G + M(R^2 \mathbf{1} - RR). \quad (10-147)$$

توجه کنید که حکم و اثبات این قضیه هر دو به دقت با قضیه محور موازی (۵-۸۳) برای گشتاور ماند شباهت دارد.

از تعریف (۱۰-۱۴۰) آشکار است که تانسور ماند یک جسم مرکب را می توان به وسیله جمع کردن تانسورهای ماند قسمتهای آن، که همگی نسبت به یک مبدأ مشترک حساب شده باشند، به دست آورد. اگر جسمی دوران کند، مؤلفه‌های تانسور ماند آن نسبت به محورهای ساکن، با زمان تغییر خواهند کرد. البته اگر جسم صلب باشد، مؤلفه‌ها نسبت به محورهای ثابت در جسم، تغییر نخواهند کرد. می توان تصور کرد که تانسور ماند I با جسم دوران می کند. اگر مؤلفه‌های (ثابت) در امتداد محورهای ثابت در جسم داده باشند، مؤلفه‌های (متغیر) در امتداد محورهای ساکن به وسیله معادله (۱۰-۸۹) داده می شوند، که در آن A نمایشگر تبدیل از محورهای جسم به محورهای فضا است. برای اغلب مقاصد فیزیکی مناسب ترین مجموعه محورها در جسم، محورهای اصلی تانسور ماندند که آنها را محورهای اصلی جسم نیز می نامند. مقادیر مشخص تانسور ماند گشتاورهای اصلی ماند نامیده می شوند. در فصل بعدی مطالب بیشتری در باره اهمیت دینامیکی محورهای اصلی خواهیم آموخت، اما در اینجا توجه می کنیم که طبق معادله (۱۰-۲۴) اگر جسم حول محوری اصلی دوران کند، اندازه حرکت زاویه‌ای با سرعت زاویه‌ای موازی خواهد بود. همیشه می توانیم محورهای دلخواهی اختیار کنیم و تانسور ماند I را حساب کنیم و سپس برای یافتن محورهای اصلی از روش



شکل ۱۰-۱ هرمی مثلث القاعده.

بخش ۱-۴ استفاده کنیم. ولی اغلب می توان از ابتدا با اختیار دستگاه مختصاتی که یک یا همه محورهاى آن، محورهاى اصلی باشند، مسئله را ساده تر کرد.

در بسیاری از حالات، جسم دارای تقارنى است، چنانکه می توان نتیجه گرفت که اگر محورها را در جهت‌های معینى اختیار کنیم، بعضی از حاصل ضربهای ماند از بین خواهند رفت. به عنوان مثال می توانیم قضیه زیر را ثابت کنیم:

(۱۰-۱۴۸) هر صفحه تقارن جسم بر یک محور اصلی عمود است.

اگر صفحه yz را به عنوان صفحه تقارن اختیار کنیم،

$$\rho(-x, y, z) = \rho(x, y, z). \quad (10-149)$$

به سادگی می توان نشان داد که به علت وجود معادله (۱۰-۱۴۹)، انتگرالهای (۱۰-۱۴۲) برای I_{xy} و I_{zx} صفر می شوند. بنابراین در این حالت محور x یک محور اصلی است. به همین ترتیب می توان قضیه زیر را ثابت کرد:

هر محور تقارن جسم، محوری اصلی است. صفحه عمود بر این محور، صفحه‌ای اصلی مربوط به یک گشتاور ماند اصلی چندگانه است. (۱۰-۱۵۰)

یک کره، یا جسمی که دارای تقارن کروی است به وضوح دارای تانسور ماند ثابتی است. به عنوان مثال، هرم مثلث القاعده‌ای را که در شکل ۱۰-۱ نشان داده شده است در نظر بگیرید. مؤلفه‌های تانسور ماند نسبت به محورهاى (x, y, z) را باید از فرمول زیر حساب کرد:

$$I = \int_{z=0}^{\frac{3}{2}a} \int_{y=0}^{a-\frac{2}{3}z} \int_{x=0}^{a-y-\frac{2}{3}z} \rho \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -zx \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dx dy dz,$$

که در آن هر مؤلفه I را باید به وسیله محاسبه انتگرال مشخص شده روی مؤلفه ماتریس مربوط به

آن، به دست آورد. چگالی ρ بر حسب جرم M به وسیله رابطه زیر داده می شود:

$$M = \frac{1}{4} a^3 \rho.$$

به علت تقارن بین x و y لازم است که فقط چهار انتگرال را حساب کرد

$$J_1 = \iiint \rho x^2 dx dy dz = \iiint \rho y^2 dx dy dz = \frac{1}{10} Ma^2,$$

$$J_2 = \iiint \rho z^2 dx dy dz = \frac{9}{40} Ma^2,$$

$$J_3 = \iiint \rho xy dx dy dz = \frac{1}{20} Ma^2,$$

$$J_4 = \iiint \rho xz dx dy dz = \iiint \rho yz dx dy dz = \frac{3}{40} Ma^2.$$

در این صورت تانسور ماند به وسیله رابطه زیر داده می شود:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} J_1+J_2 & -J_3 & -J_4 \\ -J_3 & J_1+J_2 & -J_4 \\ -J_4 & -J_4 & 2J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{40},$$

که در آن معنی علامت طرف راست این است که هر عنصر ماتریس باید در عامل $Ma^2/40$ ضرب شود. می خواهیم محورهای اصلی را پیدا کنیم. بنا به تقارن [قضیه (۱۰-۱۴۸)]، محور x'' که در شکل ۱-۱۰ نشان داده شده است، یک محور اصلی است، لذا ابتدا تانسور ماند را به محورهای x'' ، y'' ، و z تبدیل می کنیم. ضرایب تبدیل طبق معادله (۱۰-۶۸)، عبارت اند از:

$$\begin{pmatrix} a_{x''x} & a_{x''y} & a_{x''z} \\ a_{y''x} & a_{y''y} & a_{y''z} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

با استفاده از معادله (۱۰-۷۴)، اکنون مؤلفه های تانسور ماند را در امتداد محورهای x'' ، y'' ، و z حساب می کنیم:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -3\sqrt{2} \\ 0 & -3\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{40}.$$

مشاهده می کنیم که محور x'' به راستی یک محور اصلی است. معادله ویژه عبارت است از

$$\begin{vmatrix} 15 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 11 - \lambda & -3\sqrt{2} \\ 0 & -3\sqrt{2} & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad T' = \frac{Ma^2}{40} \lambda,$$

و ریشه ها عبارت اند از

$$\lambda_{x''} = 15, \quad \lambda_{y''} = 5, \quad \lambda_{z'} = 14,$$

$$T_{x''} = \frac{3}{8} Ma^2, \quad T_{y''} = \frac{1}{8} Ma^2, \quad T_{z'} = \frac{3}{40} Ma^2.$$

مؤلفه‌های بردارهای یکه \hat{x}' ، \hat{y}' و \hat{z}' را برحسب بردارهای یکه \hat{x} ، \hat{y} و \hat{z} می‌توان از معادلات (۱۰-۱۰۸) به دست آورد:

$$\begin{aligned}\hat{x}' &= \hat{x}'' , \\ \hat{y}' &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\hat{y}'' + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{6}\hat{z}'' , \\ \hat{z}' &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{6}\hat{y}'' + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\hat{z}'' .\end{aligned}$$

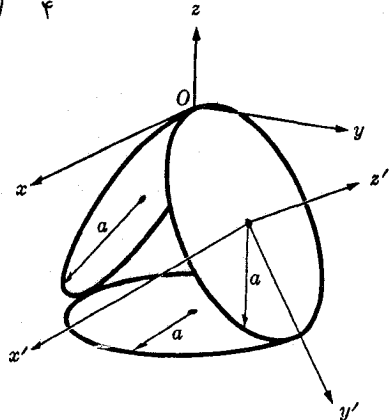
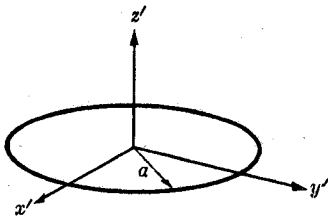
انتخاب اینکه کدام ریشه را $\lambda_{y'}$ و کدام ریشه را $\lambda_{z'}$ بنامیم کاملاً اختیاری است. در اینجا این انتخاب از \hat{x}' ، \hat{y}' و \hat{z}' یک دستگاه مختصات راست‌گرد می‌سازد.

به‌عنوان مثال دوم، تانسور ماند جسم نشان داده شده در شکل ۱۰-۲ را حول نقطه O پیدا می‌کنیم. جسم از سه قرص مسطح به جرم M و شعاع a تشکیل شده است. بنابه تقارن، محورهای اصلی x ، y ، و z اند که نشان داده شده‌اند. ابتدا تانسور ماند یک قرص تنها را حول مرکزش نسبت به محورهای اصلی آن x' ، y' و z' همان‌طور که در شکل ۱۰-۳ نشان داده شده است، حساب می‌کنیم. گشتاور ماند $I_{z'}$ به وسیله معادله (۵-۹۰) داده می‌شود و طبق قضیه محور متعامد (۵-۸۴)، گشتاورهای ماند $I_{x'}$ ، $I_{y'}$ نصف گشتاور ماند $I_{z'}$ اند. بنابراین می‌توانیم گشتاور ماند یک قرص را نسبت به محورهای اصلی آن x' ، y' و z' به صورت زیر بنویسیم:

$$I_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4} . \quad (10-151)$$

برای قرص پایینی محورهای اصلی با x ، y ، و z موازی‌اند و کافی است که از قضیه (۱۰-۱۴۷) برای به دست آوردن تانسور ماند نسبت به محورهای x ، y ، و z با مبدأ O ، استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}I_0 &= I_G + M(3a^2\mathbf{1} - 3a^2\hat{z}\hat{z}) \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4} .\end{aligned}$$



شکل ۱۰-۳ قرص مدور با محورهای اصلی آن.

شکل ۱۰-۲ سه قرص.

برای قرص طرف راست که دارای محورهای x' ، y' ، و z' است ابتدا از قضیه (۱۰-۱۴۷) برای به دست آوردن تانسور ماند حول O نسبت به محورهایی موازی x' ، y' ، و z' استفاده می‌کنیم:

$$I_{O(x'y'z')} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}$$

تبدیل از محورهای x' ، y' ، و z' به محورهای x ، y ، و z به وسیله

$$A = \begin{pmatrix} a_{xx'} & a_{xy'} & a_{xz'} \\ a_{yx'} & a_{yy'} & a_{yz'} \\ a_{zx'} & a_{zy'} & a_{zz'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

داده می‌شود. اکنون معادله (۱۰-۷۴) را به کار می‌بریم. شاید آسان‌تر آن باشد که محاسبه را در دو مرحله انجام دهیم، طبق معادله (۱۰-۸۹):

$$A \cdot I_{O(x'y'z')} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}$$

اکنون

$$\begin{aligned} (A \cdot I_{O(x'y'z')}) \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4} \\ &= I_{O(xyz)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{4} & \frac{5}{4}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{5}{4}\sqrt{3} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4} \end{aligned}$$

این عملیات جبری را می‌توان به صورت محاسبه I_O نسبت به یک مجموعه از محورهای جدید تفسیر کرد. یا می‌توان تانسور A را به صورت تانسوری که قرص را به اندازه زاویه 60° حول محور x دوران می‌دهد، تعبیر کرد. در این صورت $I_{O(x'y'z')}$ گشتاور ماند قرصی است که محورهای اصلی آن با x ، y ، و z موازی‌اند و عملیات جبری عبارت از محاسبه اثر دوران قرص به مکان نهایی آن است. به همین ترتیب قرص طرف چپ نیز دارای تانسور ماند زیر است،

$$I_{O(xyz)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{4} & -\frac{5}{4}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{5}{4}\sqrt{3} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}$$

۱. ماتریسها را می‌توان به راحتی طبق قاعده (۱۰-۴۵) با توجه به این مطلب که عنصر $(T \cdot S)_{ik}$ به وسیله جمع حاصل ضربهای دوی عناصر سطر i تانسور T در عناصر ستون k تانسور S به دست می‌آید، در هم ضرب کرد.

اکنون می‌توان تانسورهای ماند سه قرص را با هم جمع کرد و در نتیجه

$$I_0 = \begin{pmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & 22\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 6\frac{1}{4} \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}$$

حال گشتاور ماند جسمی را که در شکل ۱۰-۲ نشان داده شده است حول محور y' ماربر O حساب می‌کنیم. طبق معادله (۱۴۳-۱۰) داریم

$$I_{y'} = \hat{y}' \cdot I_0 \cdot \hat{y}' = 10 \cdot \frac{1}{4} Ma^2$$

می‌توانستیم از قضیه (۱۴۷-۱۰) برای محاسبه I حول مرکز ثقل G که در محل تقاطع محورهای z و z' قرار دارد، استفاده کنیم. از تقارن نتیجه می‌شود که هر محوری که در مرکز یکی از سه قرص بر آن عمود باشد، یک محور اصلی نسبت به G است. این فقط به شرطی درست است که تانسور ماند نسبت به G دارای دوگانگی در صفحه zyz' باشد. خواننده باید این مطلب را به وسیله انتقال I_0 به مرکز جرم G امتحان کند. باید توجه داشت که محورهای اصلی تانسورهای ماند یک جسم نسبت به دو نقطه متفاوت O و O' همان‌طوری که از آزمایش با معادله (۱۴۷-۱۰) نتیجه می‌شود، در حالت کلی موازی نخواهند بود.

T انرژی جنبشی یک جسم صلب دوران‌کننده نیز ممکن است برحسب تانسور ماند بیان شود. از معادلات (۱۰-۲) و (۱۰-۳) و با استفاده از قواعد جبر برداری داریم

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{4} m_k v_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{4} m_k (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{4} m_k \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k)] \\ &= \frac{1}{4} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (152-10)$$

لذا انرژی جنبشی T ممکن است به صورت زیر بیان شود

$$T = \frac{1}{4} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (153-10)$$

در این صورت معادله فوق بر حسب مؤلفه‌های موازی با مجموعه‌ای از محورها عبارت است از

$$\frac{1}{4} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{4} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{4} I_{zz} \omega_z^2 + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{yz} \omega_y \omega_z + I_{zx} \omega_z \omega_x = T. \quad (154-10)$$

این معادله خانواده‌ای از سطوح درجه دوم در فضای $\boldsymbol{\omega}$ است و هر سطح مکان هندسی سرعتهای زاویه‌ای است که انرژی جنبشی برای آنها دارای مقدار ثابت T است. اگر معادله (۱۵۳-۱۰) برحسب مؤلفه‌های موازی با محورهای اصلی x' ، y' ، و z' نوشته شود:

$$\frac{1}{4} I'_x \omega'^2_x + \frac{1}{4} I'_y \omega'^2_y + \frac{1}{4} I'_z \omega'^2_z = T, \quad (155-10)$$

مشاهده می شود که این صفحات بیضوی اند زیرا گشتاورهای ماند به ضرورت مثبت اند. اگر بردار r را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$r = \frac{a}{(\gamma T)^{1/2}} \omega, \quad (156-10)$$

که در آن a ثابت است، معادله (۱۵۳-۱۰) ممکن است به صورت زیر نوشته شود:

$$r \cdot I \cdot r = a^2. \quad (157-10)$$

این، معادله بیضوی ماند^۱ است. ثابت a اندازه بیضوی را معین می کند. ضریب مقیاس a به این سبب وارد شد که ممکن است r یک بردار مختصه در فضای معمولی باشد که بر حسب واحدهای طول اندازه گیری می شود. رسم بر این است که در تمام دستگاههای آحاد $a = 1$ اختیار شود، مثلاً $a = 1 \text{ cm-sec-erg}^{1/2}$ سانتی متر - ارگ - ثانیه. در این حالت ملاحظه می کنیم که اندازه بیضوی (نه شکل آن) به واحدهای به کار رفته بستگی دارد.

بیضوی ماند یک جسم، مانند تانسور ماند آن، نسبت به مبدأ خاصی است که گشتاورها حول آن حساب می شوند. شش ضریب صورت درجه دوم طرف چپ معادله (۱۵۷-۱۰) مؤلفه های تانسور ماندند:

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{yz}yz + 2I_{zx}zx = a^2, \quad (158-10)$$

چنانکه تانسور ماند فقط به وسیله بیضوی ماند مربوط به آن مشخص می شود. این روش هندسی مناسب دیگری برای تصور تانسور ماند است.

از مقایسه معادله (۱۵۷-۱۰) با معادله (۱۴۳-۱۰) مشاهده می شود که شعاع هر نقطه از بیضوی ماند عبارت است از

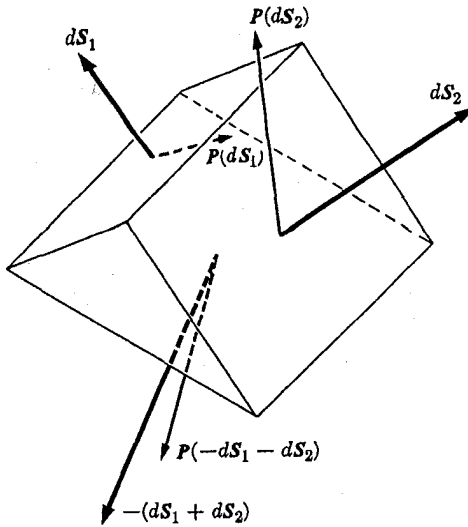
$$r = aI_r^{-1/2} \quad (159-10)$$

که در آن I_r گشتاور ماند حول محوری موازی r است. به ویژه گشتاورهای ماند اصلی به وسیله معادله (۱۵۹-۱۰) به نیم محوره های اصلی بیضوی ماند مربوط می شوند. مشاهده می شود که اگر دوگانگی وجود داشته باشد، بیضوی ماند یک بیضوی دوار است. اگر تمام گشتاورهای ماند اصلی با هم مساوی باشند، بیضوی ماند یک کره خواهد بود.

برای هر تانسور متقارن T ، می توانیم معادله درجه دومی به صورت (۱۵۷-۱۰) تشکیل دهیم که سطح درجه دومی را تعریف کند که تانسور T را به طور منحصر به فرد مشخص سازد. محوره های اصلی T محوره های اصلی سطح درجه دوم مربوط به آن اند. اگر مقادیر مشخص T مثبت باشند، سطح یک بیضوی، وگرنه هذلولوی^۲ یا استوانه خواهد بود. اگر تمام مقادیر مشخص منفی باشند، لازم است طرف راست معادله درجه دوم را معادل $-a^2$ بگذاریم تا سطحی حقیقی را تعریف کند.

۶-۱۰ تانسور تنش

فرض کنید که هر جزء سطحی کوچک در محیطی پیوسته به وسیله یک بردار dS نمایش داده شود که اندازه اش dS برابر مساحت جزء سطح و امتدادش عمود بر آن باشد. برای تصریح جهت dS بین دو طرف جزء سطح تمایزی قائل می شویم و یکی را پشت و دیگری را رو می نامیم.



شکل ۱۰-۴ هرم مثلث القاعده در محیط پیوسته.

در این صورت جهت dS از پشت به رو است. و حالت تنش محیط در هر نقطه Q را می توان با تصریح نیروی $P(dS)$ وارد بر جزء سطح در Q از طرف ماده پشت dS به ماده روی آن توصیف کرد. البته قرارمان بر این است که جزء سطح dS بی نهایت کوچک است. به این معنی که حکمهای ما به شرطی صحیح است که تمام اجزای $dS \rightarrow 0$. برای جزء سطحی که به اندازه کافی کوچک باشد، نیروی P ممکن است به سطح و طرز قرارگیری جزء سطح در فضا بستگی داشته باشد و نه به شکل آن. بنابراین P در واقع فقط تابعی از بردار dS در هر نقطه خاص Q از محیط است. نشان خواهیم داد که $P(dS)$ تابعی خطی از dS است. بنابراین می توان تابع $P(dS)$ را به وسیله یک تانسور P ، که تانسور تنش است^۱، نمایش داد:

$$P(dS) = P \cdot dS . \quad (۱۰-۱۶۰)$$

برای اینکه نشان دهیم $P(dS)$ یک تابع برداری خطی است، ابتدا توجه می کنیم که اگر dS به اندازه کافی کوچک باشد به طوری که حالت تنش محیط روی جزء سطح تغییر نکند، تا هنگامی که طرز قرارگیری سطح ثابت نگه داشته شود، نیروی P متناسب با مساحت dS خواهد بود. بنابراین برای ثابت مثبت c ،

$$P(c dS) = c P(dS) . \quad (۱۰-۱۶۱)$$

اگر جهت dS معکوس شود، پشت و روی جزء سطح عوض می شوند و لذا طبق قانون سوم نیوتن، $P(-dS) = -P(dS)$ و در نتیجه معادله (۱۰-۱۶۱) برای c منفی نیز برقرار خواهد بود. اکنون

۱. خواننده بهتر است توجه داشته باشد که مصنفان بسیاری تانسور تنش را با علامتی مخالف علامت تعریف شده در این کتاب تعریف می کنند. لذا کشش تانسوری مثبت، و فشار تانسوری منفی است. قرارداد اخیر در مهندسی تقریباً عمومیت دارد، در حالی که تعریف قبول شده در این کتاب در کارهای فیزیک نظری متداول تر است.

فرض کنید که دو بردار دلخواه dS_1 و dS_2 داده شده‌اند. منشور مثلث القاعده‌ای در محیط تصور کنید که دو وجه آن dS_1 و dS_2 باشند (شکل ۱۰-۴). اگر قاعده‌های منشور بر وجوه آن عمود باشند، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است وجه سوم $-(dS_1 + dS_2)$ خواهد بود. اگر طول منشور بسیار بزرگتر از ابعاد سطح مقطع باشد می‌توان از نیروهای وارد بر قاعده‌ها صرف‌نظر کرد و نیروی کل وارد بر منشور عبارت است از

$$dF = P(dS_1) + P(dS_2) + P(-dS_1 - dS_2). \quad (10-162)$$

اگر چگالی ρ باشد، شتاب منشور به وسیله قانون حرکت نیوتن داده می‌شود:

$$\rho dVa = dF. \quad (10-163)$$

اکنون اگر تمام ابعاد خطی منشور را به اندازه یک عامل α کاهش دهیم، مساحت‌های dS_i در α^2 ضرب خواهند شد و لذا طبق معادله (۱۰-۱۶۱)، dF در α^3 ضرب می‌شوند. بنابراین

$$\alpha \rho dVa(\alpha) = dF, \quad (10-164)$$

که در آن $a(\alpha)$ شتاب منشوری است که α مرتبه کوچکتر است. اکنون هنگامی که $\alpha \rightarrow 0$ ، شتاب نباید بی‌نهایت شود، لذا نتیجه می‌گیریم که

$$dF = 0, \quad (10-165)$$

که از آن طبق معادلات (۱۰-۱۶۲) و (۱۰-۱۶۱) داریم:

$$P(dS_1) + P(dS_2) = P(dS_1 + dS_2). \quad (10-166)$$

معادلات (۱۰-۱۶۱) و (۱۰-۱۶۶) نشان می‌دهند که تابع $P(dS)$ خطی است. توجه داشته باشید که معادلات (۱۰-۱۶۶) و (۱۰-۱۶۲) متضمن آن‌اند که اگر تابع تنش $P(dS)$ در تمام وجوه یکسان باشد، هیچ‌گونه نیروی خالصی بر منشور وارد نمی‌شود. هر نیروی خالصی فقط از اختلاف‌های تنش در نقاط مختلف محیط نتیجه می‌شود و وقتی $\alpha \rightarrow 0$ ، این اختلاف‌ها به صفر نزدیک می‌شوند.

با در نظر گرفتن منشورهای مربع کوچک و تشخیص این که وقتی اندازه منشور صفر می‌شود، شتاب نباید بی‌نهایت گردد، می‌توان با استدلال مشابهی نشان داد (مسئله ۳۲ را ببینید) که P باید یک تانسور متقارن باشد. بنابراین تنشها در هر نقطه Q در محیط به وسیله تصریح شش مؤلفه تانسور تنش متقارن P داده می‌شوند.

اگر محیط سیالی آرمانی یعنی تنها تنش آن فشار p در تمام جهات باشد، مسلم است که تانسور تنش عبارت خواهد بود از

$$P = p1. \quad (10-167)$$

توجه داشته باشید که در فصل ۸ ثابت نکردیم که در یک سیال آرمانی، یعنی سیالی که در مقابل هیچ‌گونه تنش برشی مقاومت نمی‌کند، فشار در تمام جهات یکسان است. این مطلب فقط در فصل ۵ برای یک سیال متعادل ثابت شد. اکنون این عیب منطقی را می‌توان از بین برد. (مسئله ۳۳ را ببینید).

طبق تعریف \mathbf{P} ، نیروی کل ناشی از تنش وارد بر هر سطح S ، عبارت است از جمع برداری نیروهای وارد بر اجزاء آن سطح:

$$\mathbf{F} = \int_S \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (168-10)$$

اگر S سطح بسته‌ای باشد که یک حجم V از محیط را دربر گرفته باشد، و اگر \hat{n} بردار قراردادی یک‌عمود و متوجه به طرف خارج باشد، نیروی کل وارد بر حجم V به وسیله ماده خارج از آن عبارت است از

$$\mathbf{F} = - \int_S \int \hat{n} \cdot \mathbf{P} dS, \quad (169-10)$$

و طبق قضیه تعمیم یافته گاوس [بحث بعد از معادله (۵-۱۷۸) را ببینید]، داریم

$$\mathbf{F} = - \int_V \int \nabla \cdot \mathbf{P} dV. \quad (170-10)$$

چون V هر حجم دلخواه از محیط است، چگالی نیروی ناشی از تنش عبارت است از

$$\mathbf{f}_S = - \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (171-10)$$

اینجا نیز همان‌طور که در بحث قبلی دیدیم، مشاهده می‌کنیم که این چگالی نیرو فقط از اختلاف تنش در نقاط مختلف محیط، به وجود می‌آید. معادله (۱۰-۱۷۱) را می‌توان به وسیله جمع کردن نیروهای وارد بر جزء حجم کوچک مکعب مستطیل شکلی نیز به دست آورد.

اکنون می‌توان معادله حرکت (۸-۱۳۸) را طوری تعمیم داد که در مورد هر محیط پیوسته‌ای به کار رود:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \mathbf{f}. \quad (172-10)$$

این معادله را می‌توان به شکل (۸-۱۳۹) نیز نوشت:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\mathbf{f}}{\rho}. \quad (173-10)$$

این معادله، همراه با معادله پیوستگی (۸-۱۲۷) وقتی چگالی نیروی حجمی \mathbf{f} و تانسور تنش \mathbf{P} داده شده باشند، حرکت محیط را معین می‌کنند. تانسور تنش \mathbf{P} در هر نقطه Q ممکن است تابعی از چگالی و درجه حرارت و از مکانها و سرعتهای نسبی جزءهای نزدیک Q ، و حتی از تاریخچه گذشته محیط باشد، که ممکن است جامد (الاستیک (کشوار) یا پلاستیک (غیرکشوار)) یا مایع (آرمانی یا چسبنده)، باشد.

از معادلات (۱۰-۱۷۲) و (۱۰-۱۷۳) می‌توانیم معادلات بقایی مشابه آنها که در بخش ۸-۸ حاصل شد، به دست آوریم. به عنوان مثال، معادله بقای انرژی مشابه معادله (۸-۱۴۹) عبارت است از:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \rho v^2 \delta V \right) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{P}) \delta V. \quad (174-10)$$

همان‌طور که خواننده می‌تواند خود تحقیق کند، به علت اختلاف موجود بین شکل جمله تانسور تنش در اینجا و جمله تانسور فشار در معادله (۸-۱۴۹)، سایر عملیات جبری روی معادله انرژی که در بخش ۸-۸ انجام شد، ممکن نیست به همان طریق برای معادله (۱۰-۱۷۴) انجام گیرد. تغییرات

انرژی وابسته به تغییرات حجم و شکل یک جزء در یک محیط پیوسته، معمولاً پیچیده تر از تغییراتی است که به فشردگی و کشیدگی سیال آرماتی وابسته است.

در یک سیال چسبنده، انتظار می رود که تانسور تنش \mathbf{P} به گرادیان سرعت در سیال بستگی داشته باشد. البته این مطلب از نظر بعد با بحثی که در بخش ۸-۱۵ داشتیم، سازگار است. در آن بخش مشاهده کردیم که عبارت $\nabla \cdot \mathbf{P}$ در معادله (۱۰-۱۷۲) باید شامل حاصل ضرب ضرب چسبندگی η در ترکیبی از مشتقهای دوم مؤلفه های سرعت نسبت به x ، y ، و z باشد. اگر سیال (همان طور که فرض خواهیم کرد) ایزتروپ باشد، در این صورت رابطه بین \mathbf{P} و گرادیان سرعت نباید به طرز قرارگیری دستگاه مختصات بستگی داشته باشد. می توان صحت این مطلب را به وسیله بیان این رابطه به شکل برداری که اشاره صریحی به مؤلفه ها نمی کند، تضمین کرد. دوتایی

$$\nabla v = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (10-175)$$

نه مشتق ممکن مؤلفه های v نسبت به x ، y ، و z است. بنابراین باید سعی کنیم \mathbf{P} را به ∇v مربوط سازیم. دوتایی (۱۰-۱۷۵) متقارن نیست، ولی می توانیم آن را به یک قسمت متقارن و یک قسمت ضد متقارن، مانند معادلات (۱۰-۶۴) تا (۱۰-۶۶)، تفکیک کنیم:

$$\nabla v = (\nabla v)_s + (\nabla v)_a, \quad (10-176)$$

$$(\nabla v)_s = \frac{1}{3} \nabla v + \frac{1}{3} (\nabla v)^t \quad (10-177)$$

$$(\nabla v)_a = \frac{1}{3} \nabla v - \frac{1}{3} (\nabla v)^t. \quad (10-178)$$

قسمت ضد متقارن چنانکه در معادلات (۱۰-۶۲) و (۱۰-۶۳)، مربوط می شود به یک بردار

$$\omega = \frac{1}{3} \nabla \times v, \quad (10-179)$$

به طوری که برای هر بردار dr

$$(\nabla v)_a \cdot dr = \omega \times dr. \quad (10-180)$$

اگر برداری از نقطه معلوم Q به هر نقطه مجاور Q' باشد، مشاهده می کنیم که تانسور $(\nabla v)_a$ قسمتهایی از اختلافات سرعت بین Q و Q' را انتخاب می کند که به یک دوران (صلب) سیال حول Q با سرعت زاویه ای ω مربوط می شوند. این مطلب با بحث معادله (۸-۱۳۳) که همانند معادله (۸-۱۷۹) است، سازگار است. چون هیچ گونه نیروی چسبندگی با یک دوران خالص سیال همراه نیست، نیروهای چسبندگی باید بر حسب تانسور $(\nabla v)_s$ بیان شوند.

چون \mathbf{P} نیز متقارن است، می توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{P} = C (\nabla v)_s, \quad (10-181)$$

که در آن C یک ثابت است. در حالت ساده‌ای که در شکل ۸-۱۱ نشان داده شده است، $\partial v_x / \partial y$ تنها مؤلفه غیر صفر ∇v است و در این صورت معادلات (۱۰-۱۸۱) و (۱۰-۱۷۷) به رابطه زیر منجر می‌شوند.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} C \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{1}{2} C \frac{\partial v_x}{\partial y} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad (10-182)$$

و نیروی چسبندگی وارد بر سطح $dS = \hat{y} dS$ عبارت خواهد بود از

$$dF = P \cdot dS = \frac{1}{2} C \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \hat{x}, \quad (10-183)$$

که اگر $C = -2\eta$ ، با معادله (۸-۲۵۴) توافق دارد. واضح است که یک علامت منفی لازم است زیرا نیروی چسبندگی مخالف گرادیان سرعت است. مع هذا معادله (۱۰-۱۸۱) کلی‌ترین رابطه خطی بین P و ∇v نیست که مستقل از دستگاه مختصات است. زیرا می‌توانیم $(\nabla v)_s$ را همچنان به طریق زیر به یک تانسور متقارن بی‌تریس تجزیه کنیم:

$$(\nabla v)_s = (\nabla v)_c + (\nabla v)_{ts}, \quad (10-184)$$

$$(\nabla v)_c = \frac{1}{3} Tr(\nabla v)_s \mathbf{1} = \frac{1}{3} \nabla \cdot v \mathbf{1}, \quad (10-185)$$

$$(\nabla v)_{ts} = (\nabla v)_s - \frac{1}{3} \nabla \cdot v \mathbf{1}, \quad (10-186)$$

این تجزیه مستقل از دستگاه مختصات است زیرا نشان داده‌ایم که تریس کمیتی تغییرناپذیر است. از معادله (۸-۱۱۶) نتیجه می‌شود که تانسور $(\nabla v)_c$ میزان کشیدگی یا فشردگی سیال است. تانسور $(\nabla v)_{ts}$ با پنج مؤلفه مستقل، معین‌کننده نحوه اعمال برش بر سیال است. لذا آزادیم که تانسور P را به صورت زیر اختیار کنیم:

$$P = -2\eta (\nabla v)_{ts} - \frac{1}{3} \eta' \nabla \cdot v \mathbf{1}, \quad (10-187)$$

که در آن ضرایب η و η' به ترتیب مقاومت چسبندگی نسبت به برش، و نسبت به کشیدگی و فشردگی را - در صورتی که چنین مقاومتی باشد - مشخص می‌کنند. جمله آخر به فشاری (یا کششی) یکنواخت در تمام جهات در نقطه داده شده مربوط می‌شود. ضریب η' کوچک است و نمی‌توان آن را برای سیالهای معمولی به‌طور تجربی به‌خوبی معین کرد. طبق نظریه جنبشی گازها، ضریب η' برای یک گاز آرمانی صفر است. فشار ئیدرواستاتیکی را (که ممکن است وجود هم داشته باشد) باید به تنش چسبنده ناشی از گرایانهای سرعت [که به‌وسیله فرمول (۱۰-۱۸۷) داده می‌شود] اضافه کرد. این فشار به چگالی درجه حرارت و ساختمان سیال بستگی دارد. اگر آخرین جمله معادله (۱۰-۱۸۷) و فشار ئیدرواستاتیکی را روی هم به صورت فشار کل p نمایش دهیم، تانسور تنش کامل عبارت خواهد بود از

$$P = p \mathbf{1} - \eta [\nabla v + (\nabla v)^t - \frac{2}{3} \nabla \cdot v \mathbf{1}]. \quad (10-188)$$

خواننده می‌تواند این معادله را فوراً بر حسب مؤلفه‌ها بنویسد.

فرمول (۱۰-۱۸۸) کلی‌ترین عبارت برای تنش در یک سیال ایزوترپ است که فشار ئیدرواستاتیکی و نیروهای متناسب با گرادیان سرعت در آن وجود دارد. می‌توان تصور کرد که تنش ممکن است شامل جملات غیرخطی گرادیان سرعت یا حتی شامل مشتق‌های مرتبه بالای سرعت نیز باشد، ولی می‌توان انتظار داشت که این جملات در مقایسه با جملات خطی، کوچک باشند. از نظر تجربی در اکثر حالات تنش‌های چسبنده در سیالها به‌طور خیلی دقیق به وسیله فرمول (۱۰-۱۸۸) داده می‌شود. تانسور ∇v را که دارای نه مؤلفه مستقل است به مجموعه‌ای از سه تانسور تقسیم کرده‌ایم که دارای یک، سه، و پنج مؤلفه مستقل اند و هر یک از آنها ترکیبی خطی از مؤلفه‌های ∇v اند. واضح است که تجزیه مشابهی برای هر تانسوری امکان‌پذیر است. خواننده ممکن است سؤال کند که آیا تجزیه بیشتری امکان‌پذیر است؟ این مسئله‌ای در نظریه گروه‌هاست. ما نتیجه آن را بی‌اثبات بیان می‌کنیم. تانسور ضدمتقارن و تانسور متقارن بی‌تریس هیچ یک را نمی‌توان به روشی که مستقل از دستگاه مختصات باشد بیشتر تجزیه کرد. خواننده می‌تواند با آزمایش کوچکی در مورد تانسورها خود را به صحت این امر متقاعد کند.

اکنون جامد الاستیکی (کشواری) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که جامد در ابتدا در حالت بی‌تنشی قرار گرفته باشد و فرض کنید که هر نقطه از جسم به وسیله بردار مکانی خود r نسبت به هر مبدأ مناسبی مشخص شده باشد. اکنون فرض کنید که جامد با حرکت هر نقطه r به مکانی جدید، که با بردار $r + p(r)$ نسبت به همان مبدأ مشخص شده است، تحت تأثیر تنش قرار گیرد. مؤلفه‌های r را به وسیله (x, y, z) و مؤلفه‌های p را به وسیله (ξ, η, ζ) نمایش می‌دهیم. اگر p مستقل از r بود، حرکت، یک تغییر مکان یکنواخت بی‌تغییر شکل می‌شد. بنابراین تغییر طول نسبی هر نقطه را می‌توان به وسیله دو تایی گرادیان مشخص کرد:

$$\nabla p = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (10-189)$$

اکنون ∇p را می‌توان دو باره به یک قسمت ضدمتقارن که به یک دوران صلب حول نقطه $r + p$ مربوط می‌شود، و یک قسمت متقارن که تغییر شکل جامد در همسایگی هر نقطه را بیان می‌کند، تجزیه کرد:

$$S = \frac{1}{3} \nabla p + \frac{1}{3} (\nabla p)^t \quad (10-190)$$

قسمت متقارن را نیز می‌توان به یک تانسور ثابت و یک تانسور متقارن بی‌تریس تجزیه کرد که به ترتیب کشیدگی و فشردگی حجمی و برش را توصیف می‌کنند:

$$S_c = \frac{1}{3} \nabla \cdot p \mathbf{1} = \frac{1}{3} \frac{\Delta(\delta V)}{\delta V} \mathbf{1}, \quad (10-191)$$

$$S_{st} = \frac{1}{3} \nabla p + \frac{1}{3} (\nabla p)^t - \frac{1}{3} \nabla \cdot p \mathbf{1}. \quad (10-192)$$

اگر جامد ایزوتروپ باشد، این تجزیه کلی‌ترین تجزیه ممکن خواهد بود. به علاوه اگر قانون هوک برقرار باشد، باید تنش با تغییر اندازه نسبی متناسب باشد:

$$P = -\frac{1}{3} a \nabla \cdot \rho \mathbf{1} - b S_{sr}. \quad (193-10)$$

واضح است که ضرایب a و b به ضریب حجمی و ضریب برشی مربوط می‌شوند. برای پیدا کردن a بر حسب ضریب حجمی، یک انبساط یکنواخت جامد، مانند تعریف (۵-۱۱۶) ضریب حجمی، را تصور می‌کنیم. فرض کنید که هر بُعد خطی جامد به اندازه یک عامل α افزایش پیدا می‌کند. تغییر مکان هر نقطه در جامد در این صورت به وسیله

$$\rho = \alpha r,$$

داده می‌شود که در آن مبدأ مختصات نقطه‌ای اختیار می‌شود که تغییر مکان نمی‌دهد. برای این نوع کرنش (تغییر طول نسبی)، تنش یک فشار همسانگرد (یک کشش) Δp است به طوری که، با توجه به معادله (۱۰-۱۹۳)، می‌توان نوشت

$$P = \Delta p \mathbf{1} = -a \alpha \mathbf{1}.$$

چون در این حالت $\Delta V/V = 3\alpha$ ، می‌توانیم مقدار ثابت a را بخوانیم:

$$a = -\frac{3\Delta p V}{\Delta V} = 3B, \quad (194-10)$$

که در آن تعریف (۵-۱۱۶) ضریب حجمی را به کار برده‌ایم. اکنون یک کرنش برشی، به کار برده شده در تعریف ضریب برشی، را در نظر می‌گیریم که در شکل ۵-۲۱ نشان داده شده است. با محور x در جهت نشان داده شده و محور y در جهت برش، تنها مؤلفه غیر صفر $\nabla \rho$ عبارت است از $\partial \eta / \partial x = \tan \theta$. بنابراین، کرنش به صورت زیر داده می‌شود

$$S = S_{sr} = \begin{pmatrix} \circ & \frac{1}{3} \tan \theta & \circ \\ \frac{1}{3} \tan \theta & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}. \quad (195-10)$$

از شکل ۵-۲۱ می‌بینیم که تانسور تنش باید شامل مؤلفه $P_{yx} = -F/A$ باشد. چون تانسور تنش باید متقارن باشد مؤلفه $P_{xy} = -F/A$ را نیز باید اضافه کرد؛ از شکل ۵-۲۱ نیز آشکار است که اگر قرار باشد جامد در شکل در حال تعادل باشد، لازم است مؤلفه دوم تنش اضافه گردد. چون تنشهای دیگری ارتباط به این کرنش ویژه ندارند، تانسور تنش عبارت است از

$$P = \begin{pmatrix} \circ & -F/A & \circ \\ -F/A & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}. \quad (196-10)$$

اگر تعریف (۵-۱۱۸) ضریب برشی را به کار برده و معادلات (۱۰-۱۹۵) و (۱۰-۱۹۶) را مقایسه کنیم، مشاهده می‌کنیم که

$$b = \frac{2F}{A} \tan \theta = 2n. \quad (197-10)$$

اگر جامد ایزوتروپ نباشد مثل یک کریستال، رابطه بین P و S ممکن است به انتخاب محورها بستگی داشته باشد و لذا باید به صورت زیر نوشته شود:

$$P_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} S_{kl} \quad (10-198)$$

چون P و S هر یک دارای شش مؤلفه مستقل اند، سی و شش ضریب c_{ijkl} وجود دارد. با به کار بردن این نکته که یک انرژی پتانسیل الاستیکی (کشور) وجود دارد که تابعی از تغییر اندازه نسبی است، می توان نشان داد که در کلی ترین حالت بیست و یک ضریب مستقل c_{ijkl} وجود دارد.

مسائل

۱. cT ، حاصل ضرب یک تانسور در یک اسکالر (شمارواره) در کتاب بی تعریف رسمی به کار برده شده است. این نقص را با تعریفی مناسب و اثبات این که این حاصل ضرب دارای همان خواص جبری است که ما انتظار داریم، برطرف کنید.

۲. نشان دهید که نیروی گریز از مرکز معادله (۷-۳۷) تابع خطی r بردار مکانی ذره است و عبارتی برای تانسور مربوط به آن به شکل دوتایی پیدا کنید و ماتریس ضرایب آن را بنویسید.

۳. مشتقهای زمانی dT/dt و $d'T/dt$ نسبت به دستگاه مختصات ثابت و دوران کننده را همان طور که در فصل ۷ برای مشتقهای بردارها انجام شد، تعریف کنید. ثابت کنید که

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d'T}{dt} + \omega \times T - T \times \omega,$$

که در آن حاصل ضرب خارجی یک بردار در یک تانسور به طریق بدهی تعریف شده است.

۴. روابط بین ضرایب a_{ij} نظیر روابط (۱۰-۸۰) را بنویسید. رابطه دیگری بین بردارهای یکه ای که شامل یک حاصل ضرب خارجی سه گانه است، و روابط متناظر بین ضرایب آنها را بنویسید.

۵. با استفاده از معادله (۱۰-۷۴) تانسور

$$T = AB + BA,$$

را که در آن

$$A = 5\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}, \quad B = 5\hat{y} + 10\hat{z},$$

به دستگاه مختصاتی که 45° حول محور z دوران کرده است، تبدیل کنید. با استفاده از معادله (۱۰-۷۱)، بردارهای A و B را تبدیل کنید و نشان دهید که نتایج با هم سازگارند.

۶. دو رابطه اضافی مانند روابط موجود در معادله (۱۰-۹۱) تا معادله (۱۰-۹۳) که شامل خواص جبری باشند که در تبدیل مختصات حفظ می شوند، بنویسید و آنها را ثابت کنید.

۷. معادلات (۱۰-۹۱) و (۱۰-۹۲) را ثابت کنید.

۸. ماتریسی برای تانسور متعامد A بنویسید که دورانی به اندازه زاویه α حول محور z تولید کند.

A را مانند معادله (۱۰-۶۶) به یک تانسور متقارن و یک تانسور ضدمتقارن تجزیه کنید. تعبیر هندسی این تجزیه چیست؟

۹. ثابت کنید که $\text{Det}(T)$ [معادله (۱۰-۹۵)] در تمام دستگاههای مختصات یکسان است.

۱۰. (الف) ثابت کنید که تانسور داده شده به وسیله فرمول (۱۰-۱۰۰) دارای خاصیت است که به وسیله معادله (۱۰-۲۳) داده شده است. (ب) با محاسبه مستقیم ثابت کنید که این تانسور در تمام دستگاههای مختصات به وسیله یک ماتریس نشان داده می شود.

۱۱. با محاسبه مستقیم ثابت کنید که کمیت $M(T)$ که به وسیله معادله (۱۰-۱۳۹) تعریف می شود، بعد از تبدیل مختصات (۱۰-۷۴) نیز دارای همان مقدار است.

۱۲. تانسور مسئله ۵ را قطری کنید. (یعنی مقادیر مشخص و محورهای اصلی مربوط به آن را پیدا کنید).
۱۳. تانسور زیر را قطری کنید.

$$T = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2 & -5\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

(راهنمایی. می توانید از معادله ویژه فاکتورگیری کنید. ریشه ها همه اعداد صحیح اند.)

۱۴. محورهای اصلی و مقادیر مشخص مربوط به تانسور مسئله ۲ را پیدا کنید. از نظر فیزیکی آنها را تفسیر کنید.

۱۵. احکام بند آخر بخش ۱۰-۴ را در مورد تبدیل محور اصلی به دست آمده در مثال تحقیق کنید.

۱۶. ثابت کنید که اگر دو تانسور S و T دارای مجموعه ای از محورهای اصلی مشترک باشند، $S \cdot T = T \cdot S$. (عکس این مطلب نیز صحیح است).

۱۷. ثابت کنید که اگر تانسور T در معادله جبری زیر صدق کند

$$a_n T^n + \dots + a_4 T^4 + a_1 T + a_0 \cdot 1 = 0,$$

که در آن T^n به معنی $T \cdot T \dots T$ (n مرتبه) باشد، در این صورت مقادیر مشخص آن باید در همان معادله صادق باشد. تانسور صفر (null) 0 به طریق بدیهی تعریف می شود.

۱۸. با استفاده از نتیجه مسئله ۱۷ نشان دهید که مقادیر مشخص تانسور A که نمایشگر دوران 180° حول محوری است، فقط ممکن است ± 1 باشد. [راهنمایی. نتیجه دو بار کاربرد A را در نظر بگیرید]. نشان دهید که ریشه ها همگی ممکن نیست $+1$ باشند. سپس نشان دهید که -1 باید یک ریشه دوگانه (مضاعف) باشد. [راهنمایی. از معادلات (۱۰-۱۳۷) و (۱۰-۸۱) استفاده کنید]. آیا می توانید بردارهای مشخص مربوط به آن را حدس بزنید؟ تمام این مسئله باید با استفاده از استدلالهای کلی و بی نوشتن ماتریسی برای A جواب داده شود.

۱۹. نشان دهید که مقادیر مشخص تانسور متعامد [معادله (۱۰-۸۷)] اعداد مختلط (یا حقیقی) با اندازه (یا قدر مطلق) واحدند. [راهنمایی. فرض کنید که C یک بردار مشخص (احتمالاً مختلط) تانسور T باشد و کمیت $(T \cdot C^*)$ ، $(T \cdot C)$ را در نظر بگیرید.] و از آنجا نشان دهید که یکی از مقادیر مشخص باید ± 1 و دو مقدار مشخص دیگر به شکل $\exp(\pm i\alpha)$ برای یک زاویه α باشند.

۲۰. مؤلفه‌های تانسور متعامد A مربوط به دورانی به اندازه زاویه θ حول محور z را بنویسید. مقادیر مشخص آن را پیدا کنید. بردارهای مشخص مربوط به مقدار مشخص حقیقی را پیدا و آن را تفسیر کنید.

۲۱. مؤلفه‌های تانسور مربوط به دورانی به اندازه زاویه θ حول محور z و سپس دورانی به اندازه زاویه ψ حول محور y را پیدا کنید، مقادیر مشخص آن را پیدا کنید. [راهنمایی. بنا به مسئله ۱۹، یک مقدار مشخص ± 1 است، لذا می‌توانید معادله ویژه را تجزیه کنید.] نشان دهید که این نتیجه متضمن آن است که این تبدیل معادل دورانی ساده حول یک محور است. (احتیاجی به یافتن محور نیست.) به وسیله مقایسه نتیجه خود با مقادیر مشخص یافته شده در مسئله ۲۰، زاویه دوران را پیدا کنید.

۲۲. نشان دهید که مقادیر مشخص یک تانسور ضدمتقارن موهومی محض (یا صفر)ند. از اینجا نشان دهید که یک تانسور ضدمتقارن باید دارای یک مقدار مشخص صفر و دو مقدار مشخص موهومی مزدوج باشد. بردارهای مشخص مربوط به مقدار مشخص صفر را برای تانسور (۱۰-۶۲) پیدا کنید.

۲۳. تانسور ماند میله‌ای مستقیم به جرم m و به طول l را حول مرکز آن پیدا کنید. با استفاده از این نتیجه، تانسور ماند آن را حول شبه مرکز هرم منتظمی که از شش میله یکنواخت به وجود می‌آید پیدا کنید. نشان دهید که با در دست داشتن نتیجه مسئله ۲۳ فصل ۵، این تانسور را می‌توان بلافاصله با در نظر گرفتن تقارن نوشت.

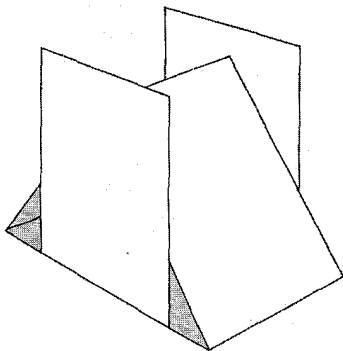
۲۴. تانسور ماند سه قرص شکل ۱۰-۲ را که حول مبدأ حساب شده است به مرکز جرم G منتقل کنید. حکم مربوط به دوگانگی I_G را که در کتاب به کار رفته است تحقیق کنید.

۲۵. گشتاور ماند جامد مخروط شکل را حول یک ارتفاع مایل حساب کنید. [راهنمایی. تانسور ماند را حول رأس نسبت به محورهای اصلی، با استفاده از معادله (۱۰-۱۴۳) حساب کنید.]

۲۶. جامع‌ترین قضیه‌ای را که می‌توانید، در مورد تانسور ماند یک لایه نازک بیان و ثابت کنید. درباره محورهای اصلی و گشتاورهای ماند اصلی چه می‌توانید بگویید؟

۲۷. به هر روشی که متضمن کمترین عملیات جبری باشد، تانسور ماند آجر مکعب مستطیل شکل یکنواختی به جرم M و ابعاد $a \times b \times c$ را حول مجموعه‌ای از محورهای مار بر مرکزش که محور z آن موازی ضلع c و محور y آن قطری از مستطیل $a \times b$ باشد پیدا کنید.

۲۸. (الف) کره یکنواختی به جرم M و شعاع a دارای دو جرم نقطه‌ای $\frac{1}{4}M$ و $\frac{1}{8}M$ است که روی سطح آن به فاصله زاویه‌ای 45° از هم واقع شده‌اند. محورهای اصلی و گشتاورهای ماند اصلی حول



شکل ۱۰-۵ خانه‌ای از ورق.

مرکز کره را پیدا کنید. (ب) تانسور ماند را حول محورهای موازی ماربر مرکز جرم پیدا کنید. آیا آنها هنوز محورهای اصلی‌اند؟

۲۹. (الف) تانسور ماند صفحه مستطیل شکلی به جرم M و ابعاد $a \times b$ را پیدا کنید. (ب) با استفاده از این نتیجه، تانسور ماند خانه‌ای از ورق را که در شکل ۱۰-۵ نشان داده شده است حول مرکز جرم آن پیدا کنید. هر ورق دارای جرم M و ابعاد $(a \times b)$ ($a < b$) است. از محورهای اصلی استفاده کنید.

۳۰. معادله بیضوی ماند یک آجر مکعب مستطیل شکل یکنواخت به ابعاد $l \times w \times h$ را پیدا کنید.

۳۱. معادله بیضوی ماند جسمی به شکل یک بیضوی را که دارای معادله زیر است پیدا کنید.

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{w^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1.$$

۳۲. ثابت کنید که تانسور تنش P متقارن است.

۳۳. ثابت کنید که اگر بر هیچ جزء سطح در هر نقطه برشی وجود نداشته باشد، تانسور تنش P در آن نقطه تانسوری ثابت است [معادله (۱۰-۲۳)].

۳۴. با محاسبه نیروی خالص وارد بر یک جزء حجمی مستطیل شکل، معادله (۱۰-۱۷۱) را به دست آورید.

۳۵. از معادله (۱۰-۱۷۳) معادله

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v v + P) = f,$$

که قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای را بیان می‌کند، به دست آورید. از این معادله نشان دهید که تانسور جریان اندازه حرکت $(\rho v v + P)$ نمایشگر سیلان اندازه حرکت است و دو عبارت این تانسور را از نظر فیزیکی تفسیر کنید.

۳۶. از معادله (۱۰-۱۷۲) قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای را به شکلی مشابه معادله (۸-۱۴۸) به دست آورید.

۳۷. معادلات حرکت (۱۰-۱۷۳) را برای سیال چسبنده متحرکی در مختصات استوانه‌ای بنویسید. با استفاده از این معادلات و فرضهای مناسبی، قانون پوازوی^۱ (۸-۲۵۲) را برای سیلان دائم چسبنده در یک لوله، به دست آورید. تانسور تنش را برای این حالت در مختصات استوانه‌ای به صورت تابعی از r ، z ، و φ بنویسید.

۳۸. مؤلفه‌های تانسور تنش \mathbf{P} را در یک سیال چسبنده بنویسید.

۳۹. الف) نشان دهید که میزان تولید انرژی جنبشی به واحد حجم ناشی از تنشها در یک محیط متحرک عبارت است از

$$Q = -\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}).$$

ب) نشان دهید که میزان انجام کار به وسیله تنشها بر محیط، نسبت به واحد حجم عبارت است از

$$\frac{dW}{dt} = -\nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}).$$

[راهنمایی. کار انجام شده از ورای سطح هر حجم دلخواه V را با استفاده از قضیه گاوس محاسبه کنید]. پ) با استفاده از این نتایج، میزان انرژی تلف شده نسبت به واحد حجم در سیال متحرک به وسیله تنشهای چسبنده را حساب کنید و آن را برحسب مؤلفه‌ها بنویسید.

۴۰. جامد تکروندی تحت تأثیر تنشی قرار می‌گیرد که متشکل است از یک کشش خالص τ بر واحد سطح در یک جهت. مطلوب است کرنش (ضریب طول نسبی) S بر حسب B ، τ ، و n . با استفاده از این نتیجه، ضریب یانگ [معادله (۵-۱۱۴)] را بر حسب B و n بیان کنید. [راهنمایی. از خاصیت تقارن برای تعیین کردن شکل S استفاده کنید].

*۴۱. کلی‌ترین رابطه بین \mathbf{S} و \mathbf{P} را برای ماده الاستیک (کشوار) غیرایزوتروپی پیدا کنید که نسبت به یک جهت خاص دارای تقارن استوانه‌ای باشد.

*۴۲. الف) فرض کنید که در جامد الاستیک (کشوار) غیرایزوتروپی، یک انرژی پتانسیل الاستیک (کشوار) V به واحد حجم وجود دارد، که تابع درجه دومی از مؤلفه‌های تغییرشکل نسبی است. نشان دهید که برای تعیین V ، ۲۱ ثابت لازم است. ب) نشان دهید که اگر تغییرشکل نسبی در جامد متعادل به اندازه δS نمو کند، کار انجام شده بر حسب واحد حجم در مقابل تنشها (صرف نظر از کارهای انجام شده در مقابل نیروهای حجمی) عبارت است از:

$$dW = - \sum_{i,j=1}^3 P_{ij} \delta S_{ij}.$$

[راهنمایی. کار انجام شده روی یک جزء حجم به وسیله تنشهای وارد بر سطح آن را ضمن استفاده از قانون گاوس حساب کنید].

پ) با ترکیب نتایج الف) و ب) نشان دهید که \mathbf{P} تابع خطی از \mathbf{S} است که به طور کلی شامل ۲۱ ثابت مستقل است.

دوران جسم صلب

۱-۱۱ حرکت جسم صلب در فضا

حرکت جسم صلب در فضا به وسیله معادلات (۴-۵) و (۵-۵) معین می شود:

$$\frac{dP}{dt} = F, \quad (1-11)$$

$$\frac{dL}{dt} = N, \quad (2-11)$$

که در آن

$$P = MV, \quad (3-11)$$

$$L = I \cdot \omega, \quad (4-11)$$

F و N به ترتیب نیروی کل وارد بر جسم و گشتاور نیروی کل حول نقطه مناسبی مانند O و بردار V سرعت مرکز جرم است و I و ω به ترتیب تانسور ماند و سرعت زاویه ای حول نقطه O اند. برای جسم بی قیدی که در فضا حرکت می کند، نقطه O را باید مرکز جرم جسم اختیار کرد. اگر جسم بر اثر نیروهای خارجی مقید باشد که حول نقطه ثابتی دوران کند، آن نقطه را باید نقطه O اختیار کرد. اگر نقطه O مقید باشد که به طریقی حرکت کند، خواننده می تواند معادله حرکت مناسب را بنویسد. (مسئله ۳ فصل ۷ را ببینید).

معادلات (۲-۱۱) و (۴-۱۱) برای دوران جسم صلب، مشابه معادلات (۱-۱۱) و (۳-۱۱) برای حرکت جرم نقطه ای M است. مع هذا چند اختلاف وجود دارد که این تشابه را به هم می زند. اولاً معادله (۴-۱۱) شامل تانسور I است در حالی که معادله (۳-۱۱) شامل اسکالر (شمارواره) M است، بنابراین P همیشه موازی V است، در حالی که L در حالت کلی موازی ω نیست. اختلاف جدی تر در این است که تانسور ماند I ، نسبت به محورهای ثابت در فضا ثابت نیست، بلکه با دوران جسم تغییر می کند، در حالی که M (در مکانیک نیوتنی) ثابت است. و سرانجام، و شاید جدی ترین اختلاف در این است که هیچ مجموعه مقارنی از سه مختصه مشابه با X ، Y ، و Z وجود ندارد که طرز قرارگیری جسم در فضا را بتوان با آن وصف کرد. این نکته در بخش ۵-۱ ذکر شد و توصیه می شود که خواننده آخرین بند آن بخش را مرور کند. به این دلایل نمی توانیم مسئله دوران جسم صلب را به وسیله روشهای مشابه روشهای فصل ۳ حل کنیم.

دو روش کلی برای حل مسئله وجود دارد. ابتدا در بخشهای ۲-۱۱ و ۳-۱۱ سعی می کنیم تا

اطلاعاتی را که ممکن است، از معادلات برداری (۲-۱۱) و (۴-۱۱) به دست آوریم بی آن که مجموعه‌ای از مختصات را برای توصیف طرز قرارگیری جسم، وارد کار کرده باشیم. سپس در بخشهای ۴-۱۱ و ۵-۱۱ از معادلات لاگرانژ برای تعیین حرکت بر حسب مجموعه‌ای از مختصات زاویه‌ای که به وسیلهٔ اویلر پیشنهاد شده است، استفاده می‌کنیم.

۲-۱۱ معادلات اویلر برای حرکت جسم صلب

اگر معادلهٔ (۲-۱۱) را به مجموعه‌ای از محورهای ثابت در جسم نسبت دهیم، مشکل تغییر I به هنگام دوران جسم رفع می‌شود. اگر فرض کنیم که « d/dt » علامت مشتق زمانی نسبت به محوری ثابت در جسم باشد، در این صورت طبق معادلهٔ (۲-۷)، معادلهٔ (۲-۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d'L}{dt} + \omega \times L = N. \quad (۵-۱۱)$$

چون I نسبت به محورهای جسم ثابت است، می‌توانیم مقدار L را از معادلهٔ (۴-۱۱) جایگزین کنیم و رابطهٔ زیر را به دست آوریم:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (I \cdot \omega) = N. \quad (۶-۱۱)$$

(یادآوری می‌کنیم که $d'\omega/dt = d\omega/dt$ است). شایسته‌تر از همه این است که محورهای اصلی $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ جسم را به عنوان محورهای جسم اختیار کنیم. در این صورت معادلهٔ (۶-۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 &= N_3. \end{aligned} \quad (۷-۱۱)$$

اینها معادلات اویلر برای حرکت جسم صلب‌اند. اگر نقطه‌ای از جسم ثابت نگه داشته شود، آن نقطه باید به عنوان مبدأ برای محورهای جسم اختیار شود و گشتاورهای ماند و گشتاورهای نیروها نسبت به آن نقطه در نظر گرفته شوند. اگر جسم مقید نباشد، مرکز جرم باید به عنوان مبدأ برای محورهای جسم اختیار شود.

برای به دست آوردن قضیهٔ انرژی از معادلات اویلر، معادلهٔ (۶-۱۱) را در ω ضرب می‌کنیم:

$$\omega \cdot I \cdot \frac{d\omega}{dt} = \omega \cdot N. \quad (۸-۱۱)$$

چون I متقارن است، طرف چپ عبارت است از

$$\omega \cdot I \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot I \cdot \omega = \frac{1}{2} \frac{d'}{dt} (\omega \cdot I \cdot \omega) = \frac{dT}{dt}, \quad (۹-۱۱)$$

که در آن T به وسیلهٔ معادلهٔ (۱۰-۱۰) داده می‌شود. در اینجا از این نکته استفاده کرده‌ایم که وقتی d/dt و d'/dt بر اسکالری (شمارواره‌ای) عمل می‌کنند، معنی یکسانی دارند. از مقایسهٔ معادلات (۸-۱۱) و (۹-۱۱)، قضیهٔ انرژی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{dT}{dt} = \omega \cdot N, \quad (۱۰-۱۱)$$

که با قضیهٔ (۳-۱۳۳) برای حرکت یک ذره مشابه است.

از معادلات (۷-۱۱) بی‌درنگ ملاحظه می‌کنیم که یک جسم نمی‌تواند بجز حول یک محور اصلی، با سرعت زاویه‌ای ثابت ω بچرخد مگر هنگامی که گشتاور - نیروهای خارجی اعمال شوند. اگر $d\omega/dt = 0$ معادله (۶-۱۱) چنین می‌شود:

$$\omega \times (I \cdot \omega) = N. \quad (11-11)$$

طرف چپ فقط هنگامی صفر است که $I \cdot \omega$ موازی ω باشد، یعنی اگر ω در امتداد یک محور اصلی جسم باشد. اگر قرار باشد که چرخشی آزادانه بی‌وارد کردن نیرو و گشتاور به تکیه‌گاههای خود بچرخد، نه تنها باید از نظر استاتیکی در حال تعادل باشد، یعنی مرکز جرم آن بر محور دوران منطبق باشد، بلکه همان‌طور که هر متخصص مکانیک اتومبیل می‌داند از نظر دینامیکی نیز باید متعادل باشد، یعنی محور دوران باید محور اصلی تانسور ماند باشد.

برای اینکه بتوانیم $\omega(t)$ را از معادلات (۷-۱۱) به دست آوریم، لازم است که مؤلفه‌های گشتاور - نیرو را در امتداد محور اصلی (دوران‌کننده) بدانیم و این حالتی بسیار نادر است مگر هنگامی که $N = 0$. اکنون جسم مقارنی را در نظر می‌گیریم که آزادانه دوران می‌کند و هیچ‌گونه گشتاور - نیرویی به آن اعمال نمی‌شود. فرض کنید که محور تقارن جسم \hat{e}_3 باشد. در نتیجه $I_1 = I_2$ در این صورت سومین معادله (۷-۱۱) عبارت خواهد بود از

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0, \quad (12-11)$$

و ω_3 ثابت است. دو معادله اول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\omega}_1 + \beta \omega_3 \omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 - \beta \omega_3 \omega_1 = 0, \quad (13-11)$$

که در آن

$$\beta = \frac{I_3 - I_1}{I_1}. \quad (14-11)$$

معادلات (۱۳-۱۱) یک جفت معادله مرتبه اول خطی جفت شده بر حسب ω_1 و ω_2 اند، با قرار دادن

$$\omega_1 = A_1 e^{pt}, \quad \omega_2 = A_2 e^{pt} \quad (15-11)$$

جواب آنها را پیدا می‌کنیم. به سادگی می‌توان نشان داد که فرمولهای (۱۵-۱۱) به شرطی در معادلات (۱۳-۱۱) صدق می‌کنند که روابط زیر برقرار باشند،

$$p = \pm i\beta\omega_3, \quad (16-11)$$

$$A_2 = \pm iA_1. \quad (17-11)$$

بنابراین یک جفت جواب مختلط مزدوج به دست آورده‌ایم،

$$\omega_1 = e^{\pm i\beta\omega_3 t}, \quad \omega_2 = \pm e^{\pm i\beta\omega_3 t}, \quad (18-11)$$

و این جوابها را می‌توان با ضرایب ثابت دلخواه ترکیب کرد تا جواب حقیقی به دست آید:

$$\omega_1 = A \cos(\beta\omega_3 t + \theta), \quad \omega_2 = A \sin(\beta\omega_3 t + \theta), \quad (19-11)$$

بنابراین بردار سرعت زاویه‌ای ω در دایره‌ای به شعاع A حول محور \hat{e}_3 با سرعت زاویه‌ای $\beta\omega_3$ در حرکتی تقدیمی است. اگر $I_3 > I_1$ ، حرکت تقدیمی در همان جهت ω_3 است، وگرنه در جهت عکس

خواهد بود. ω عبارت است از

$$\omega = [\omega_{\varphi}^2 + A^2]^{1/2}, \quad (20-11)$$

و مقداری ثابت است و این نتیجه‌ای است که می‌توان با محاسبه مستقیم $d(\omega^2)/dt$ از معادله (۷-۱۱) نیز به دست آورد. ثابتهای ω_{φ} ، A ، و θ به وسیله شرایط اولیه معین می‌شوند. سه ثابت دلخواه وجود دارد، زیرا معادلات اویلر، سه معادله دیفرانسیل مرتبه اول‌اند. چون حرکت دورانی یک جسم صلب بی‌قید دارای سه درجه آزادی دورانی است، باید انتظار داشته باشیم که روی هم شش ثابت دلخواه به وسیله شرایط اولیه معین شوند. سه ثابت دیگر کدام‌اند؟

وقتی جسم حول محور تقارن حرکت تقدیمی دارد، محور دوران لحظه‌ای، که به وسیله بردار ω معین می‌شود، در جسم، مخروطی (به نام مخروط جسم) به وجود می‌آورد. نیم‌زاویه α_B مخروط جسم به وسیله رابطه زیر داده می‌شود:

$$\tan \alpha_B = \frac{A}{\omega_{\varphi}}. \quad (21-11)$$

به طریق دیگر، اگر جسم از ابتدا با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری که با محور تقارن زاویه α_B می‌سازد، دوران کند، در این صورت ثابتهای ω_{φ} و A به وسیله روابط زیر داده می‌شوند:

$$A = \omega \sin \alpha_B, \quad \omega_{\varphi} = \omega \cos \alpha_B. \quad (22-11)$$

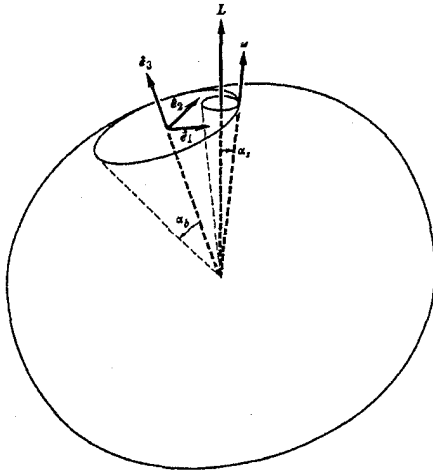
برای اینکه حرکت جسم را در فضا پیدا کنیم، لازم است محور ω را نسبت به جهت ثابت در فضا، معین کنیم. این کار را می‌توانیم به وسیله تعقیب پیوسته حرکت جسم نسبت به محورهای فضا و دوران دادن جسم با سرعت زاویه‌ای ثابت حول محوری در مخروط جسم که با سرعت زاویه‌ای $\beta\omega_{\varphi}$ در حرکت تقدیمی است، انجام دهیم. آسانتر است که ω را نسبت به L مشخص کنیم، زیرا طبق معادله (۲-۱۱) اگر $N = 0$ ، L ثابت است. زاویه α_s بین ω و L به وسیله رابطه بالا داده می‌شود:

$$\cos \alpha_s = \frac{\omega \cdot L}{\omega L} = \frac{\omega \cdot \mathbf{I} \cdot \omega}{\omega L} = \frac{\gamma T}{\omega L}. \quad (23-11)$$

چون بنا به معادله (۱۰-۱۱)، T ثابت است، زاویه α_s نیز ثابت است. بنابراین محور دوران، مخروطی در فضا رسم می‌کند که مخروط فضا نامیده می‌شود. مخروط دارای نیم‌زاویه α_s است که به وسیله معادله (۲۳-۱۱) داده می‌شود و محورش در جهت بردار اندازه حرکت زاویه‌ای L است. خط تماس بین مخروط فضا و مخروط جسم در هر لحظه، محور لحظه‌ای دوران است، چون این محور در جسم در هر لحظه در حال سکون است، مخروط جسم بی‌لغزش حول مخروط فضا می‌غلتد. این توصیف کاملی از حرکت است [شکل ۱-۱۱ را ببینید]. می‌توانیم α_s را بر حسب مؤلفه‌های ω و α_B بیان کنیم.

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\hat{e}_1 \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \hat{e}_2) I_1 + \hat{e}_3 \hat{e}_3 I_3 \\ &= I_1 \mathbf{I} + \hat{e}_3 \hat{e}_3 (I_3 - I_1). \end{aligned} \quad (24-11)$$

اگر مقادیر مربوط را از معادلات (۱۴-۱۱)، (۲۲-۱۱)، و (۲۴-۱۱) در معادلات (۴-۱۱)،



شکل ۱۱-۱ دوران آزاد یک جسم متقارن.

(۱۵۳-۱۰) و (۲۳-۱۱) جایگزین کنیم، و $\omega = \omega \hat{n}$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$2T = \omega^2 I_1 [1 + \beta \cos^2 \alpha_b], \quad (25-11)$$

$$L = \omega I_1 [\hat{n} + \beta \cos \alpha_b \hat{e}_3], \quad (26-11)$$

$$\cos \alpha_s = \frac{1 + \beta \cos^2 \alpha_b}{[1 + (\beta + \beta^2) \cos^2 \alpha_b]^{1/2}}. \quad (27-11)$$

توجه کنید که α_s فقط به α_b بستگی دارد نه به ω . به آسانی از معادله (۲۶-۱۱) مشاهده می شود که اگر $\beta > 0$ ، مخروط فضا در داخل مخروط جسم و اگر $\beta < 0$ ، در خارج آن قرار می گیرد [شکل ۱۱-۱ را ببینید]. این مطلب نیز واضح است زیرا اگر مخروط جسم بر روی مخروط فضا بغلتد، حرکت تقدیمی محور دوران باید دارای جهتی باشد که به وسیله معادله (۱۱-۱۹) داده می شود. [خواننده باید این مطلب را امتحان کند و به خاطر آورد که معادله (۱۱-۱۹) حرکت محور نسبت به جسم را توصیف می کند].

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که تانسور مانند یگانه باشد. محورهای اصلی را چنان شماره گذاری می کنیم که $I_3 > I_2 > I_1$. در بالا نشان دادیم که یک جسم ممکن است آزادانه حول یک محور اصلی دوران کند. اکنون حالتی را بررسی می کنیم که با حالت دوران دائم فوق کمی فرق داشته باشد. اگر ω در امتداد یک محور اصلی باشد، ممکن نیست ثابت باقی بماند. فرض می کنیم که ω خیلی نزدیک به یک محور اصلی (مثلاً محور \hat{e}_3) است، به طوری که $\omega_3 \gg \omega_2$ و $\omega_3 \gg \omega_1$. در این صورت اگر $N = 0$ باشد، از معادله سوم معادلات (۱۱-۷) مشاهده می کنیم که ω_3 تا مرتبه اول بر حسب ω_1 و ω_2 ثابت است. در این صورت دو معادله اول به صورت یک جفت معادله خطی جفت شده از ω_1 و ω_2 درمی آیند، که آن را مانند مثال قبلی حل می کنیم تا روابط زیر را به دست آوریم:

$$\omega_1 = A [I_2 (I_3 - I_2)]^{1/2} \cos(\beta \omega_3 t + \theta), \quad (28-11)$$

$$\omega_2 = A [I_1 (I_3 - I_1)]^{1/2} \sin(\beta \omega_3 t + \theta),$$

که در آن A و θ ثابت‌هایی دلخواه‌اند و همچنین

$$\beta = \left[\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \right]^{1/2} \quad (29-11)$$

بنابراین بردار ω بر بیضی کوچکی حول محور \hat{e}_3 در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت (وقتی از جهت مثبت محور \hat{e}_3 به پایین نگاه می‌کنیم)، حرکت می‌کند. به طریقی مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که اگر ω تقریباً به موازات محور \hat{e}_1 باشد، بر بیضی کوچکی حول آن محور در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند و اگر تقریباً به موازات محور \hat{e}_2 باشد، جواب به صورت نمایی خواهد بود. البته در حالت دوم مؤلفه‌های ω_1 و ω_2 کوچک باقی نخواهند ماند و ثبات تقریبی ω_2 فقط طی قسمت اولیه حرکت صادق است. نتیجه می‌گیریم که دوران حول محورهای بیشترین کمترین گشتاورهای ماند پایدار است در حالی که دوران حول محور حد واسط ناپایدار است. این نتیجه را می‌توان با انداختن راکت تنیس به هوا و سعی در چرخاندن آن حول هر محور اصلی‌اش نشان داد. وقتی $N=0$ ، جواب عمومی معادلات (۷-۱۱) برای ω را می‌توان از نظر اصولی به دست آورد. این مسئله را در بخش بعدی با روش دیگری حل خواهیم کرد.

۳-۱۱ راه حل پوان سو برای جسمی که آزادانه دوران می‌کند

اگر هیچ‌گونه گشتاور - نیرویی وجود نداشته باشد، یعنی $N=0$ ، معادلات (۲-۱۱) و (۱۰-۱۱) به چهار انتگرال معادلات حرکت منجر می‌شوند:

$$L = I \cdot \omega = \text{ثابت}, \quad (30-11)$$

$$T = \frac{1}{\rho} \omega \cdot I \cdot \omega = \text{ثابت}. \quad (31-11)$$

پوان سو^۱ نمایشی هندسی از حرکت براساس این ثابتها و استفاده از بیضوی ماند به دست آورده است. فرض می‌کنیم که بیضوی ماند (۱۵۷-۱۰) سخت به جسم بسته شده و با آن دوران کند. اگر فرض کنیم r برداری از مبدأ تا نقطه تقاطع محور دوران با بیضوی ماند در هر لحظه باشد،

$$r = \frac{r}{\omega} \omega, \quad (32-11)$$

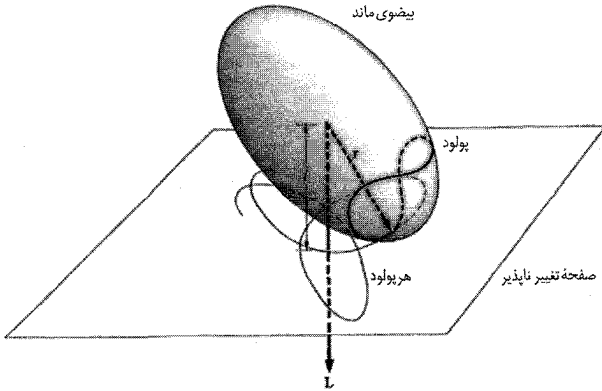
در این صورت مقایسه معادلات (۳۱-۱۱) و (۱۵۷-۱۰) نشان می‌دهد که

$$T = \frac{a^2 \omega^2}{2r^2}. \quad (33-11)$$

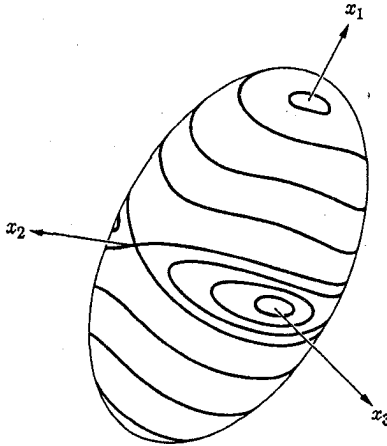
قائم بر بیضوی در نقطه r موازی بردار زیر است:

$$\nabla(r \cdot I \cdot r) = 2I_1 x_1 \hat{e}_1 + 2I_2 x_2 \hat{e}_2 + 2I_3 x_3 \hat{e}_3 = 2 \frac{r}{\omega} L, \quad (34-11)$$

که در آن x_1, x_2, x_3 مؤلفه‌های r در امتداد محورهای اصلی‌اند، بنابراین صفحه مماس بر بیضوی در نقطه r ، بر بردار ثابت L عمود است [شکل ۲-۱۱ را ببینید]. فرض کنید که l فاصله قائم از مبدأ



شکل ۱۱-۲ غلتیدن یک بیضوی ماند بر روی یک صفحه تغییر ناپذیر.



شکل ۱۱-۳ پولودها روی یک بیضوی ماند یگانه.

تا این صفحه مماس باشد:

$$l = \frac{r \cdot L}{L} = \frac{r}{\omega} \frac{\omega \cdot I \cdot \omega}{L} = \frac{a(\gamma T)^{1/2}}{L} = \text{ثابت}. \quad (۳۵-۱۱)$$

بنابراین صفحه مماس در فضا (نسبت به مبدأ O) ثابت است و صفحه تغییر ناپذیر نامیده می شود. مکان آن به وسیله شرایط اولیه تعیین می شود. به علاوه چون نقطه تماس بین بیضوی و صفحه روی محور دوران لحظه ای قرار دارد، بیضوی روی صفحه بی لغزش می غلتد. سرعت زاویه ای در هر لحظه دارای اندازه زیر است:

$$\omega = \frac{(\gamma T)^{1/2}}{a} r. \quad (۳۶-۱۱)$$

این توصیف کاملی از حرکت است.

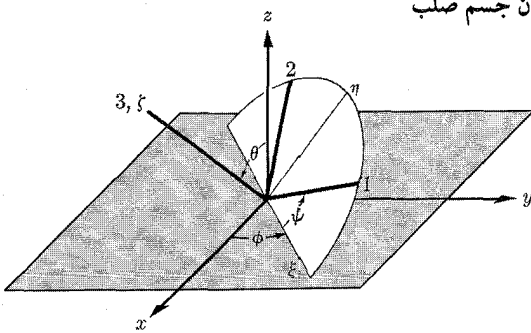
هنگامی که بیضوی مانند روی صفحه تغییرناپذیر می‌گلتد، به طوری که مرکز آن در مبدأ ثابت است، نقطه تماس یک منحنی به نام پولود^۱ روی بیضوی ماند و یک منحنی به نام هرپولود^۲ روی صفحه تغییرناپذیر رسم می‌کند. این کیفیت در شکل ۱۱-۲ نشان داده شده است. پولود منحنی بسته‌ای روی بیضوی ماند است که به عنوان مکان هندسی نقاط P تعریف می‌شود، که صفحات مماس بر آنها در فاصله ثابت l از مرکز بیضوی قرار دارند. در شکل ۱۱-۳ پولودهای مختلفی روی بیضوی ماند یگانه نشان داده شده است. توجه کنید که ویژگیهای نمودار از نظر توپولوژی با نتایجی که در انتهای بخش قبلی گرفته شده است، توافق دارند. در حالت کلی هرپولود بسته نیست، بلکه حلقه‌ای مدور را در صفحه تغییرناپذیر پر می‌کند.

در مورد جسمی متقارن می‌توان نشان داد، (مسئله ۷) که پولودها دوایری حول محور تقارن و هرپولودها دوایری در صفحه تغییرناپذیرند. در آن حالت P و l طبق معادله (۱۱-۳۶)، ω (اما نه $|\omega|$) در طول حرکت ثابت‌اند. توصیف پوانسون از حرکت در این حالت با توصیف بخش قبلی توافق دارد. پولودها و هرپولودها به ترتیب مقاطع مخروطهای جسم و فضا با بیضوی ماند و صفحه تغییرناپذیرند.

۴-۱۱ زوایای اوپلر

نتایج بخشهای ۱۱-۲ و ۱۱-۳ در مورد حرکت جسم صلب بی‌استفاده از مختصاتی برای توصیف طرف قرارگیری جسم به دست آمدند. برای اینکه بتوانیم بحث را ادامه دهیم، لازم است که مجموعه‌ای از مختصات مناسب به کار وارد کنیم. مجموعه‌ای از محورهای ثابت در جسم اختیار می‌کنیم که برای راحتی آنها را محورهای اصلی فرض می‌کنیم که مبدأ آنها در مرکز جرم یا در نقطه ثابت (اگر وجود داشته باشد) قرار دارد. این محورها را مانند قبل با اندیسهای ۱، ۲، ۳ و مشخص می‌کنیم. اگر محور تقارنی وجود داشته باشد، با عدد ۳ شماره گذاری می‌شود و گرنه محورها ممکن است به هر ترتیب دلخواهی شماره گذاری شوند. سه مختصه برای مشخص کردن طرز قرارگیری محورهای جسم نسبت به مجموعه ثابتی از محورهای فضایی x, y, z لازم است. رابطه بین دو مجموعه از محورها به وسیله ضرایب تبدیل از مختصات x, y, z به مختصات x_1, x_2, x_3 مشخص می‌شوند. نه ضریب وجود دارد ولی همان‌طور که مشاهده کرده‌ایم، فقط سه تا از آنها مستقل‌اند و سعی در به کار بردن سه ضریب به عنوان مختصات مناسب نیست. همان‌طور که در بخش ۵-۱ اشاره شد، هیچ مجموعه متقارنی از مختصات مشابه با x, y, z وجود ندارد که با آن طرز قرارگیری جسم را توصیف کنیم. یکی از مفیدترین دستگاههای مختصات مختلفی که برای این منظور معرفی شده‌اند، منسوب به اوپلر است.

در شکل ۱۱-۴، زوایای اوپلر θ, ϕ, ψ نشان داده شده‌اند. از این زوایا برای تصریح مکان محورهای ۱، ۲، ۳ جسم نسبت به محورهای فضایی x, y, z استفاده می‌شود. محورهای ۱، ۲، ۳ جسم به وسیله خطوط ضخیم و محورهای فضایی x, y, z به وسیله خطوط نازکتر نشان داده شده‌اند. زاویه θ ، زاویه بین محور ۳ و محور z است. چون بدین ترتیب محور ۳ برای منظوری



شکل ۱۱-۴ زوایای اوپلر.

خاص از محورهای دیگر متمایز می‌شود، اگر جسم دارای محور تقارنی باشد، باید به‌عنوان محور z اختیار شود. به همین ترتیب اگر گشتاور - نیروهای خارجی دارای محور تقارنی در فضا باشند، آن محور باید به‌عنوان محور z اختیار شود. مقطع صفحه ۱-۲ با صفحه xy خط‌گره‌ها نامیده می‌شود و در نمودار با ξ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، زاویه ϕ عبارت است از زاویه بین محور x تا خط‌گره‌ها در صفحه xy ، زاویه ψ در صفحه ۱-۲ زاویه‌ای است که بین خط‌گره‌ها و محور ۱ قرار دارد. فرض می‌کنیم که هر دو مجموعه از محورهای (x, y, z) و (ξ, η, ζ) راست‌گردند. و نیز مناسب است که مجموعه محورهای (راست‌گرد) دیگری، ξ, η, ζ و ξ معرفی کنیم که ξ خط‌گره‌ها و ζ منطبق بر محور ۳ جسم و η در صفحه ۱-۲ قرار داشته باشد.^۱ برای بیان بردار سرعت زاویه‌ای ω بر حسب زوایای اوپلر، ابتدا ثابت می‌کنیم که می‌توان سرعت‌های زاویه‌ای را مانند بردارها به مفهوم قضیه زیر جمع کرد:

قضیه. اگر دستگاه مختصات زبرداری با سرعت زاویه‌ای ω_1 نسبت به دستگاه مختصات بی‌زبری، و دستگاه مختصات ستاره‌داری با سرعت زاویه‌ای ω_2 نسبت به دستگاه زبردار حرکت کند، سرعت زاویه‌ای دستگاه ستاره‌دار نسبت به دستگاه بی‌زبر $\omega_1 + \omega_2$ است. (۱۱-۳۷)

برای اثبات این قضیه فرض کنید A بردار دلخواه ساکنی در دستگاه ستاره‌دار باشد:

$$\frac{d^*A}{dt} = 0. \quad (11-38)$$

در این صورت بنا به قضیه (۷-۲۲)، سرعت آن نسبت به دستگاه زبردار عبارت است از

$$\frac{d'A}{dt} = \omega_2 \times A. \quad (11-39)$$

اکنون اگر دو بار قضیه (۷-۲۲) را به کار ببریم، سرعت A را نسبت به دستگاه بی‌زبر به دست می‌آوریم:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d'A}{dt} + \omega_1 \times A = (\omega_1 + \omega_2) \times A. \quad (11-40)$$

۱. به خواننده تذکر داده می‌شود که علائم به کار رفته برای زوایای اوپلر و نیز قرارداد مربوط به اندازه‌گیری این زوایا از محورها و حتی استفاده از محورهای مختصات راست‌گرد، در کتب فیزیک یکسان نیست. بنابراین لازم است به دقت توجه داشته باشید که هر نویسنده زوایا را چگونه تعریف می‌کند. قراردادهایی که در اینجا اتخاذ شده است بسیار متداول‌اند اما همگانی نیستند.

مقایسه‌ای نهایی با قضیه (۷-۲۲) نشان می‌دهد که $(\omega_1 + \omega_2)$ سرعت زوایای دستگاه ستاره‌دار نسبت به دستگاه بی‌زیر است.

اکنون شکل ۴-۱۱ را در نظر بگیرید و فرض کنید که جسم چنان حرکت می‌کند که θ ، ϕ ، و ψ با زمان تغییر می‌کند. اگر θ به تنهایی تغییر کند و ϕ و ψ ثابت باشند، جسم حول خط‌گره‌ها با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta} \hat{\xi}$ دوران خواهد کرد. اگر ϕ به تنهایی تغییر کند، جسم حول محور z با سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi} \hat{z}$ دوران خواهد کرد. اگر ψ به تنهایی تغییر کند، جسم حول محور ۳ خود با سرعت زاویه‌ای $\dot{\psi} \hat{e}_\psi$ دوران خواهد کرد. اکنون اگر دستگاه مختصات زبرداری را در نظر بگیریم که با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta} \hat{\xi}$ حول محور z دوران کند، و فرض کنیم که دستگاه ξ ، η ، و ζ با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta} \hat{\xi}$ نسبت به این دستگاه زبرداد دوران کند، در این صورت طبق قضیه (۱۱-۳۷)، سرعت زاویه‌ای دستگاه ξ ، η ، و ζ عبارت است از $\dot{\theta} \hat{\xi} + \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\psi} \hat{e}_\psi$. محوره‌های ۱، ۲، و ۳ با سرعت زاویه‌ای $\dot{\psi} \hat{e}_\psi$ نسبت به ξ ، η ، و ζ دوران می‌کند و بنابراین سرعت زاویه‌ای جسم عبارت است از:

$$\omega = \dot{\theta} \hat{\xi} + \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\psi} \hat{e}_\psi. \quad (41-11)$$

از شکل ۴-۱۱، روابط زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= \hat{e}_1 \cos \psi - \hat{e}_\psi \sin \psi, \\ \hat{\eta} &= \hat{e}_1 \sin \psi + \hat{e}_\psi \cos \psi, \\ \hat{\zeta} &= \hat{e}_\psi, \end{aligned} \quad (42-11)$$

و

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \hat{\xi} \cos \theta + \hat{\eta} \sin \theta \\ &= \hat{e}_1 \sin \theta \sin \psi + \hat{e}_\psi \sin \theta \cos \psi + \hat{e}_\psi \cos \theta. \end{aligned} \quad (43-11)$$

بنابراین می‌توان ω را بر حسب مؤلفه‌هایش در امتداد محور اصلی بیان کرد:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_\psi &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_\psi &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (44-11)$$

اکنون انرژی جنبشی به وسیله معادله (۱۰-۱۵۳) داده می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_\psi \omega_\psi^2 + \frac{1}{2} I_\psi \omega_\psi^2. \quad (45-11)$$

انرژی جنبشی عبارت نسبتاً پیچیده‌ای از $\dot{\theta}$ ، $\dot{\phi}$ ، $\dot{\psi}$ ، θ ، ψ ، و ϕ است. توجه کنید که θ ، ϕ ، و ψ مختصات متعامد نیستند، یعنی حاصل ضربهای $\dot{\theta} \dot{\phi}$ و $\dot{\psi} \dot{\phi}$ در T ظاهر می‌شوند. در مورد یک جسم متقارن ($I_1 = I_\psi$)، عبارت بیان‌کننده T به شکل زیر ساده می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_\psi \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_\psi (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2. \quad (46-11)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که نیروهای تعمیم یافته Q_θ ، Q_ϕ ، و Q_ψ به ترتیب گشتاور-نیروها حول محوره‌های ξ ، z و ۳ اند.

اکنون در وضعی هستیم که می‌توانیم معادلات لاگرانژ را برای دوران جسم صلبی بنویسیم که تحت تأثیر گشتاور - نیروهای داده شده‌ای قرار می‌گیرد. اگر گشتاور - نیروها از یک انرژی پتانسیل $V(\theta, \phi, \psi)$ قابل محاسبه باشند، در این صورت یک انتگرال انرژی وجود خواهد داشت. اگر V مستقل از ϕ باشد، در این صورت بررسی معادلات (۱۱-۴۴) نشان می‌دهد که ϕ مختصه‌ای قابل اغماض خواهد بود. افسوس این نکته برای به‌دست آوردن یک جواب عمومی برای مسئله کافی نیست. مع‌هذا برای یک جسم متقارن، اگر V مستقل از ψ نیز باشد، از معادله (۱۱-۴۶) نتیجه می‌شود که ϕ و ψ هر دو قابل اغماض‌اند. در این صورت سه ثابت حرکت داریم، که برای حل مسئله کافی است. این حالت را در بخش بعدی حل خواهیم کرد. چند حالت خاص دیگر وجود دارد که در آنها مسئله قابل حل است،^۱ لکن برای مسئله عمومی حرکت یک جسم نامتقارن تحت تأثیر گشتاور - نیروهای خارجی، مانند مسئله چند جسم، جز روش انتگرال‌گیری عددی معادلات حرکت، هیچ روش حل کلی وجود ندارد.

۱۱-۵ فرفره متقارن

فرفره متقارن که در شکل ۱۱-۵ نشان داده شده است، جسمی است که برای آن $I_1 = I_2$. این جسم حول نقطه ثابت O که روی محور تقارن و به فاصله l از مرکز جرم G ، (که خود نیز بر روی محور تقارن است) قرار دارد می‌چرخد. تنها نیروهای خارجی عبارت‌اند از نیروهای قیدی وارد بر O و نیروی ثقل. بنابراین طبق معادله (۱۱-۴۶)، تابع لاگرانژ عبارت است از

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta. \quad (۱۱-۴۷)$$

مختصات ψ و ϕ قابل اغماض‌اند و بنابراین سه انتگرال حرکت داریم:

$$\frac{dp_\psi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad (۱۱-۴۸)$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad (۱۱-۴۹)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (۱۱-۵۰)$$

که در آن

$$p_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta), \quad (۱۱-۵۱)$$

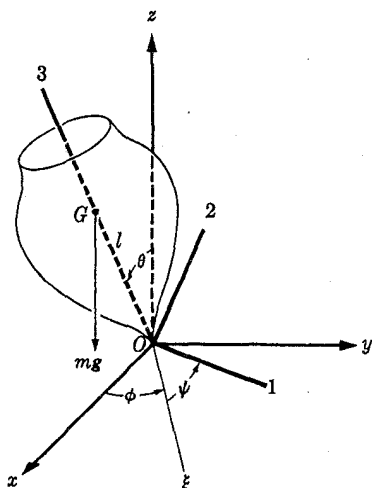
$$p_\phi = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta), \quad (۱۱-۵۲)$$

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta. \quad (۱۱-۵۳)$$

از معادلات (۱۱-۵۱) و (۱۱-۵۲) برای حذف $\dot{\psi}$ و $\dot{\phi}$ از معادله (۱۱-۵۳)، استفاده می‌کنیم:

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2 I_3} + mgl \cos \theta. \quad (۱۱-۵۴)$$

^۱ مثلاً به کتاب زیر مراجعه کنید:



شکل ۵-۱۱ مختصات یک فرقه متقارن.

اکنون می توانیم مسئله را به وسیله روش انرژی حل کنیم. اگر روابط زیر را در نظر گیریم

$$E' = E - \frac{P_\psi^2}{2I_\psi}, \quad (55-11)$$

$$'V' = \frac{(P_\phi - P_\psi \cos \theta)^2}{2I_\phi \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta, \quad (56-11)$$

در این صورت

$$\dot{\theta} = \left\{ \frac{2}{I_\phi} [E' - 'V'(\theta)] \right\}^{1/2}, \quad (57-11)$$

و θ از نظر اصول به وسیله محاسبه انتگرال

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{[E' - 'V'(\theta)]^{1/2}} = \left(\frac{I_\phi}{2} \right)^{1/2} t \quad (58-11)$$

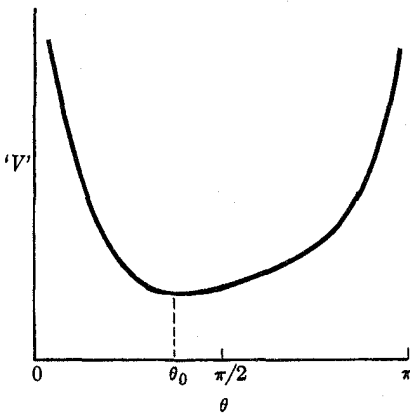
و به دست آوردن $\theta(t)$ از آن حاصل می شود. ثابت θ_i مقدار اولیه θ است. وقتی $\theta(t)$ در دست باشد می توانیم ψ و $\dot{\phi}$ را از معادلات (۵۱-۱۱) و (۵۲-۱۱) به دست آوریم و از آنها انتگرال گیری کنیم تا $\psi(t)$ و $\phi(t)$ به دست آیند.

مقایسه معادلات (۴۴-۱۱) و (۵۱-۱۱) نشان می دهد که

$$P_\psi = I_\psi \omega_\psi, \quad (59-11)$$

بنابراین ω_ψ یک ثابت حرکت است. اگر $\omega_\psi = 0$ ، معادله (۵۶-۱۱) به فرمول (۹-۱۳۷) برای آونگ کروی تبدیل می شود چنانکه باید می شد. در شکل ۶-۱۱، $'V'(\theta)$ برای $\omega_\psi \neq 0$ رسم شده است. گشتاور - نیروی وابسته به انرژی پتانسیل، $'V'(\theta)$ عبارت است از

$$'N' = - \frac{\partial 'V'}{\partial \theta} = mgl \sin \theta - \frac{(P_\phi - P_\psi \cos \theta)(P_\psi - P_\phi \cos \theta)}{I_\phi \sin^3 \theta}. \quad (60-11)$$



شکل ۱۱-۶ انرژی پتانسیل مؤثر برای فرفره متقارن.

بررسی معادله (۱۱-۶) نشان می‌دهد که در حالت کلی (اگر $p_\phi \neq p_\psi$)، گشتاور - نیروی 'N' برای $\theta \neq \pi$ مثبت و برای $\theta = \pi$ منفی است و به‌ازای مقداری بین 0 و π یک بار صفر می‌شود. بنابراین همان‌طور که در شکل ۱۱-۶ نشان داده شده است، 'V' دارای یک می‌نیم در نقطه‌ای مانند θ_0 است که معادله زیر را برقرار می‌کند

$$mglI_1 \sin^2 \theta_0 - (p_\phi - p_\psi \cos \theta_0)(p_\psi - p_\phi \cos \theta_0) = 0. \quad (۱۱-۶۱)$$

اگر $E' = 'V'(\theta_0)$ محور فرفره به‌طور یکنواخت تحت زاویه θ_0 نسبت به قائم با سرعت زاویه‌ای

$$\dot{\phi}_0 = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta_0}{I_1 \sin^2 \theta_0}. \quad (۱۱-۶۲)$$

حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. اگر $(p_\phi - p_\psi \cos \theta_0)$ را از معادله (۱۱-۶۱) به‌دست آوریم، با استفاده از معادله (۱۱-۵۹) نتیجه می‌گیریم که

$$(p_\phi - p_\psi \cos \theta_0) = \frac{1}{\gamma} I_\psi \omega_\psi \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \left[1 \pm \left(1 - \frac{\sqrt{mglI_1}}{I_\psi^2 \omega_\psi^2} \cos \theta_0 \right)^{1/2} \right]. \quad (۱۱-۶۳)$$

مشاهده می‌شود که اگر $\theta_0 < \pi/2$ ، یک حداقل سرعت زاویه‌ای چرخش وجود دارد که پایین‌تر از آن فرفره نمی‌تواند به‌طور یکنواخت تحت زاویه θ_0 حرکت تقدیمی انجام دهد:

$$\omega_{\min} = \left(\frac{\sqrt{mglI_1}}{I_\psi^2} \cos \theta_0 \right)^{1/2}. \quad (۱۱-۶۴)$$

اگر $\omega_\psi > \omega_{\min}$ ، دو ریشه (۱۱-۶۳) وجود دارد و بنابراین $\dot{\phi}_0$ دارای دو مقدار ممکن است: یک حرکت تقدیمی کند و یک حرکت تقدیمی تند، که هر دو با سرعت زاویه‌ای چرخشی ω_ψ هم‌جهت‌اند. اگر $\omega_\psi \gg \omega_{\min}$ ، حرکت تقدیمی تند و کند در سرعتهای زاویه‌ای

$$\dot{\phi}_0 \approx \frac{I_\psi}{I_1} \frac{\omega_\psi}{\cos \theta_0}, \quad (۱۱-۶۵)$$

و

$$\dot{\phi}_0 \approx \frac{mgl}{I_\psi \omega_\psi}. \quad (۱۱-۶۶)$$

رخ می دهند. معمولاً حرکت تقدیمی آهسته است که در چرخش سریع فرفره مشاهده می شود. برای $\theta_0 > \pi/2$ (یعنی فرفره طوری آویزان شده باشد که محورش پایین افق باشد)، یک مقدار مثبت و یک مقدار منفی برای $\dot{\phi}$ وجود دارد. (وقتی $\omega_p \rightarrow 0$ ، این حرکات تقدیمی یکنواخت به چه حرکتی تبدیل می شوند؟).

بررسی شکل ۶-۱۱ نشان می دهد که حرکت عمومی تر فرفره، ضمن حرکت تقدیمی، شامل یک حرکت ترقصی یا نوسان محور فرفره در جهت θ است. محور بین زوایای θ_1 و θ_2 نوسان دارد که در رابطه زیر صدق می کند.

$$E' = \frac{(P_\phi - P_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta, \quad (۶۷-۱۱)$$

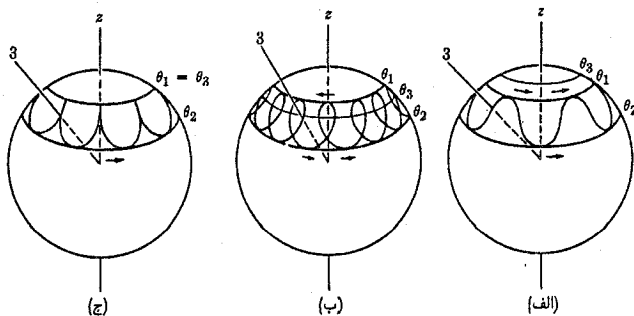
که در آن P_ψ ، P_ϕ و E' به وسیله شرایط اولیه تعیین می شوند. اگر معادله (۶۷-۱۱) را در $\sin^2 \theta$ ضرب کنیم، به یک معادله درجه سوم از $\cos \theta$ تبدیل می شود. از شکل ۶-۱۱ نتیجه می شود که این معادله باید دارای دو ریشه حقیقی $\cos \theta_1$ و $\cos \theta_2$ بین -1 و $+1$ باشد. ریشه سوم $\cos \theta$ باید در خارج حد فیزیکی -1 تا $+1$ قرار گیرد. در واقع بررسی معادله (۶۷-۱۱) نشان خواهد داد که ریشه سوم بزرگتر از $+1$ است. (در مورد حرکت تقدیمی یکنواختی که در بند قبلی مورد بحث قرار گرفت، دو ریشه فیزیکی بر هم منطبق اند، یعنی $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \cos \theta$) اگر از ابتدا $\theta = 0$ ، در این صورت مقدار اولیه $\cos \theta$ یعنی $\cos \theta_1$ در معادله (۶۷-۱۱) صدق می کند. اگر یکی از ریشه های معادله درجه سوم را بدانیم، می توانیم از معادله فاکتورگیری کنیم و هر سه ریشه را پیدا کنیم. در طی حرکت ترقصی، سرعت تقدیمی طبق معادله (۵۲-۱۱) تغییر می کند:

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi - P_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (۶۸-۱۱)$$

اگر $|P_\psi| < |P_\phi|$ ، می توانیم زاویه θ_p را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\cos \theta_p = \frac{P_\phi}{P_\psi}. \quad (۶۹-۱۱)$$

اگر $\theta_p > \theta$ ، سرعت زاویه ای $\dot{\phi}$ و ω_p هم علامت، و اگر $\theta_p < \theta$ ، مختلف العلامت اند. مشتق طرف راست معادله (۶۷-۱۱) نسبت به θ به ازای $\theta = \theta_p$ منفی است و بنابراین از شکل ۶-۱۱ مشاهده می کنیم که $\theta_p < \theta$ در حالی که θ_p بزرگترین زاویه ای است که معادله (۶۷-۱۱) را برقرار می کند. در واقع $\theta_p < \theta$ اگر $\theta_p < \theta_1$ (یا اگر $|P_\phi| > |P_\psi|$ ، P_ψ و P_ϕ هم علامت باشند)، در این صورت در سرتاسر حرکت ترقصی $\dot{\phi}$ با ω_p هم علامت خواهد بود و محور فرفره یک منحنی مانند منحنی نشان داده شده در شکل ۷-۱۱ (الف) رسم خواهد کرد. اگر $\theta_p > \theta_1$ ، سرعت زاویه ای $\dot{\phi}$ در حین حرکت ترقصی تغییر علامت می دهد و محور فرفره مانند شکل ۷-۱۱ (ب) حرکت می کند. واضح است که اگر از ابتدا فرفره را در بالای صفحه افق با سرعت زاویه ای $\dot{\phi}$ که با ω_p مختلف العلامه است به حرکت درآوریم، حرکت به ضرورت مانند آنچه در شکل ۷-۱۱ (ب) نشان داده شده است، خواهد بود. یک حالت خاص مهم هنگامی رخ می دهد که فرفره وقتی با سرعت زاویه ای ω_p حول محورش می چرخد، چنان نگه داشته شود که محور آن در ابتدا تحت زاویه θ_1 ساکن باشد و سپس رها شود.



شکل ۱۱-۷ مکان هندسی محور ۳ فرقه بر روی یک کره واحد.

در ابتدا داریم،

$$\theta = \theta_1, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = 0, \quad \dot{\psi} = \omega_\psi. \quad (۷۰-۱۱)$$

مقادیر فوق را در معادلات (۵۱-۱۱)، (۵۲-۱۱)، و (۵۳-۱۱) جایگزین می‌کنیم تا روابط زیر را به دست آوریم:

$$p_\psi = I_\psi \omega_\psi, \quad p_\theta = I_\theta \omega_\theta \cos \theta_1, \quad E' = mgl \cos \theta_1. \quad (۷۱-۱۱)$$

در این حالت مشاهده می‌کنیم که $\theta_\psi = \theta_1$ است و حرکت مانند آن است که در شکل ۱۱-۷ (پ) نشان داده شده است. بحث مقدماتی این حالت بر اساس بقای اندازه حرکت زاویه‌ای در بخش ۴-۲ داده شد. اکنون معادله (۵۶-۱۱) چنین می‌شود:

$$V = \frac{I_\psi^2 \omega_\psi^2}{2I_1} \left[\frac{(\cos \theta_1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \alpha \cos \theta \right], \quad (۷۲-۱۱)$$

که در آن

$$\alpha = \frac{2I_1 mgl}{I_\psi^2 \omega_\psi^2}, \quad (۷۳-۱۱)$$

نقاط برگشت برای حرکت ترقصی، ریشه‌های معادله (۶۷-۱۱) اند، که در این حالت اگر آن را در $\sin^2 \theta$ ضرب کنیم، به صورت زیر در می‌آید:

$$(\cos \theta_1 - \cos \theta)^2 - \alpha (\cos \theta_1 - \cos \theta) (1 - \cos^2 \theta) = 0. \quad (۷۴-۱۱)$$

ریشه‌ها عبارت‌اند از

$$\cos \theta = \cos \theta_1, \quad (۷۵-۱۱)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\alpha} [1 \pm (1 - 4\alpha \cos \theta_1 + 4\alpha^2)^{1/2}].$$

زاویه θ_1 به وسیله فرمول دوم با استفاده از علامت منفی در داخل کرشه داده می‌شود. علامت مثبت ریشه‌ای برای $\cos \theta$ می‌دهد که بزرگتر از ۱+ است. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که فرقه به تندی می‌چرخد، یعنی $\alpha \ll 1$. در این صورت داریم

$$\cos \theta_\mp \doteq \cos \theta_1 - \alpha \sin^2 \theta_1. \quad (۷۶-۱۱)$$

زاویه θ_\mp فقط کمی بزرگتر از θ_1 است و دامنه حرکت ترقصی متناسب با α است. اگر روابط زیر را

$$\theta_\mp = \theta_0 \pm a, \quad \theta_1 = \theta_0 - a, \quad (۷۷-۱۱)$$

در معادله (۷۶-۱۱) جایگزین کنیم، مشاهده خواهیم کرد تا جملات مرتبه اول بر حسب a و α ، داریم:

$$a \doteq \frac{1}{\gamma} \alpha \sin \theta_1. \quad (۷۸-۱۱)$$

اکنون اگر به ازای θ عبارت زیر را

$$\theta = \theta_0 + \delta \doteq \theta_1 + a + \delta, \quad (۷۹-۱۱)$$

در معادله (۷۲-۱۱) جایگزین کنیم، 'V' تا جملات مرتبه دوم بر حسب a و δ چنین می شود،

$$'V' \doteq V(\theta_0) + \frac{1}{\gamma} \frac{I_\psi}{I_1} \omega_\psi^2 \delta^2. \quad (۸۰-۱۱)$$

جمله اول ثابت است و جمله دوم به نوسانات هارمونیک δ با فرکانس

$$\omega_\theta = \frac{I_\psi}{I_1} \omega_\psi. \quad (۸۱-۱۱)$$

منجر می شود. حرکت ترقصی به وسیله رابطه زیر داده می شود

$$\theta \doteq \theta_1 + a - a \cos \omega_\theta t. \quad (۸۲-۱۱)$$

این مقدار را در معادله (۶۸-۱۱) جایگزین می کنیم تا $\dot{\phi}$ را تا مرتبه اول a به دست آوریم:

$$\dot{\phi} \doteq \frac{I_\psi \omega_\psi a}{I_1 \sin \theta_1} [1 - \cos \omega_\theta t]. \quad (۸۳-۱۱)$$

سرعت زاویه ای متوسط حرکت تقدیمی عبارت است از

$$\langle \dot{\phi} \rangle_{av} \doteq \frac{I_\psi \omega_\psi a}{I_1 \sin \theta_1} = \frac{mgl}{I_\psi \omega_\psi}. \quad (۸۴-۱۱)$$

بنابراین محور فرفره حرکت تقدیمی کند و حرکت ترقصی تندی با دامنه بسیار کوچک دارد. در عمل گشتاور-نیروهای اصطکاکی که ما از آنها صرف نظر کرده ایم، حرکت ترقصی را به سرعت می میرانند و فقط حرکت تقدیمی یکنواخت را بجا می گذارند.

به عنوان مثال نهایی، حالتی را در نظر می گیریم که فرفره از ابتدا طوری می چرخد که محور تقارن آن قائم است. در این صورت تا هنگامی که محورهای ۳ و z بر هم منطبق اند، خط گره ها نامعین است. از شکل ۴-۱۱ مشاهده می کنیم که زاویه $\phi + \psi$ به عنوان زاویه بین محور ۱ و x تعیین می شود، اگر چه ψ و ϕ به طور جداگانه نامعین اند. بنابراین از ابتدا داریم،

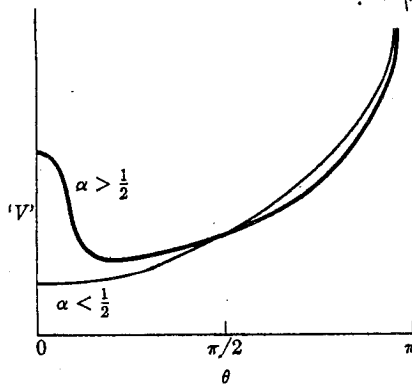
$$p_\psi = I_\psi (\dot{\psi} + \dot{\phi}) = I_\psi \omega_\psi, \quad (۸۵-۱۱)$$

$$p_\phi = I_\psi (\dot{\psi} + \dot{\phi}) = p_\psi. \quad (۸۶-۱۱)$$

در این حالت معادله (۵۶-۱۱) چنین می شود

$$'V' = \frac{I_\psi^2 \omega_\psi^2}{2I_1} \left[\frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \alpha \cos \theta \right], \quad (۸۷-۱۱)$$

که در آن α به وسیله معادله (۷۳-۱۱) داده می شود. البته این فقط یک حالت خاص معادله (۷۲-۱۱) است. در شکل ۸-۱۱، تابع 'V' برای حالت $p_\phi = p_\psi$ رسم شده است. شکل



شکل ۱۱-۸ انرژی پتانسیل مؤثر وقتی $P\phi = P\psi$.

منحنی به مقدار α بستگی دارد. مشاهده می‌کنیم فرفره‌ای که به تندی می‌چرخد ($\alpha < 1/2$) می‌تواند به‌طور پایدار حول محور قائم بچرخد و اگر اختلالی در حرکت آن پیدا شود، حرکت ترقصی کوچکی حول محور قائم نشان خواهد داد. فرفره‌ای که به آهستگی می‌چرخد ($\alpha > 1/2$) نمی‌تواند حول یک محور قائم به‌طور پایدار بچرخد، ولی حرکت ترقصی بزرگی بین $\theta_1 = 0$ و θ_2 که به‌وسیله معادله (۱۱-۷۵) داده می‌شوند، خواهد کرد. در این حالت،

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{\alpha} - 1. \quad (11-88)$$

می‌بینیم که حداقل سرعت زاویه‌ای چرخش که پایین‌تر از آن فرفره نمی‌تواند به‌طور پایدار حول محور قائم بچرخد، هنگامی است که $\alpha = 1/2$ یا طبق معادله (۱۱-۷۳)،

$$\omega_{\min} = \left[\frac{4mgII_1}{I_1^2} \right]^{1/2}. \quad (11-89)$$

توجه کنید که این فرمول با معادله (۱۱-۶۴) توافق دارد. اگر از ابتدا $\omega_0 > \omega_{\min}$ ، فرفره طوری می‌چرخد که محورش قائم است، ولی هنگامی که ω_0 به‌علت اصطکاک به کمتر از ω_{\min} کاهش می‌یابد، شروع به نوسان می‌کند.

تمام نتایج فوق در مورد رفتار فرفره متقارن تحت شرایط اولیه متفاوت را می‌توان به‌طور تجربی با یک فرفره با یک ژيروسکوپ توجیه کرد.

مسائل

۱. با استفاده از نتیجه مسئله ۳ فصل ۱۰، معادله (۱۱-۶) را مستقیماً از معادله زیر به‌دست آورید:

$$\frac{d}{dt} (I \cdot \omega) = N$$

۲. (الف) فرض کنید که زمین، بیضوی دوار صلب یکنواختی باشد. اقطار استوایی و قطبی آن را از جدول پیدا کنید و سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی قطب شمال را روی سطح زمین با فرض آنکه محور قطبی (یعنی محور دوران) کمی از محور تقارن انحراف دارد، پیدا کنید. (حرکت تقدیمی نامنظمی تقریباً از این نوع با دامنه‌ای در حدود چند پا و زمان تناوبی در حدود ۴۲۷ روز، مشاهده می‌شود.)

(ب) فرض کنید که زمین کره صلبی است و کوهی به جرم 10^{-1} مرتبه جرم زمین در نقطه‌ای به زاویه 45° از محور قطبی به آن اضافه می‌شود، حرکت قطب را در نتیجه این عمل توصیف کنید. چقدر طول می‌کشد تا قطب به اندازه 1000 میل حرکت کند؟ (پ) برای زمین صلبی بیضوی، مانند قسمت (الف) کوهی با چه جرم باید به استوا اضافه شود تا حرکت تقدیمی قطبی ناپایدار گردد؟

البته چگالی زمین یکنواخت نیست، بلکه در نزدیکی مرکزش متراکم‌تر است. از این مهمتر اینکه زمین صلب نیست، بلکه برای مدت‌های کوتاه مانند شبه کره‌ای الاستیک (کشوار) رفتار می‌کند و در عرض مدت زمانی مدید به‌طور پلاستیک (ناکشوار) تغییر شکل می‌یابد. لذا نتایج این مسئله فقط جنبه فرض دارند و به حرکت واقعی زمین مربوط نمی‌شوند. به‌عنوان مثال زمان تناوب تقدیمی مشاهده شده 427 روز طولانی‌تر از زمان تناوبی است که برای زمین صلب محاسبه می‌شود. وقتی تغییر شکل پلاستیکی (ناکشوار) در نظر گرفته شود، حتی برای زمینی به شکل بیضوی، با «کوهی» کوچکتر از آنچه در قسمت (پ) محاسبه شد، محل قطب به مقدار قابل ملاحظه‌ای تغییر خواهد کرد.^۱

۳. نشان دهید که محور دوران جسم صلب متقارنی که آزادانه می‌چرخد، با سرعت زاویه‌ای زیر در فضا حرکت تقدیمی انجام می‌دهد.

$$\omega_n = (\gamma\beta + \beta^2 + \sec^2 \alpha_B)^{1/2} \omega_p,$$

که علائم آن همان علائمی است که در بخش ۱۱-۲ به کار رفته است.

۴. نشان دهید که اگر تنها گشتاور - نیروی وارد بر یک جسم صلب متقارن، حول محور تقارن باشد، $(\omega_1^2 + \omega_2^2)$ ، که در آن ω_1 و ω_2 مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در امتداد محورهای عمود بر محور تقارن‌اند، ثابت است. اگر $N_p(t)$ داده شده باشد، نشان دهید که چگونه می‌توان ω_1 ، ω_2 ، و ω_3 را از آن به دست آورد.

۵. جسم صلب متقارنی که آزادانه در فضا حرکت می‌کند، به‌وسیله موتورهایی جتی که نسبت به محور سه جسم به‌طور متقارن قرار داده شده‌اند و گشتاور - نیروی ثابت N_p را حول محور تقارن ایجاد می‌کنند، انرژی می‌گیرد. جواب کلی بردار سرعت زاویه‌ای را به‌صورت تابعی از زمان نسبت به محورهایی جسم پیدا کنید و بیان کنید که چگونه بردار سرعت زاویه‌ای نسبت به جسم حرکت می‌کند.

۶. (الف) کره بارداری را در نظر بگیرید که جرم m و بار الکتریکی e آن هر دو با تقارن کروی توزیع شده‌اند و نشان دهید که اگر این جسم در میدان مغناطیسی یکنواخت B بچرخد، گشتاور - نیروی وارد بر آن عبارت است از

$$N = \frac{eg}{\gamma mc} L \times B \quad (\text{آحاد گاوسی})$$

که در آن g عدد ثابتی است که اگر چگالی جرم در همه جا متناسب با چگالی بار باشد برابر واحد است. (ب) معادله حرکتی برای جسم بنویسید و نشان دهید که به‌وسیله وارد کردن دستگاه مختصات دوران‌کننده مناسبی می‌توان گشتاور مغناطیسی را حذف کرد. (پ) این نتیجه را با قضیه

۱. بحث کوتاه جالبی از دوران زمین را که به‌صورت بیضوی الاستیک (کشوار) و پلاستیک (ناکشوار) در نظر گرفته شده است در صفحه ۹ مقاله زیر ببینید:

لارمور (فصل ۷) مقایسه کنید. چرا در اینجا به هیچ‌گونه فرض در مورد شدت میدان مغناطیسی احتیاج نیست؟ (ت) حرکت را توصیف کنید. چه نقاطی از جسم در دستگاه مختصات دوران‌کننده، ساکن‌اند؟ ۷. ثابت کنید [بی استفاده از نتایج بخش ۱۱-۲] که اگر دو گشتاور ماند اصلی مساوی باشند، پولود و هر پولود هر دو دایره‌اند.

۸. (الف) معادلاتی بر حسب محورهای اصلی x_1, x_2, x_3 برای دو سطح درجه دومی که فصل مشترکشان یک پولود است، به دست آورید. معادلات شما باید شامل پارامترهای I_1, I_2, I_3 و l باشد. (ب) معادله‌ای برای تصویر پولود روی هر صفحه مختصات دلخواه پیدا کنید و نشان دهید که پولودها منحنیهای بسته‌ای حول قطبهای بزرگ و کوچک بیضوی‌اند ولی در نزدیکی محور حدواسط، همان‌طور که در شکل ۱۱-۳ نشان داده شده است، از نوع هذلولی‌اند. (پ) مطلوب است شعاعهای دایره واقع بر صفحه تغییرناپذیر که هر پولود را محصور می‌کنند.

۹. ماتریس (a_{ij}) که مؤلفه‌های برداری را از محورهای فضا به محورهای جسم تبدیل می‌کند، پیدا کنید. a_{ij} را بر حسب زوایای اوپلر بیان کنید. [راهنمایی. تبدیل را می‌توان مرکب از سه دوران متوالی با زوایای θ, ϕ, ψ حول محورهای مناسب، و به ترتیب مناسب، در نظر گرفت].

۱۰. تابع هامیلتون را برای یک جسم صلب نامتقارن که آزادانه دوران می‌کند، بر حسب $\theta, \psi, \phi, p_\theta, p_\psi, p_\phi$ بنویسید. ضرایب را بر حسب پارامترهای I_1, I_2, I_3 و $(I_2 - I_1)$ بیان کنید.

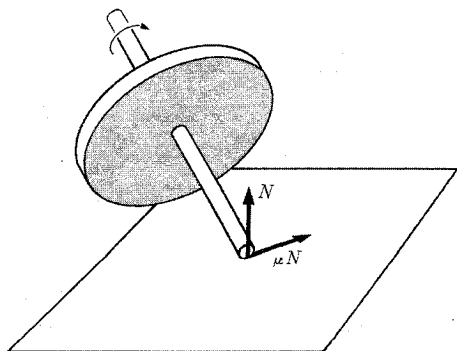
۱۱. از معادلات لاگرانژ استفاده کنید و دوران آزاد یک جسم صلب نامتقارن را در نزدیکی یکی از محورهای اصلی‌اش به دست آورید و نشان دهید که نتایج شما با بند آخر بخش ۱۱-۲ توافق دارند.

۱۲. معادلات لاگرانژ را برای فرقه متقارنی به دست آورید که انتهای محور آن بر روی میز صاف بی‌اصطکاک می‌لغزد. با دقت درباره اختلافهای بین حرکات در این حالت و حالتی که انتهای محور فرقه حول نقطه ثابتی می‌چرخد، بحث کنید.

۱۳. ژيروسکوپ از قرصی به شعاع a و جرم M درست شده است و به شکل صلبی در مرکز محوری به طول $(2/3)a$ و جرم $(2/3)M$ و سطح مقطع ناچیز، ثابت شده است و در داخل دو حلقه متعامد که شعاع و جرم هر یک به ترتیب $(2/3)a$ و $(2/3)M$ است، قرار گرفته است. محور در نقاط تقاطع حلقه‌های بی‌اصطکاک می‌چرخد. یکی از این نقاط تقاطع بر نقطه ثابت O بی‌اصطکاک لولا شده است و می‌تواند حول آن حرکت کند. تابع لاگرانژ را بنویسید و درباره انواع حرکت ممکن (تحت تأثیر نیروی ثقل) بحث کنید.

۱۴. با استفاده از روش لاگرانژ در باره دوران آزاد جسم صلب متقارنی بحث کنید. سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی یکنواخت و فرکانس ترقصهای کوچک حول این حرکت تقدیمی یکنواخت را پیدا کنید. حرکت را توصیف کنید و نشان دهید که نتایج شما با جوابهایی که در بخش ۱۱-۲ و در مسئله ۳ به دست آمدند، توافق دارند.

۱۵. فرقه‌ای از قرصی به جرم M و شعاع r تشکیل شده است که در مرکز محور استوانه شکلی به طول l و شعاع a ، $(a \ll l)$ و جرم ناچیز سوار شده است. انتهای محور بر روی میزی قرار گرفته است [به شکل ۱۱-۹ توجه کنید]. ضریب اصطکاک μ است. فرقه حول محور تقارنش با سرعت زاویه‌ای بسیار بزرگ ω_0 به چرخش در آمده، و در حالی که محورش با قائم زاویه θ_0 ساخته، رها



شکل ۱۱-۹ یک فرفره ساده.

شده است. فرض کنید که ω_p در مقایسه با تمام حرکات دیگر فرفره آنقدر بزرگ است که لبه محور که با میز در تماس است، روی میز در جهتی عمود بر محور فرفره، با جهتی که به وسیله ω_p تعیین می شود، می لغزد. معادله حرکت فرفره را بنویسید. فرض کنید که ترقص آنقدر کوچک است که می توان از آن صرف نظر کرد و اصطکاک خیلی بزرگ نیست به طوری که فرفره به کندی تحت زاویه θ که بر اثر اصطکاک با میز به کندی تغییر می کند، حرکت تقدیمی دارد. نشان دهید که در ابتدا محور فرفره به حالتی قائم بلند می شود و زمان لازم و تعداد دورهای کامل تقدیم را در این مدت زمان به طور تقریب پیدا کنید. حرکت کامل فرفره نسبت به میز را در طی این فرایند توصیف کنید. فرفره به چه مدت قبل از شروع به لنگیدن به طور قائم باقی می ماند؟

۱۶. ژيروسکوپي بچگانه به دست آورید و اندازه گیریهای لازم را برای پیش بینی میزان تقدیمش هنگامی که با حداکثر سرعتش می چرخد و محورش با امتداد قائم زاویه 45° دارد، به عمل آورید. اگر محور فرفره در زاویه 45° نگه داشته و سپس رها شود، دامنه ترقص را محاسبه کنید. آزمایش را انجام دهید و میزان تقدیم اندازه گیری شده را با میزان پیش بینی شده مقایسه کنید.

۱۷. سیاره ای از کره یکنواختی به شعاع a و جرم M تشکیل، و در استوا به وسیله حلقه ای به جرم m احاطه شده است. سیاره (در صفحه ای) حول ستاره ای به جرم M' حرکت می کند. با استفاده از مختصات قطبی r و α در صفحه مدار و زوایای اوپلر θ ، ϕ ، و ψ نسبت به محورهای فضایی که محور z آنها بر صفحه مدار عمود و محور x آنها موازی محوری باشد که α از آن اندازه گیری می شود، تابع لاگرانژ را بنویسید. می توانید فرض کنید که $r \gg a$ و از نتیجه مسئله ۱۵ فصل ۶ استفاده کنید. مختصات قابل اغماض را پیدا کنید و نشان دهید که زمان تناوب دوران سیاره ثابت است.

۱۸. فرض کنید که سیاره مسئله ۱۷ در دایره ای به شعاع r حول ستاره گردش می کند، اگرچه این فرض با معادلات حرکت کاملاً سازگار نیست. فرض کنید که زمان تناوب دوران در مقایسه با زمان تناوب هر نوع حرکت تقدیمی حول محور دوران، کوتاه باشد تا بتوان در بررسی دوران روی زاویه α معدل گرفت. نشان دهید که اگر محور تحت زاویه θ از قائم به سوی صفحه مدار کج شود، ممکن است محور قطبی دارای حرکت تقدیمی (کند) یکنواختی بشود. و سرعت زاویه ای حرکت تقدیمی را بر حسب اجرام M ، m ، و M' و شعاعهای a و r و زاویه θ و سرعت زاویه ای دوران به دست آورید. نشان دهید که اگر روز به مراتب از سال کوتاهتر باشد، فرض فوق در مورد زمان تناوب دوران و میزان حرکت تقدیمی، معتبر است. فرکانس ترقصهای کوچک حول این حرکت تقدیمی یکنواخت را پیدا کنید و نشان دهید که وقتی روز به مراتب کوتاهتر از سال باشد، همان حرکت

تقدیمی آزادی است که سرعت زاویه‌ای آن در مسئله ۳ به دست آمد.

۱۹. اجرام M و m لازم را برای آنکه سیاره مسئله ۱۷ دارای همان گشتاورهای ماند اصلی باشد که یک بیضوی یکنواخت با همان جرم و به همان شکل زمین دارد، پیدا کنید. با منظور کردن تقریبهای مسئله ۱۸ نشان دهید که اگر خورشید و ماه در صفحه مداری زمین قرار گیرند، (تقریباً چنین است)، اثر خورشید و ماه هر دو بر دوران زمین را می‌توان به سادگی با اضافه کردن سرعتهای زاویه‌ای حرکت تقدیمی که به وسیله هر یک از آنها به طور جداگانه ایجاد می‌شود، به حساب آورد. خط استوا با صفحه مداری زاویه $23/5^\circ$ می‌سازد. زمان تناوب حرکت تقدیمی کل حاصل را پیدا کنید. (مقدار اندازه‌گیری شده ۲۶۰۰۰ سال است).

* ۲۰. معادلات لاگرانژ را برای حرکت جسم صلب مسئله ۵ بنویسید. معادلات را تا جایی که می‌توانید حل کنید. (اگر مایل باشید می‌توانید از نتایج مسئله ۵ استفاده کنید). نشان دهید که می‌توانید معادله دیفرانسیل مرتبه دو می‌پیدا کنید که فقط شامل θ باشد. آیا می‌توانید جوابهایی خاص یا جوابهایی تقریبی برای این معادله در حالت‌های خاص پیدا کنید؟ حرکات مربوط را توصیف کنید. (توجه کنید که به عکس مسئله ۵ که سرعت زاویه‌ای را نسبت به جسم پیدا کردیم این مسئله تا جایی که قابل حل باشد، حرکت جسم در فضا را معین می‌کند).

۲۱. برای پاره‌ای از مقاصد فیزیکی، الکترون را می‌توان به صورت کره باردار چرخانی، مانند آنچه که در مسئله ۶ بررسی شد، با g تقریباً مساوی ۲ در نظر گرفت. نشان دهید که اگر g به دقت ۲ باشد و اندازه حرکت زاویه‌ای اسپین الکترون ابتدا موازی سرعت خطی آن باشد، با حرکت الکترون از هر میدان مغناطیسی، اندازه حرکت زاویه‌ای اسپین آن همواره موازی سرعتش باقی خواهد ماند.

۲۲. یک ماهواره زمینی از یک پوسته کروی به جرم ۲۰ کیلوگرم و قطر ۱ متر تشکیل شده است. این ماهواره از نظر امتداد حرکت به وسیله ژيروسکوپ پایدار شده است که شامل قرصی به جرم ۴ کیلوگرم و قطر ۲۰ سانتی‌متر است و بر روی محور بی‌جرمی سوار شده است که با پاقانهای بی‌اصطکاک آن در دو انتهای متقابل قطری از پوسته ثابت شده است. پوسته از ابتدا دوران نمی‌کند در حالی که ژيروسکوپ با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. دانه غبار یک میلی‌گرمی که در امتداد عمود بر محور ژيروسکوپ با سرعت زاویه‌ای $10^4 \times 3$ متر بر ثانیه حرکت می‌کند، یکی از دو انتهای محور خود را داخل پوسته جای می‌دهد. فرکانس دورانی ژيروسکوپ چه باید باشد تا محور ژيروسکوپ از آن به بعد در فاصله $0/1$ درجه‌ای مکان اولیه خود باقی بماند؟ دقتی تا دو رقم اعشار برای نتیجه کافی است.

۲۳. قطب‌نمای ژيروسکوپ جسم صلب متقارنی است که طوری سوار شده است که محور آن مقید است تا در صفحه افقی در سطح زمین حرکت کند. یک جفت زاویه مختصه‌ای مناسب اختیار کنید و اگر قطب‌نمای ژيروسکوپ در نقطه ثابتی در سطح زمین که متمم عرض جغرافیایی آن θ است قرار گرفته باشد، توابع لاگرانژ را بنویسید. از اصطکاک صرف نظر کنید. نشان دهید که مؤلفه سرعت زاویه‌ای ω_p در امتداد محور تقارن ثابت باقی می‌ماند و اگر $\omega_p \sin \theta > (I_p/I_p) \omega$ ، که در آن ω سرعت زاویه‌ای زمین است، محور تقارن در صفحه افقی حول محور شمال-جنوب، نوسان می‌کند. فرکانس نوسانهای کوچک را پیدا کنید. در یک قطب‌نمای ژيروسکوپ واقعی، چرخنده باید برای جبران گشتاور-نیروهای اصطکاک حول محور تقارن رانده شود، در حالی که گشتاورهای اصطکاک در صفحه افق نوسانهای محور تقارن را کاهش می‌دهند و باعث ساکن کردن آن در خط شمال-جنوب می‌شوند.

نظریه ارتعاشات کوچک

مسئله مهمی که اغلب پیش می آید این است که تعیین کنیم آیا حرکت داده شده دستگاہی دینامیکی پایدار است یا نیست و اگر پایدار است، خصوصیت ارتعاشات کوچک حول حرکت داده شده را تعیین کنیم. ساده ترین مسئله از این نوع، مسئله پایداری یک نقطه تعادل است که اول آن را مورد بحث قرار می دهیم. در این حالت می توانیم از امکانات جبر تانسوری فصل ۱۰ استفاده کنیم و روش حل مناسبی برای نوسانهای کوچک ارائه دهیم. مسئله کلی تری هنگامی مطرح می شود که جواب خاصی از معادلات حرکت داده می شود. در این صورت می توانیم سؤال کنیم که آیا آن جواب پایدار است یا نیست، بدین معنی که آیا هر جوابی که از شرایط اولیه ای نزدیک به شرایط اولیه جواب داده شده شروع شده باشد، در نزدیکی آن جواب باقی می ماند یا نه. این مسئله را در بخش ۱۲-۶ مورد بحث قرار خواهیم داد. روشهای حل برای حالت خاص حرکت دائم داده خواهد شد.

۱۲-۱ شرط پایداری در نزدیکی آرایش در حالت تعادل

دستگاهی مکانیکی را در نظر می گیریم که به وسیله مختصات تعمیم یافته x_1, \dots, x_f توصیف شده، و تحت تأثیر نیروهایی قرار می گیرد که از انرژی پتانسیل $V(x_1, \dots, x_f)$ مستقل از زمان، به دست می آیند. اگر دستگاہ تحت تأثیر قیودی باشد، فرض خواهیم کرد که مختصات چنان اختیار شده اند که x_1, \dots, x_f از قید آزادند. دستگاہ مختصات باید نسبت به زمان ثابت باشد. بنابراین انرژی جنبشی به شکل زیر است.

$$T = \sum_{k,l=1}^f \frac{1}{2} M_{lk} \dot{x}_l \dot{x}_k. \quad (1-12)$$

در این صورت معادلات لاگرانژ به صورت زیر درمی آیند:

$$\sum_{i=1}^f \frac{d}{dt} (M_{ik} \dot{x}_i) - \sum_{l,m=1}^f \frac{1}{2} \frac{\partial M_{lm}}{\partial x_k} \dot{x}_l \dot{x}_m + \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \quad k=1, \dots, f. \quad (2-12)$$

این معادلات، اگر وقتی تمام جملات وابسته به سرعت مساوی صفر قرار داده شوند قابل حل باشند، دارای جوابی خواهند بود که به آرایش در حالت تعادلی مربوط می شود که مختصات برای آن همگی ثابت باقی می مانند. لذا دستگاہ ممکن است در هر آرایشی که نیروهای تعمیم یافته از بین می روند، در حال تعادل باشد:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \quad k=1, \dots, f. \quad (3-12)$$

اگر دستگاه دارای نقاط تعادل باشد، باید آنها را از این f معادله به دست آورد.

در این حالت سؤال پایداری به سادگی جواب داده می شود. اگر $V(x_1, \dots, x_f)$ برای یک آرایش در حالت تعادل x_1^*, \dots, x_f^* نسبت به تمام آرایشهای نزدیک $x_1 + \delta x_1, \dots, x_f + \delta x_f$ دارای حداقلی باشد، این آرایش، آرایشی پایدار است. انرژی کل

$$E = T + V \quad (۴-۱۲)$$

ثابت است. فرض کنید

$$E = V(x_1^*, \dots, x_f^*) + \delta E \quad (۵-۱۲)$$

انرژی مربوط به هر شرایط اولیه $x_1 + \delta x_1, \dots, x_f + \delta x_f, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_f$ در نزدیکی تعادل باشد. در این صورت اگر $\delta x_1^*, \dots, \delta x_f^*, \dot{x}_1^*, \dots, \dot{x}_f^*$ به اندازه کافی کوچک باشند، می توانیم δE را به اندازه دلخواه کوچک کنیم. چون T هرگز منفی نیست، حرکت به وسیله معادله (۴-۱۲) به ناحیه ای از فضای آرایش محدود می شود، که برای آن

$$V(x_1, \dots, x_f) \leq V(x_1^*, \dots, x_f^*) + \delta E. \quad (۶-۱۲)$$

چون V در نقطه (x_1^*, \dots, x_f^*) دارای حداقلی است، بنابراین اگر δE به اندازه کافی کوچک باشد، حرکت به ناحیه کوچکی نزدیک x_1^*, \dots, x_f^* محدود خواهد شد. به علاوه چون

$$T \leq \delta E, \quad (۷-۱۲)$$

سرعتهای $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_f$ به مقادیر کوچک محدود می شوند. بنابراین تعادل به این معنی پایدار است که حرکات در سرعتهای کوچک در نزدیکی آرایش حالت تعادل، نزدیک به آرایش در حالت تعادل باقی می مانند.

به عکس اگر V در نزدیکی x_1^*, \dots, x_f^* حداقل نباشد، در این صورت ظاهراً قابل قبول است که تعادل ناپایدار باشد، زیرا تابع پتانسیل V در جهتی دور از x_1^*, \dots, x_f^* کاهش خواهد یافت. اگر بتوانیم مختصات را چنان اختیار کنیم که مثلاً x_1 مربوط به آن جهت، و بر سایر مختصات عمود باشد، در این صورت معادله (۲-۱۲) برای x_1 عبارت است از:

$$\frac{d}{dt}(M_{11}\dot{x}_1) - \sum_{l,m=1}^f \frac{1}{2} \frac{\partial M_{lm}}{\partial x_1} \dot{x}_l \dot{x}_m = -\frac{\partial V}{\partial x_1}. \quad (۸-۱۲)$$

برای سرعتهای به اندازه کافی کوچک، به طوری که جملات درجه دوم سرعتها قابل اغماض باشند، معادله فوق به صورت زیر درمی آید

$$M_{11}\ddot{x}_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}. \quad (۹-۱۲)$$

ولی به تدریج که در جهت x_1 از تعادل دور می شویم، $\partial V / \partial x_1$ منفی می شود و x_1 دارای شتاب مثبتی خواهد بود که به طرف خارج از نقطه تعادل است. در بخش ۱۲-۳ با ارائه اثبات دقیق تری نشان خواهیم داد که اگر V در نقطه ای حداقل نباشد، تعادل در آن نقطه ناپایدار است.

آزمونی برای نقطه حداقل و وجود دارد که بعضی اوقات مفید است. اگر x_1^*, \dots, x_f^* آرایش در حالت تعادلی باشد که معادله (۳-۱۲) برای آن برقرار باشد، x_1^*, \dots, x_f^* حداقلی از $V(x_1, \dots, x_f)$

نسبت به مواضع نزدیک خواهد بود به شرط آنکه تمام دترمینانها در رشته زیر، مثبت باشند:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} > 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_f} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_f \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_f^2} \end{vmatrix} > 0, \quad (10-12)$$

که در آن مشتقها در x_1^0, \dots, x_f^0 محاسبه می شوند.

۲-۱۲ معادلات خطی شده حرکت در نزدیکی آرایش حالت تعادل

اکنون مایلیم حرکت دستگاهی را در مجاورت آرایش حالت تعادل بررسی کنیم. مختصات چنان انتخاب خواهند شد که آرایش حالت تعادل در مبدأ $x_1 = \dots = x_f = 0$ قرار گیرد. انرژی پتانسیل V باید به صورت سری تیلور بر حسب x_1, \dots, x_f بسط داده شود. عبارت ثابت $V(0, \dots, 0)$ را می توان حذف کرد زیرا در معادلات حرکت وارد نمی شود. با توجه به معادلات (۱۲-۳)، عبارات خطی ظاهر نمی شوند. اگر بررسی ما به مقادیر کوچک x_1, \dots, x_f محدود باشد، می توانیم از عبارات مرتبه سوم و بالاتر x_1, \dots, x_f صرف نظر کنیم، به طوری که

$$V = \sum_{k,l=1}^f \frac{1}{2} K_{kl} x_k x_l, \quad (11-12)$$

که در آن

$$K_{kl} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l} \right)_{x_1 = \dots = x_f = 0} \quad (12-12)$$

چون دستگاه مختصات ساکن است، انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \sum_{k,l=1}^f \frac{1}{2} M_{kl} \dot{x}_k \dot{x}_l. \quad (13-12)$$

در حالت کلی، ممکن است ضرایب M_{kl} توابعی از مختصات باشند، ولی چون سرعتها تا مرتبه دوم $x_1, \dots, x_f; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_f$ باید کوچک باشند، می توانیم M_{kl} را مقادیر ضرایب در $x_1 = \dots = x_f = 0$ اختیار کنیم.

معادلات (۱۱-۱۲) و (۱۳-۱۲) را می توان به وسیله وارد کردن یک بردار آرایش بعدی x با مؤلفه های x_1, \dots, x_f در فضای آرایش f به صورت بهتر زیر نوشت:

$$x = (x_1, \dots, x_f). \quad (14-12)$$

ضرایب K_{kl} و M_{kl} مؤلفه‌های تانسورهای زیر می‌شوند

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{f1} & \dots & K_{ff} \end{pmatrix}, \quad (15-12)$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{f1} & \dots & M_{ff} \end{pmatrix},$$

این تانسورها مقارنند یا می‌توان آنها را مقارن انگاشت، زیرا طبق معادله (۱۲-۱۲)،

$$K_{kl} = K_{lk}, \quad (16-12)$$

و در معادله (۱۲-۱۳)، فقط مجموع $1/2(M_{kl} + M_{lk})$ به عنوان ضریب $\dot{x}_l \dot{x}_k = \dot{x}_k \dot{x}_l$ تعریف شده است. بنابراین لازم است که

$$M_{kl} = M_{lk}. \quad (17-12)$$

اکنون انرژیهای جنبشی و پتانسیل را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$T = \frac{1}{2} \dot{x} \cdot M \cdot \dot{x}, \quad (18-12)$$

$$V = \frac{1}{2} x \cdot K \cdot x. \quad (19-12)$$

معادلات لاگرانژ (۹-۷۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$M \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0. \quad (20-12)$$

این معادله با معادله (۲-۸۴) برای نوسانگر هارمونیک ساده شباهتی صوری دارد. اگر معادله (۱۲-۲۰) را بر حسب مؤلفه‌ها بنویسیم، تعمیم مستقیمی از معادلات (۴-۱۳۵) و (۴-۱۳۶) برای دو نوسانگر هارمونیک جفت شده به دست می‌آوریم.

می‌توانیم معادله (۱۲-۲۰) را به وسیله روشی که برای حل معادلات (۴-۱۳۵) و (۴-۱۳۶) به کار رفت، حل کنیم. فرض می‌کنیم

$$x = C e^{pt}, \quad (21-12)$$

که در آن $C = (C_1, \dots, C_f)$ بردار ثابتی است که مؤلفه‌هایش C_1, \dots, C_f ممکن است مختلط باشند. رابطه فوق را در معادله (۱۲-۲۰) جایگزین و سپس بر e^{pt} تقسیم می‌کنیم:

$$p^2 M \cdot C + K \cdot C = 0. \quad (22-12)$$

اگر رابطه فوق را بر حسب مؤلفه‌ها بنویسیم، داریم:

$$\sum_{l=1}^f (p^2 M_{kl} + K_{kl}) C_l = 0, \quad k = 1, \dots, f. \quad (23-12)$$

اگر C_1, \dots, C_f همگی صفر نباشند، دترمینان ضرایب باید صفر شود:

$$\begin{vmatrix} p^2 M_{11} + K_{11} & \dots & p^2 M_{1f} + K_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^2 M_{f1} + K_{f1} & \dots & p^2 M_{ff} + K_{ff} \end{vmatrix} = 0. \quad (24-12)$$

این یک معادله مرتبه f ام از p^2 است که f ریشه‌های p_j^2 چنانکه در بخش آینده نشان می‌دهیم همواره حقیقی‌اند. اگر جوابی از p^2 مثبت باشد، دست‌کم ریشه‌هایی مثبت و جوابهایی از معادله (۱۲-۲۱) نسبت به زمان نمایی بزرگ می‌شوند. اگر حالت تعادل در می‌نیمم انرژی پتانسیل باشد، نشان دادیم که جوابها جملگی پایدارند. در چنین حالتی، جوابهای f ، $p_j^2 = -\omega_j^2$ ، فرکانسهای طبیعی نوسان‌ها را نشان می‌دهند. لذا می‌توانیم هر یک از p_j^2 ها را در معادلات (۱۲-۲۳) جایگزین کنیم و مؤلفه‌های C_j بردار \mathbf{z} را (مگر برای یک فاکتور دلخواه) به دست آوریم. در این صورت می‌توانیم جواب را به صورت ترکیبی از ارتعاشات طبیعی به دست آوریم، درست همان‌طور که در بخش ۴-۱۰ برای دو نوسانگر جفت شده انجام دادیم. در بخش بعدی، روش حل دیگری برای تعیین همان جوابها در نظر خواهیم گرفت که به روشهای جبر تانسوری فصل ۱۰ مربوط می‌شود.

۳-۱۲ وجوه طبیعی ارتعاش

اگر مختصات x_1, \dots, x_f, \dots متعامد باشند، تانسور \mathbf{M} قطری خواهد بود:

$$M_{kl} = M_k \delta_{kl}. \quad (12-25)$$

اگر مختصات متعامد نباشند، می‌توانیم به کمک روش بخش ۴-۱۰، که به f بعدی تعمیم یافته، تانسور \mathbf{M} را قطری کنیم. (در زیر انرژی پتانسیل را با استفاده از همان روش قطری می‌کنیم). فرض کنید که این عمل انجام شده است و مختصات x_1, \dots, x_f, \dots مؤلفه‌های \mathbf{x} در امتداد محورهای اصلی \mathbf{M} اند به طوری که معادله (۱۲-۲۵) برقرار است. (اگر x_1, \dots, x_f, \dots مختصات دکارتی مجموعه‌ای از ذرات باشند، M_k جرم ذره‌ای است که مختصه‌اش x_k است.)

اکنون بردار جدید \mathbf{y} را با مختصات y_1, \dots, y_f, \dots که توسط معادله زیر معین می‌شود

$$y_k = M_k^{1/2} x_k, \quad k = 1, \dots, f. \quad (12-26)$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اکنون آرایش دستگاه به وسیله بردار \mathbf{y} در فضای برداری جدیدی تصریح می‌شود که به وسیله یک کشیدگی یا فشردگی در امتداد هر محور، طبق معادله (۱۲-۲۶)، به فضای \mathbf{x} مربوط می‌شود. انرژی جنبشی بر حسب \mathbf{y} عبارت است از:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^f \frac{1}{2} \dot{y}_k^2. \quad (12-27)$$

واضح است که اگر دستگاه مختصات \mathbf{y} را بچرخانیم، عبارت انرژی پتانسیل تغییر نمی‌کند و به همین دلیل هم بردار \mathbf{y} را وارد می‌کنیم.

انرژی پتانسیل به وسیله رابطه زیر معین می‌شود:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k,l=1}^f \frac{1}{2} W_{kl} y_k y_l, \quad (12-28)$$

که در آن

$$W_{kl} = \frac{K_{kl}}{M_k^{1/2} M_l^{1/2}}. \quad (12-29)$$

معادلات حرکت عبارت‌اند از:

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (12-30)$$

تانسور \mathbf{W} متقارن است، بنابراین می‌توانیم آن را به وسیله روش بخش ۴-۱۰ قطری کنیم. فرض

کنید \hat{e}_j یک بردار مشخص W مربوط به مقدار مشخص W_j باشد:

$$W \cdot \hat{e}_j = W_j \hat{e}_j. \quad (31-12)$$

فرض کنید a_{lj} مؤلفه‌های \hat{e}_j در دستگاه مختصات y باشد:

$$\hat{e}_j = (a_{1j}, \dots, a_{fj}), \quad j = 1, \dots, f. \quad (32-12)$$

در این صورت می‌توانیم معادله (۳۱-۱۲) را برحسب مؤلفه‌ها به شکلی نظیر معادلات (۱۰۸-۱۰) بنویسیم:

$$\sum_{l=1}^f (W_{kl} - W_j \delta_{kl}) a_{lj} = 0, \quad k = 1, \dots, f \quad (33-12)$$

این بار نیز شرط لازم برای جواب غیر صفر عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} W_{11} - W_j & W_{12} & \dots & W_{1f} \\ W_{21} & W_{22} - W_j & \dots & W_{2f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{f1} & W_{f2} & \dots & W_{ff} - W_j \end{vmatrix} = 0. \quad (34-12)$$

این یک معادله جبری از مرتبه f ام است که f ریشه W_j را باید از آن به دست آورد. توجه کنید که اگر $p^2 = -W_j$ و طرف چپ معادله (۳۴-۱۲) را بر $M_1 \cdot M_2 \dots M_f$ بخش کنیم و به‌خاطر داشته باشیم که در اینجا M_{kl} به‌وسیله معادله (۳۵-۱۲) معین می‌شود، در این صورت معادله فوق مانند معادله (۳۴-۱۲) خواهد بود. هر ریشه W_j را باید در معادله (۳۳-۱۲) جایگزین کرد و سپس نسبت‌های $a_{1j} : a_{2j} : \dots : a_{fj}$ را از آن به دست آورد. a_{lj} را می‌توان چنان تعیین کرد که \hat{e}_j بردار یکه باشد:

$$\sum_{l=1}^f a_{lj}^2 = 1. \quad (35-12)$$

اثبات‌های بخش ۱۰-۴ را می‌توان به فضاهایی با ابعاد دلخواهی تعمیم داد، لذا می‌دانیم که ریشه‌های W_j حقیقی‌اند و بنابراین ضرایب a_{lj} نیز همه حقیقی‌اند. به‌علاوه بردارهای یکه \hat{e}_j برای $W_j \neq W_l$ ، متعامدند.^۱ بنابراین داریم:

$$\hat{e}_j \cdot \hat{e}_r = \delta_{jr}, \quad (36-12)$$

$$\sum_{l=1}^f a_{lj} a_{lr} = \delta_{jr}. \quad (37-12)$$

در حالت چندگانگی، وقتی ۲ یا چند ریشه W_j مساوی‌اند، هنوز می‌توانیم a_{lj} ها را چنان اختیار کنیم که \hat{e}_j های مربوط به آنها متعامد باشند. این وضع کاملاً مشابه وضعی است که در بخش ۱۰-۴ توصیف کردیم، فقط با این تفاوت که برای $f > 3$ به‌طور هندسی قابل تجسم نیست. اثبات لم (۱۰-۱۲۵) را می‌توان به چندگانگی در فضاهایی به تعداد ابعاد دلخواه، تعمیم داد. اکنون فرض کنید که q_1, \dots, q_f مؤلفه‌های بردار آرایش y در امتداد $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_f$ باشند:

$$y = \sum_{j=1}^f q_j \hat{e}_j. \quad (38-12)$$

۱. در جبر برداری انتزاعی، رسم بر آن است که وقتی بردارها فقط دارای اهمیت جبری‌اند، نه لزوماً اهمیت هندسی، از کلمه «متعامد» به‌جای کلمه «عمودی» استفاده شود.

که بر حسب مؤلفه‌ها در دستگاه مختصات اصلی y به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_k = \sum_{j=1}^f a_{kj} q_j. \quad (۳۹-۱۲)$$

به عکس با تشکیل حاصل ضرب داخلی \hat{e}_r با معادله (۳۸-۱۲) و استفاده از معادلات (۳۲-۱۲) و (۳۶-۱۲)، خواهیم داشت:

$$q_r = \sum_{k=1}^f a_{kr} y_k. \quad (۴۰-۱۲)$$

این معادلات همانند معادلات (۶۷-۱۰) و (۶۹-۱۰) اند.

انرژی پتانسیل در دستگاه مختصات q_1, \dots, q_f که W را قطری می‌کند عبارت است از

$$V = \sum_{j=1}^f \frac{1}{2} W_j q_j^2. \quad (۴۱-۱۲)$$

حالتی را در نظر می‌گیریم که V در مبدأ $y = 0$ می‌نیم است. مقادیر مشخص W_1, \dots, W_f باید همه مثبت باشند و گرنه برای بعضی مقادیر q_1, \dots, q_f انرژی پتانسیل V منفی می‌شود. اگر V می‌نیم نمی‌شود، بعضی از مقادیر مشخص W_j منفی می‌شوند. (حالت خاص $W_j = 0$ ممکن است به می‌نیم مربوط بشود یا نشود، و این بستگی دارد به جملات مرتبه بالاتر که از آنها چشم پوشیده ایم.) فرض کنید که

$$W_j = \omega_j^2. \quad (۴۲-۱۲)$$

انرژی جنبشی (۲۷-۱۲) در این حالت عبارت است از

$$T = \sum_{j=1}^f \frac{1}{2} \dot{q}_j^2. \quad (۴۳-۱۲)$$

با توجه به معادلات (۴۱-۱۲) و (۴۳-۱۲)، معادلات لاگرانژ به معادلاتی برای هر مختصه q_j تفکیک می‌شود:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = 0, \quad j = 1, \dots, f, \quad (۴۴-۱۲)$$

مختصات q_j را مختصات طبیعی می‌نامند. جواب این معادله عبارت است از:

$$q_j = A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t, \quad j = 1, \dots, f, \quad (۴۵-۱۲)$$

که در آن A_j و B_j ثابتایی دلخواه‌اند. با استفاده از معادلات (۲۶-۱۲) و (۳۹-۱۲) جواب را بر حسب مختصات اصلی می‌نویسیم:

$$x_k = M_k^{-1/2} \sum_{j=1}^f a_{kj} (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t). \quad (۲۶-۱۲)$$

که ضرایب عبارت‌اند از:

$$A_j = q_j(0) = \sum_{k=1}^f a_{kj} M_k^{1/2} x_k(0) \quad (۴۷-۱۲)$$

و

$$B_j = \omega_j^{-1} \dot{q}_j(0) = \sum_{k=1}^f \omega_j^{-1} a_{kj} M_k^{1/2} \dot{x}_k(0). \quad (۴۸-۱۲)$$

در نتیجه جواب کامل را برای ارتعاشات کوچک حول نقطه تعادل پایدار در دست داریم. وقتی تعداد درجات آزادی زیاد باشد، حل معادله (۱۲-۳۴) ممکن است کاری بسیار دشوار باشد که در حالت کلی فقط به طور عددی برای مقادیر عددی ضرایب عملی است. مع هذا در بعضی از حالات ممکن است بعضی از ریشه‌ها را قبل از حل بدانیم (اغلب می‌دانیم که بعضی از فرکانسهای طبیعی صفرند) یا با در نظر گرفتن تقارن، ممکن است بدانیم که بعضی از ریشه‌ها مساوی‌اند. هر یک از این اطلاعات در فاکتورگیری از معادله (۱۲-۳۴) کمک می‌کند.

اگر V در $x_1 = \dots = x_f = 0$ می‌نیم نباشد و بعضی از ضرایب W_j منفی باشند، در این صورت جوابهایی از نوع نمایی به دست می‌آوریم. این مطلب ثابت می‌کند که در این حالت حرکت ناپایدار است، زیرا جواب (مگر برای شرایط اولیه خیلی خاص) شامل جملاتی خواهد بود که لااقل تا زمانی که تقریب خطی به کار رفته در معادلات حرکت دیگر برقرار نباشد، به طور نمایی با زمان افزایش می‌یابند. حالتی که یکی از W_j ها صفر باشد، در اینجا به تفصیل مورد بحث قرار نخواهد گرفت. در تقریب خطی که ما به کار می‌بریم، \dot{q} مربوطه در آن حالت ثابت است، و این همان است که در فصل ۲، تعادل خنثی نامیده شد. حرکت یا \dot{q} ثابت ادامه پیدا می‌کند تا اینکه q_j به اندازه کافی بزرگ گردد که در نتیجه جملاتی که از نظر q_j غیرخطی‌اند باید در نظر گرفته شوند.

یادآور می‌شویم که در یافتن مختصات طبیعی، تبدیلی از مختصات x_1, \dots, x_f به q_1, \dots, q_f پیدا کردیم که به طور همزمان دو تانسور M و K را قطری می‌کند، یا به بیانی صحیح‌تر، تبدیلی پیدا کردیم که دو شکل درجه دوم T و V را به طور همزمان قطری می‌کند. البته قطری کردن دو تانسور به طور همزمان به وسیله دوران دستگاه مختصات ممکن نیست، مگر آنکه دو تانسور دارای محورهای اصلی مشترک باشند. مع هذا، اگر اجازه دهیم که دستگاه مختصات، چنانکه در تبدیل (۱۲-۲۶) در امتداد محورهای انتخاب شده، کشیده یا فشرده شود، در این صورت می‌توانیم دو عبارت درجه دوم را به طور همزمان به صورت قطری در آوریم (به شرط آنکه لااقل یکی مثبت یا منفی معین^۱ باشد). ابتدا محورهای اصلی تانسور اول را پیدا می‌کنیم. به وسیله کشیدگی و فشرده‌گی در امتداد محورهای اصلی، می‌توانیم این تانسور را به یک تانسور ثابت تبدیل کنیم، (به شرط آنکه مقادیر مشخص همه مثبت یا همه منفی باشند). در حالت فوق، به کمک تبدیل (۱۲-۲۶) تانسور M را به ۱ تبدیل کردیم. چون برای یک تانسور ثابت، تمام محورها، محورهای اصلی‌اند، محورهای اصلی تانسور دوم که در اثر کشیدگی محورها تغییر کرده است، هر دو تانسور را به شکل قطری تبدیل خواهد کرد. برای خواننده آموزنده است که با نمایش هر تانسور به صورت منحنی یا سطح درجه دوم وابسته به آن تفسیری هندسی از این روش، در مورد تانسورها در فضای دو یا سه بعدی ارائه دهد، درست همان‌طور که تانسور ماند در بخش ۱۰-۵ به وسیله بیضوی ماند نمایش داده شد. وقتی با بردارها و تانسورها در فضای فیزیکی سروکار داریم، معمولاً کشیدگی غیریکنواخت محورها را در نظر نمی‌گیریم، زیرا این کشیدگی باعث تغییر شکل هندسی فضا می‌شود. وقتی با فضای برداری انتزاعی سروکار داریم، می‌توانیم هر تبدیلی را که برای هدف جبری مورد نظر و مناسب است، اختیار کنیم.

۴-۱۲ ارتعاشات واداشته

اکنون مایلم حرکت دستگاهی را که در بخش قبل بررسی شد وقتی تحت تأثیر نیروهای خارجی $F_1(t), \dots, F_f(t)$ وارد بر مختصات x_1, \dots, x_f قرار می‌گیرد، معین کنیم. این بار نیز حرکاتی را در نظر خواهیم گرفت که به اندازه کافی نزدیک به آرایش حالت تعادل باقی می‌مانند، به طوری که فقط جملاتی که از نظر x_1, \dots, x_f خطی‌اند باید در معادلات حرکت منظور گردند. اگر بردار

$$F(t) = (F_1, \dots, F_f), \quad (49-12)$$

را وارد کنیم، می‌توانیم معادلات حرکت را به صورت خلاصه شده زیر بنویسیم:

$$M \cdot \ddot{x} + K \cdot x = F(t), \quad (50-12)$$

که در آن فقط نیروهای $F(t)$ به معادله (۱۲-۲۰) اضافه شده‌اند. توجه کنید که معادله (۱۲-۵۰) را می‌توان از تابع لاگرانژی

$$L = T - V - V', \quad (51-12)$$

به دست آورد، که در آن T و V به وسیله معادلات (۱۲-۱۱) و (۱۲-۱۳) داده می‌شوند و

$$V' = - \sum_{k=1}^f x_k F_k(t). \quad (52-12)$$

این بار نیز فرض کنید که مختصات x_1, \dots, x_f متعامد اختیار شده‌اند، و در نتیجه M قطری است. اگر مختصات x_k از ابتدا متعامد نباشند، و یک دوران دستگاه مختصات در مورد محورهای اصلی M انجام شده باشد، در این صورت مؤلفه‌های $F_k(t)$ باید تحت تأثیر همان تبدیلی قرار گیرند که مختصات x_k قرار می‌گیرند. چون این عمل را در حالت قطری کردن تانسور K ، دنبال می‌کنیم، آن را به تفصیل در مورد M تکرار نخواهیم کرد، بلکه اگر لازم بود فرض می‌کنیم که این عمل انجام شده است و M قطری است.

اکنون مختصات را به مختصات طبیعی که در بخش قبل یافتیم، تبدیل می‌کنیم [معادلات (۱۲-۲۶)، (۱۲-۳۹)، و (۱۲-۴۰)]:

$$x_k = \sum_{j=1}^f M_k^{-1/2} a_{kj} q_j, \quad (53-12)$$

$$q_j = \sum_{k=1}^f M_k^{1/2} a_{kj} x_k. \quad (54-12)$$

با استفاده از معادله (۹-۳۰)، نیروهای تعمیم یافته $Q_j(t)$ وابسته به $F_k(t)$ به دست می‌آیند.

$$Q_j(t) = \sum_{k=1}^f M_k^{-1/2} a_{kj} F_k(t). \quad (55-12)$$

تبدیل معکوس عبارت است از

$$F_k(t) = \sum_{j=1}^f M_k^{1/2} a_{kj} Q_j(t). \quad (56-12)$$

خواننده می تواند با جایگزین کردن معادلات (۱۲-۵۳) در معادله (۱۲-۵۲) و محاسبه

$$Q_j = -\frac{\partial V'}{\partial q_j} . \quad (57-12)$$

معادلات (۱۲-۵۵) را تحقیق کند. در مختصات طبیعی،

$$V' = -\sum_{j=1}^f q_j Q_j(t) , \quad (58-12)$$

و از اینجا معادلات حرکت به قرار زیر نتیجه می شوند:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = Q_j(t) , \quad j = 1, \dots, f. \quad (59-12)$$

هر یک از این معادلات با معادله (۲-۸۶) برای نوسانگر هارمونیک واداشته میرا ($b = 0$) هم شکل است. بنابراین وجوه طبیعی مانند نوسانگرهای واداشته مستقل عمل می کنند و جواب به وسیله روشهایی که در فصل ۲ بیان کردیم، به دست می آید.

اکنون سعی می کنیم که نتایج خود را در مورد حالتی تعمیم دهیم که نیروهای میران خطی نیز وجود دارند. به سادگی می توانیم معادلات مناسب را بنویسیم. در حالت کلی وقتی مختصات متعامد نیستند و جفت شدگی اصطکاکی بین مختصات وجود دارد، معادلات حرکت عبارت خواهد بود از:

$$\sum_{l=1}^f (M_{kl}\ddot{x}_l + B_{kl}\dot{x}_l + K_{kl}x_l) = 0 , \quad k = 1, \dots, f, \quad (60-12)$$

یا به شکل برداری

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = 0 , \quad (61-12)$$

تانسور \mathbf{B} متقارن است اگر نیروهای اصطکاکی از قانون سوم نیوتن پیروی کنند. نشان دادن این مطلب آسان است اگر مختصات x ، مختصات مستطیلی ذرات یا اجسام باشند. همچنین اگر مختصات عمودی باشند و اگر مختصات مجزا به هر جسم نسبت داده شود، می توان نشان داد که \mathbf{B} متقارن است. یک تبدیل خطی به مختصات تعمیم یافته، تقارن \mathbf{B} را حفظ خواهد کرد.

بدبختانه همان طور که خواننده می تواند با اندکی تجربه خود را قانع کند، معمولاً امکان ندارد که به وسیله هیچ تبدیل خطی مختصاتی سه تانسور \mathbf{M} ، \mathbf{B} ، و \mathbf{K} را به طور همزمان قطری کرد، حتی اگر کشیدگی مختصات مجاز باشد. بنابراین روش بخش قبلی در این حالت قابل استفاده نیست و هیچ گونه مختصات طبیعی وجود ندارد. این وضع حتی اگر فرض کنیم که x_1, \dots, x_f متعامد باشند و در نتیجه \mathbf{M} قطری باشد، یا حتی اگر فرض کنیم که هیچ گونه جفت شدگی اصطکاکی وجود ندارد و در نتیجه \mathbf{B} قطری باشد، بهتر نمی شود. اگر تبدیلهای (۱۲-۵۳) و (۱۲-۵۴) که T و V را قطری می کنند، به کار بریم در حالت کلی مختصات q_j هنوز به وسیله نیروهای اصطکاکی جفت می شوند:

$$\ddot{q}_j + \sum_{r=1}^f b_{jr} \dot{q}_r + \omega_j^2 q_j = 0 , \quad (62-12)$$

که در آن

$$b_{jr} = \sum_{k,l=1}^f M_k^{-1/2} M_l^{-1/2} a_{kj} a_{lr} B_{kl} . \quad (63-12)$$

توجه کنید که حتی اگر ماتریس B_{kl} قطری باشد، ماتریس $b_{j\gamma}$ قطری نیست. حالت خاصی وجود دارد که گاه وقتی رخ می‌دهد که نیروهای اصطکاکی متناسب با اجرام‌اند و در نتیجه $B = \gamma M$. در این صورت روش بخش ۱۲-۳ قابل استفاده است، زیرا در دستگاه مختصات γ که در آن $M \rightarrow 1$ داریم $B \rightarrow \gamma$ و مختصات طبیعی q_j در امتداد محورهای اصلی W در معادلات جدا شده زیر صدق می‌کنند:

$$\ddot{q}_j + \gamma \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = 0. \quad (12-64)$$

البته همچنین ممکن است اتفاق بیفتد که در فضای γ که در آن M به ۱ تبدیل می‌شود، تانسورهای تبدیل شده B و K دارای محورهای اصلی یکسانی باشند، ولی این تصادفی غیرمحمتمل است. وقتی نیروهای میران خیلی کوچک‌اند، می‌توان از یک روش اختلال مشابه روشی که در بخش بعدی خواهد آمد استفاده کرد و یک جواب تقریبی بر حسب وجوه طبیعی میرا پیدا کرد.

بجز در این حالت‌های خاص، مسئله ارتعاشات میرا را فقط می‌توان به کمک جاگذاری مستقیم یک جواب امتحانی، مانند (۱۲-۲۱) در معادلات حرکت (۱۲-۶۰) حل کرد. در این صورت معادله ویژه مثل معادله (۱۲-۲۴) از مرتبه γ^2 و بر حسب p است. هر ریشه یک جواب برای بردار C می‌دهد. اگر ریشه‌های مختلط وجود داشته باشند، به صورت زوج‌های مزدوج p و p^* با بردارهای مزدوج مربوط C و C^* ظاهر می‌شوند. در این صورت دو جواب (۱۲-۲۱) را می‌توان با هم ترکیب کرد و یک جواب حقیقی به دست آورد که به صورت میرا و نوسانی خواهد بود، و می‌توان آن را یک وجه طبیعی نامید. اگر تمام γ^2 جواب با ضرایب دلخواه مناسب ترکیب شوند، جواب عام معادلات (۱۲-۶۰) را می‌توان نوشت. چون نیروهای اصطکاکی انرژی دستگاه را کاهش می‌دهند، از نظر فیزیکی واضح است که اگر $V(x)$ در $x = 0$ دارای می‌نیمی باشد، قسمت‌های حقیقی تمام ریشه‌های p باید منفی باشند. اثبات ریاضی این گزاره یک تمرین مشکل جبری است.

وقتی نیروهای مغناطیسی حاضرند و پتانسیلی که وابسته به سرعت است در تابع لاگرانژ ظاهر می‌شود، روش بررسی بالا کاربردی نیست. چنین حالاتی را می‌توان توسط روشهای بحث شده در بخش ۱۲-۶ بررسی کرد.

۵-۱۲ نظریه اختلال

ممکن است انرژی پتانسیل به وسیله رابطه زیر داده شده باشد،

$$V = V^0 + V^1, \quad (12-65)$$

که در آن انرژی پتانسیلی است که برای آن می‌توانیم مسئله ارتعاشات کوچک حول نقطه می‌نیم $x_1 = x_2 = \dots = x_f = 0$ را حل کنیم، و $V^1(x_1, \dots, x_f)$ برای مقادیر کوچک x_1, \dots, x_f بسیار کوچک است. V^0 را انرژی پتانسیل بی‌اختلال و V^1 را اختلال می‌نامیم. انتظار داریم که جوابهای انرژی پتانسیل V تقریباً همان جوابهای مسائل بی‌اختلال باشند. در این بخش یک روش حل تقریبی بر پایه این نکته به دست می‌آوریم.

فرض خواهیم کرد که در V' در $x_1 = \dots = x_f = 0$ ساکن باشد به طوری که

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x_k}\right)_{x_1 = \dots = x_f = 0} = 0. \quad (66-12)$$

اگر چنین نباشد، یافتن مقادیر تقریبی x_1^*, \dots, x_f^* که برای آنها V ساکن است، مشکل نیست. اگر در حول نقطه x_1^*, \dots, x_f^* بسط دهیم، جملات خطی در V^* جملات خطی در V' را حذف می‌کنند. اثبات این ادعا را به عنوان یک تمرین به عهده خواننده می‌گذاریم. در این صورت مبدأ مختصات باید انتقال مختصری یابد و در x_1^*, \dots, x_f^* قرار گیرد. این انتقال جملات درجه دوم V^* را کمی تغییر خواهد داد، ولی این تغییرات کوچک را ممکن است در V' منظور کرد. به هر حال، بسطی از V حول نقطه تعادل به شکل (۶۵-۱۲) خواهیم داشت که:

$$V^* = \sum_{k,l} \frac{1}{\gamma} K_{kl}^* x_k x_l, \quad (67-12)$$

$$V' = \sum_{k,l} \frac{1}{\gamma} K'_{kl} x_k x_l, \quad (68-12)$$

که در آن ضرایب K'_{kl} کوچک‌اند. معیار دقیقی که باید برقرار شود تا بتوان K'_{kl} را کوچک پنداشت، به تدریج به دست خواهد آمد.

برای مسئله بی‌اختلال، ابتدا مختصات را به مختصات طبیعی q_1^*, \dots, q_f^* تبدیل می‌کنیم. در این

صورت داریم،

$$V^* = \sum_{j=1}^f \frac{1}{\gamma} W_j^* (q_j)^2, \quad (69-12)$$

$$V' = \sum_{j,r} \frac{1}{\gamma} W'_{jr} q_j^* q_r^*, \quad (70-12)$$

$$W'_{jr} = \sum_{k,l} M_k^{-1/2} M_l^{-1/2} a_{kj} a_{lr} K'_{kl}, \quad (71-12)$$

که در آن W_j^* ریشه‌های دترمینان ویژه (۱۲-۳۴) برای مسئله بی‌اختلال‌اند و در آن این بار نیز برای سهولت فرض می‌کنیم که x_1, \dots, x_f مختصات متعامد است. ضرایب W'_{jr} را باید کوچک پنداشت. علامت «۰» یادآوری می‌کند که متغیرهای q_j^* مختصات طبیعی برای مسئله در حالت بی‌اختلال‌اند. معادلات حرکت برای q_1^*, \dots, q_f^* عبارت‌اند از:

$$\ddot{q}_j^* + W_j^* q_j^* + \sum_{r=1}^f W'_{jr} q_r^* = 0, \quad j = 1, \dots, f. \quad (72-12)$$

مشاهده می‌کنیم که عنصر قطری W' به ضریب q_j^* اضافه می‌شود، در حالی که عناصر غیرقطری وجوه طبیعی بی‌اختلال را جفت می‌کنند. انتظار داریم که اگر W' کوچک باشد، یک وجه طبیعی مسئله با اختلال نزدیک به هر وجه طبیعی مسئله بی‌اختلال وجود خواهد داشت، یعنی جوابی با فرکانس ω_j در نزدیکی $\omega_j^* = (W_j^*)^{1/2}$ که برای آن q_j^* بزرگ است، در حالی که بقیه q_r^* ها $r \neq j$ کوچک‌اند. مع هذا اگر تانسور W^* دارای مقادیر مشخص چندگانه باشد، که در نتیجه دو یا چند فرکانس بی‌اختلال با هم برابر باشند (یا شاید تقریباً برابر باشند)، در این صورت انتظار داریم که حتی

مقدار کمی جفت‌شدگی، حرکت را به طرز عجیبی تغییر دهد، همان‌طور که در مورد دو نوسانگر جفت شده که در فصل ۴ مشاهده کردیم. این بینش در پدید آوردن یک روش اختلال مفید خواهد بود. اگر سعی کنیم که یک وجه طبیعی نوسان را به وسیله جاگذاری

$$q_j = C_j e^{p^t}, \quad j = 1, \dots, f, \quad (73-12)$$

در معادلات (۷۲-۱۲) پیدا کنیم، خواهیم داشت،

$$(p^2 + W_j^*) C_j + \sum_{r=1}^f W_{jr}^* C_r = 0. \quad (74-12)$$

اکنون فرض می‌کنیم که وجه موردنظر نزدیک به یک وجه بی‌اختلال، مثلاً $j=1$ باشد. در این صورت روابط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$p^2 = -W_1^* - W_1', \quad (75-12)$$

$$C_1 = 1 + C_1',$$

$$C_j = C_j', \quad j = 2, \dots, f.$$

اگر $C_1', \dots, C_f', W_1', \dots, W_{1r}'$ صفر باشند، معادله (۷۳-۱۲) نمایشگر یک جواب مسئله بی‌اختلال است. بنابراین برای مسئله با اختلال، فرض می‌کنیم که $C_1', \dots, C_f', W_1', \dots, W_{1r}'$ کوچک‌اند. معادلات (۷۵-۱۲) را در معادلات (۷۴-۱۲) جایگزین می‌کنیم و جملات درجه دوم را در طرف راست جمع می‌کنیم:

$$-W_1' + W_{11}' = - \sum_{r=1}^f W_{1r}' C_r' + W_1' C_1', \quad (76-12)$$

$$(W_j^* - W_1^*) C_j' + W_{j1}' = - \sum_{r=1}^f W_{jr}' C_r' + W_1' C_j', \quad j = 2, \dots, f. \quad (77-12)$$

وقتی از جملات درجه دوم صرف‌نظر کنیم، W_1' از معادله اول به دست می‌آید:

$$W_1' \doteq W_{11}'. \quad (78-12)$$

بنابراین

$$\omega_1^2 = -p^2 \doteq W_1^* + W_{11}'. \quad (79-12)$$

اگر از طرف راست معادلات (۷۷-۱۲) صرف‌نظر کنیم، ضرایب C_j' به دست می‌آیند:

$$C_j' = \frac{W_{j1}'}{W_1^* - W_j^*}, \quad j = 2, \dots, f. \quad (80-12)$$

ضریب C_1' تعیین نشده است. این مربوط می‌شود به این حقیقت که وجه طبیعی (۷۳-۱۲) ممکن است دارای دامنه (و فاز) دلخواهی باشد، اگر چه باید نزدیک دامنه (و فاز) $C_1^* = 1$ باشد. که در معادلات (۷۵-۱۲) برای مسئله بی‌اختلال اختیار گردید. برای سهولت C_1, \dots, C_f را ضرایب یک بردار یکه می‌گیریم:

$$\sum_{j=1}^f C_j^2 = 1. \quad (81-12)$$

در این صورت معادله بعدی را برای C'_1 به دست می آوریم:

$$C'_1 = -\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^f (C'_j)^2. \quad (۱۲-۸۲)$$

تا مرتبه اول در مقادیر کوچک

$$C'_1 \doteq 0. \quad (۱۲-۸۳)$$

اگر آن را در معادلات (۱۲-۷۳) جایگزین کنیم و در ضریب دلخواه $\frac{1}{2} A e^{i\theta}$ ضرب کنیم و جواب مزدوج مختلط را با آن جمع کنیم، تقریبهای مرتبه اول را برای وجه طبیعی اختلال به دست می آوریم:

$$q_1^* \doteq A \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (۱۲-۸۴)$$

$$q_j^* \doteq \frac{A W'_{j1}}{W_j^* - W_1^*} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad j = 2, \dots, f,$$

که در آن ω_1 به وسیله معادله (۱۲-۷۹) داده می شود. مشاهده می کنیم که اثر مرتبه اول اختلال این است که ω_1^2 را به اندازه ضریب اختلال قطری W'_{11} انتقال می دهد و وجوه بی اختلال را به طور ضعیف، با دامنه ای که با ضرایب جفت شدگی اختلال W'_{j1} به طور مستقیم و با مربع تفاضلهای فرکانسهای طبیعی بی اختلال به طور معکوس متناسب است، برمی انگیزد. این از نظر فیزیکی یک نتیجه منطقی است.

اکنون می توانیم شرط کوچک بودن W' را به طور دقیق تر بیان کنیم. در عمل فوق فرض کرده ایم که

$$W'_1 \ll |W'_j - W_1^*|, \quad j = 2, \dots, f, \quad (۱۲-۸۵)$$

$$C'_j \ll 1. \quad (۱۲-۸۶)$$

معادلات (۱۲-۷۸) و (۱۲-۸۰) نشان می دهند که روابط فوق در صورتی برقرارند که

$$W'_{j1} \ll |W'_j - W_1^*|, \quad j = 2, \dots, f, \quad (۱۲-۸۷)$$

$$W'_{11} \ll |W'_j - W_1^*|, \quad j = 2, \dots, f.$$

این شرط اعتبار فرمولهای (۱۲-۷۹) و (۱۲-۸۴) است.

تقریبهای مرتبه اول برای بقیه وجوه به وسیله تعویض اندیس «۱» در این فرمولها با هر اندیس دیگر به دست می آیند.

خواننده تیزهوش توجه خواهد کرد که شرط (۱۲-۸۷) در ضریب قطری W'_{11} فقط به این دلیل لازم است که ما از جمله آخر در معادلات (۱۲-۷۷) صرف نظر کرده ایم. C'_j را می توان به سادگی از معادلات (۱۲-۷۷) حتی اگر جمله آخر طرف راست منظور شود به دست آورد. بدین ترتیب اگر مایل باشیم می توانیم محدودیت اندازه ضرایب قطری را رفع کنیم. این مطلب نیز روشن است، زیرا همیشه می توانیم هر ضریب قطری را در V^* منظور کنیم [معادله (۱۲-۶۹)]، مختصات طبیعی برای مسئله بی اختلال هنوز همانهاست و فقط به وسیله اضافه کردن جملات قطری، فرکانسهای (مجذور شده) تغییر می کنند. مع هذا در تبدیل به مختصات طبیعی، جملات قطری و غیرقطری با هم مخلوط می شوند، به طوری که جملات غیرقطری (q_1^*, \dots, q_f^*) تماماً کوچک نخواهند بود، مگر آنکه تمام جملات در V' کوچک باشند.

واضح است که اگر چندگانگی وجود داشته باشد، به عنوان مثال اگر $W_1^* = W_2^* = W_3^*$

شرایط (۱۲-۸۷) ممکن نیست برقرار باشد. در آن حالت، همان طور که قبلاً ذکر شد، انتظار داریم که حتی با جفت شدگی بسیار کوچک و جوه بی اختلال، هر وجه اختلالی که ω^2 آن به W_1^* نزدیک باشد، برانگیختگی قابل ملاحظه هر سه وجه بی اختلال را نشان خواهد داد. در این صورت فرض می کنیم که

$$p^2 = -W_1^* - W', \quad (88-12)$$

و فقط C_4, \dots, C_f کوچک باشند، در حالی که C_1, C_2, C_3 ممکن است همگی از مرتبه ۱ باشند. این مقدار p^2 را در معادلات (۱۲-۷۴) جایگزین می کنیم و جملات مرتبه دوم را به طرف راست می بریم:

$$(W'_{11} - W')C_1 + W'_{12}C_2 + W'_{13}C_3 = - \sum_{r=4}^f W'_{1r}C_r,$$

$$W'_{21}C_1 + (W'_{22} - W')C_2 + W'_{23}C_3 = - \sum_{r=4}^f W'_{2r}C_r, \quad (89-12)$$

$$W'_{31}C_1 + W'_{32}C_2 + (W'_{33} - W')C_3 = - \sum_{r=4}^f W'_{3r}C_r,$$

$$(W'_j - W'_i)C_j + \sum_{r=1}^3 W'_{jr}C_r = - \sum_{r=4}^f W'_{jr}C_r + W'C_j, \quad j=4, \dots, f. \quad (90-12)$$

اگر از جمله های طرف راست صرف نظر کنیم، در این صورت معادلات (۱۲-۸۹) یک مسئله مقدار مشخص سه بعدی معیار برای مقدار مشخص W' و بردار مشخص وابسته (C_1, C_2, C_3) می شود. سه جواب مربوط به سه وجه طبیعی اختلال با فرکانسهای $\omega^2 = W_1^* + W'$ در نزدیکی فرکانس بی اختلال چندگانه وجود خواهد داشت. در حالت کلی سه ریشه W' مختلف خواهند بود، و بنابراین جوه با اختلال دیگر چندگانه نخواهند بود. بقیه ضرایب C_4, \dots, C_f را می توان با صرف نظر کردن از طرف راست، تا تقریب مرتبه اول از معادلات (۱۲-۹۰) به دست آورد. می توانیم C را یک بردار یکه نیز فرض کنیم [معادله (۱۲-۸۱)]. این بدان معنی است که مانند معادله (۱۲-۸۳) بردار سه بعدی (C_1, C_2, C_3) تا مرتبه اول باید یک بردار یکه باشد. در حالت دو، یا چندگانگی از هر مرتبه ای باید به همین طریق عمل شود. واضح است که اگر چندگانگی از مرتبه بالا باشد، حل معادلات اختلال مرتبه اول [معادلات (۱۲-۸۹)] که طرف راست شان صفر است [ممکن است تقریباً به همان درجه دشواری حل دقیق معادلات (۱۲-۷۴)] باشد. وقتی $f \geq 4$ باشد، ممکن است بیش از یک فرکانس طبیعی چندگانه داشته باشیم. در آن حالت، روش فوق را می توان به طور جداگانه برای هر گروه از جوه بی اختلال چندگانه به کار برد و جوه با اختلال را پیدا کرد. در حالت های چندگانگی تقریبی $(W_1^* \doteq W_2^* \doteq W_3^*)$ که شرایط (۱۲-۸۷) برای گروهی در نزدیکی جوه بی اختلال برقرار نباشند، روش بند قبلی را می توان به کار برد. با اضافه کردن عبارات کوچکی مانند $W_1^* - W_2^*$ در ضرایب قطری، معادلات (۱۲-۸۹) کمی ترمیم می یابند. خواننده می تواند به آسانی این روش را برای خود به شکل ریاضی بیان کند.

وقتی جواب تقریبی مرتبه اول به دست آمد، مقادیر تقریبی ضرایب W'_1 و C'_j را می توان در طرف راست معادلات (۱۲-۷۶) و (۱۲-۷۷) یا معادلات (۱۲-۸۹) و (۱۲-۹۰) جایگزین کرد. و

سپس معادلات حاصل را حل کرد، تا تقریب مرتبه دوم به دست آید. اگر مثلاً معادلات (۱۲-۸۰) را در معادله (۱۲-۷۶) جایگزین کنیم، تقریب مرتبه دوم را برای تصحیح فرکانس به دست می آوریم:

$$W'_1 \doteq W'_{11} + \sum_{r=2}^f \frac{(W'_{1r})^2}{W'_1 - W'_r} \quad (91-12)$$

که در آن از متقارن بودن W' استفاده کرده ایم. مشاهده می کنیم که انتقال فرکانس مرتبه دوم در وجه ۱ شامل جزئی است که از جفت شدگی با هر یک از وجوه دیگر ناشی می شود. وجوه تمایل دارند که یکدیگر را در مرتبه دوم دفع کنند، یعنی هر وجه فرکانس بالاتر ($W'_r > W'_1$) فرکانس وجه ۱ را کاهش می دهد، و هر وجه فرکانس پایین تر آن را افزایش می دهد. همین نتیجه در حل مسئله دو نوسانگر جذب شده در فصل ۴ مشاهده گردید. این روش را می توان به طریق ساده ای به طور متوالی برای تقریبهای مرتبه بالاتر به کار برد، ولی زحمت عملیات آن به سرعت زیاد می شود.

تا هر مرتبه تقریب، ممکن است مختصات طبیعی q_1, \dots, q_f را برای مسئله ای با اختلال به وسیله قرار دادن

$$q_j^* = \sum_{r=1}^f C_{jr} q_r \quad (92-12)$$

وارد کنیم، که در آن $f, \dots, 1 = j$ و ضرایب C_{jr} امین وجه طبیعی اختلال اند که تا هر مرتبه تقریب به وسیله نظریه اختلال به دست می آیند. همان طور که هم اکنون مشاهده خواهیم کرد، بردارهای $C_r = (C_{1r}, \dots, C_{fr})$ تا هر مرتبه تقریب مفروض، بردارهای یکه متعامدند. (یا چنانکه هم اکنون می بینیم، ممکن است چنین بشوند). بنابراین می توانیم

$$q_r = \sum_{j=1}^f C_{jr} q_j^* \quad (93-12)$$

را از معادلات (۱۲-۹۲) و (۱۲-۷۳) به دست آوریم. اگر $p^2 = -W'_r - W'_r = -\omega_r^2$ مقدار تقریبی فرکانس باشد، در این صورت از معادلات (۱۲-۹۲) و (۱۲-۷۳) نتیجه می شود که جواب تقریبی q_r باید چنین باشد،

$$q_r \doteq A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t. \quad (94-12)$$

از مقایسه با معادلات (۱۲-۴۵) نتیجه می شود که q_r مختصات طبیعی (تقریبی) است. بنابراین تابع لاگرانژ تا هر مرتبه تقریب، باید چنین باشد:

$$L \doteq \sum_{r=1}^f \left(\frac{1}{\nu} \dot{q}_r^2 - \frac{1}{\nu} \omega_r^2 q_r^2 \right), \quad (95-12)$$

همان طور که می توان به وسیله جایگزین کردن مستقیم معادلات (۱۲-۹۲) در معادلات (۱۲-۶۹)، (۱۲-۷۰)، و (۱۲-۴۳) تا هر مرتبه تقریب C_{jr} نیز تحقیق کرد. از طرف دیگر باید توجه داشت که معادلات (۱۲-۷۴) درست همان معادلاتی اند که اگر ما به دنبال یک بردار مشخص C از $W = W^0 + W'$ مربوط به مقدار مشخص p^2 می گزینیم، به دست می آوریم. بنابراین جوابهای تقریبی که برای معادلات (۱۲-۷۴) به دست آورده ایم جوابهای تقریبی مسئله قطری کردن W نیز هستند. بنابراین معادلات (۱۲-۹۲) باید مختصات طبیعی تقریبی برای حرکت با اختلال را معین کنند.

۱۲-۶ ارتعاشات کوچک حول حرکت پاینده

فرض کنید که دستگاهی مکانیکی به وسیله مختصات $x_1, \dots, x_f, \dots, x_f$ تابع لاگرانژ

$$L(x_1, \dots, x_f; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_f; t)$$

توصیف می شود. اگر جواب $x_1^*(t), \dots, x_f^*(t)$ معلوم باشد، می توانیم به وسیله تعریف مختصات جدید y_1, \dots, y_f :

$$x_k = x_k^*(t) + y_k, \quad k = 1, \dots, f. \quad (96-12)$$

جوابهای نزدیک به جواب معلوم را جستجو کنیم. روابط فوق را در تابع لاگرانژ L جایگزین می کنیم و بر حسب توانهای y_1, \dots, y_f بسط می دهیم. چون $x_1^*(t), \dots, x_f^*(t)$ در معادلات حرکت صدق می کنند، خواننده به آسانی می تواند نشان دهد که هیچ جمله خطی بر حسب y_1, \dots, y_f در L ظاهر نمی شود. جملاتی از L که از y_1, \dots, y_f مستقل اند، اثری بر معادلات حرکت نمی گذارند و می توان از آنها صرف نظر کرد. اگر فرض کنیم که y_1, \dots, y_f کوچک چشم پوشی کنیم، در این صورت L به صورت تابع درجه دومی از متغیرهای جدید در می آید. لذا معادلات حرکت بر حسب y_1, \dots, y_f در x_1^*, \dots, x_f^* حل می شود. لکن ضرایب معادلات در حالت کلی توابعی از زمان t خواهند بود و روشهایی که تاکنون ذکر کرده ایم برای حل آنها کافی نخواهند بود. یافتن روشهایی برای حل معادلات با ضرایبی که تابع زمان اند، خارج از حد این کتاب است. لذا فقط حالاتی را در نظر خواهیم گرفت که ضرایب در معادلات خطی شده ثابت باشند. اگر خود را به حرکات پاینده محدود کنیم، می توانیم تضمین کنیم که ضرایب ثابت خواهند بود. فرض کنید که بعضی از مختصات x_1, \dots, x_f قابل اغماض اند، یعنی در تابع لاگرانژ ظاهر نمی شوند. همچنین فرض کنید که L به طور صریح به t بستگی ندارد. حرکت پاینده را حرکتی تعریف می کنیم که در آن تمام مختصات غیر قابل اغماض، ثابت باشند. این تعریف به طور مسلم به دستگاه مختصات انتخاب شده بستگی دارد. شاید بهتر این باشد که حرکت پاینده را حرکتی تعریف کنیم که برای آن، در دستگاه مختصاتی، مختصات غیر قابل اغماض همگی ثابت باشند.

در بخش ۹-۱۰ دیدیم که می توان مختصات قابل اغماض را مخصوصاً از نظر معادلات حرکت هامیلتون به سادگی حل کرد. لذا مختصات x_1, \dots, x_f و اندازه های حرکت مربوط به آنها را p_1, \dots, p_f که از آنها x_{N+1}, \dots, x_f قابل اغماض اند، در نظر می گیریم. تابع هامیلتون عبارت است از:

$$H = H(x_1, \dots, x_N; p_1, \dots, p_N, p_{N+1}, \dots, p_f). \quad (97-12)$$

با توجه به معادلات (۹-۱۹۸)، اندازه های حرکت p_1, \dots, p_{N+1} همگی ثابت اند. بنابراین فقط با $2N$ معادله (۹-۱۹۸) سروکار داریم، که برای حرکت دائم به معادلات زیر تبدیل می شوند:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (98-12)$$

برای مقادیر داده شده p_1^*, \dots, p_{N+1}^* باید جوابهای این معادلات را (اگر جوابی وجود داشته باشد) به ازای x_1, \dots, x_N پیدا کنیم. هر جواب x_1^*, \dots, x_N^* ؛ p_1^*, \dots, p_N^* یک حرکت پاینده

را تعریف می‌کند. مختصات قابل اغماض همه دارای سرعت‌هایی ثابت‌اند که به وسیله روابط زیر داده می‌شوند،

$$\dot{x}_j = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \right), \quad j = N+1, \dots, f, \quad (99-12)$$

که در آن اندیس پایین «۰» بدین معنی است که مشتق باید در $x_1^0, \dots, x_N^0; p_1^0, \dots, p_f^0$ محاسبه شود. با در دست داشتن یک حرکت پاینده، مبدأ دستگاه مختصات را چنان اختیار می‌کنیم که

$$x_1^0 = \dots = x_N^0 = p_1^0 = \dots = p_N^0 = 0$$

برای یافتن حرکاتی در نزدیکی این حرکت پاینده، p_{N+1}, \dots, p_f را ثابت نگه می‌داریم و H را بر حسب توانهای $x_1, \dots, x_N; p_1, \dots, p_N$ ، که آنها را کوچک می‌پنداریم، بسط می‌دهیم. هر جمله‌ای را که به x_1, \dots, x_N, p_N بستگی ندارد، حذف می‌کنیم. جملات خطی به علت وجود معادله (۱۲-۹۸) غایب‌اند. اگر از جملات درجه سوم در کمیت‌های کوچک صرف نظر کنیم، H تابع درجه دومی از $x_1, \dots, x_N; p_1, \dots, p_N$ با ضرایب ثابت می‌شود. ممکن است که H به یک «انرژی جنبشی» مثبت و معین، $T(p_1, \dots, p_N)$ و یک «انرژی پتانسیل» $V(x_1, \dots, x_N)$ تقسیم شود. در آن حالت می‌توان روش‌های بخش‌های قبلی را به کار برد. برای به کار بردن چنین روش‌هایی باید «انرژی جنبشی» T' را بر حسب $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N$ بیان کنیم. این عمل را می‌توانیم با به دست آوردن p_1, \dots, p_N از معادلات خطی

$$\dot{x}_k = \frac{\partial T'}{\partial p_k}, \quad k = 1, \dots, N \quad (100-12)$$

انجام دهیم. بنابراین مسئله دوباره به شکل تابع لاگرانژ با $T' - V$ انجام می‌گیرد. مع هذا توجه کنید که ما نمی‌توانیم L' صحیح را فقط با جایگزینی \dot{x}_k از معادله (۱۲-۹۹) در L اصلی به دست آوریم. تبدیل به شکل هامیلتون لازم است تا قادر باشیم با در نظر گرفتن p_{N+1}, \dots, p_f به عنوان ثابت‌های داده شده، مختصات قابل اغماض را از مسئله حذف کنیم. «انرژی پتانسیل» V' شامل جملاتی خواهد بود که شامل p_{N+1}, \dots, p_f از انرژی جنبشی اصلی باشند و اینها با علامت مخالف در L' ظاهر خواهند شد.

اگر تابع $V'(x_1, \dots, x_N)$ در $x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0$ دارای می‌نیمی باشد، در این صورت x_1, \dots, x_N ، اگر همه به اندازه کافی کوچک باشند، دارای نوسانهای پایدار خواهند بود. در این صورت می‌توانیم بگوییم که حرکت پاینده داده شده بدین معنی پایدار است، که برای حرکات نزدیک (با همان p_{N+1}, \dots, p_f)، مختصات حول مقادیر پاینده خود نوسان می‌کنند. این نوسانها را می‌توان به وسیله مختصات طبیعی که به وسیله روش بخش ۱۲-۳ به دست می‌آیند توصیف کرد.

اگر دستگاه مختصاتی که به کار می‌بریم متحرک باشد، یا اگر نیروهای مغناطیسی وجود داشته باشند که باید به وسیله یک پتانسیل وابسته به سرعت (۹-۱۶۶) توصیف شوند، یا اگر همان‌طور که اغلب اتفاق می‌افتد، مختصات قابل اغماض بر مختصات غیرقابل اغماض عمود نباشند، در این صورت جملات $x_k p_l$ ($k, l \leq N$) در H ظاهر خواهند شد. بنابراین، در حالت کلی، جملات درجه دوم H به شکل زیرند:

$$H = \sum_{k,l=1}^N \left(\frac{1}{\gamma} a_{kl} p_k p_l + b_{kl} x_k p_l + \frac{1}{\gamma} c_{kl} x_k x_l \right), \quad (101-12)$$

که در آن فرض می‌کنیم

$$a_{lk} = a_{kl}, \quad c_{lk} = c_{kl}. \quad (102-12)$$

ضرایب a_{kl} ، b_{kl} و c_{kl} توابعی هستند از ثابتهای p_N, \dots, p_f و از حرکت پاینده خاصی که پایداریش مورد نظر است. دیگر انرژی به انرژیهای جنبشی و پتانسیل تقسیم نمی‌شود و دیگر نمی‌توان از روشهای بخشهای قبلی استفاده کرد. ممکن است که H به صورتی که به وسیله معادله (۱۲-۱۰۱) داده می‌شود، در $p_1, \dots, p_N, x_1, \dots, x_N$ مثبت (یا منفی) معین باشد، که در این حالت می‌توانیم مطمئن باشیم که حرکت پاینده پایداری است. زیرا $x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N$ باید در سطح H ثابت باقی بمانند، و اگر H مثبت معین باشد، این سطح یک بیضوی در فضای فاز $2N$ بعدی خواهد بود. در هر حال می‌توانیم ارتعاشات کوچک حول حرکت پاینده را با حل معادلاتی خطی شده که به وسیله تابع هامیلتون (۱۲-۱۰۱) داده می‌شود، بررسی کنیم:

$$\dot{x}_k = \sum_{l=1}^N (a_{kl} p_l + b_{lk} x_l),$$

$$\dot{p}_k = - \sum_{l=1}^N (b_{kl} p_l + c_{kl} x_l), \quad k = 1, \dots, N. \quad (103-12)$$

می‌توانستیم به یک بیان ریاضی لاگرانژ شامل N معادله مرتبه دوم از x_1, \dots, x_N برگردیم ولی کار مستقیم با معادلات (۱۲-۱۰۳) نیز درست به همان اندازه ساده است. اکنون در جستجوی وجهی طبیعی هستیم که در آن تمام کمیتها دارای وابستگی زمانی یکسانند:

$$x_k = X_k e^{pt}, \quad p_k = P_k e^{pt} \quad (104-12)$$

معادله فوق را در معادلات (۱۲-۱۰۳) جایگزین می‌کنیم و $2N$ معادله خطی به دست می‌آوریم

$$\sum_{l=1}^N [(b_{lk} - p \delta_{kl}) X_l + a_{kl} P_l] = 0,$$

$$\sum_{l=1}^N [(c_{kl} X_l + (b_{kl} + p \delta_{kl}) P_l] = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (105-12)$$

دترمینان ضرایب باید صفر شود:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - p & b_{12} & \dots & a_{11} & \dots & a_{1N} \\ b_{12} & b_{22} - p & \dots & a_{21} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{11} & c_{12} & \dots & b_{11} + p & \dots & b_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & b_{21} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & b_{N1} & \dots & b_{NN} + p \end{vmatrix} = 0. \quad (106-12)$$

اکنون توجه می‌کنیم که اگر p ریشه از این معادله باشد، $-p$ نیز خواهد بود. ابتدا در دترمینان، $p = -p'$ قرار می‌دهیم. اکنون جای N سطر بالا و N سطر پایین را با هم عوض می‌کنیم. سپس جای N ستون چپ را با N ستون راست و سرانجام جای سطرها و ستونها را با هم عوض می‌کنیم،

یعنی درترمینان را حول قطر اصلی اش می چرخانیم. هیچ یک از این اعمال مقدار درترمینان را تغییر نمی دهد (مگر احتمالاً علامت آن را، که مهم نیست). اکنون برای p' همان معادله ای را داریم که در اصل برای p داشتیم. لذا اگر p یک ریشه باشد، p' نیز خواهد بود. بنابراین مشاهده می کنیم که وقتی درترمینان $(12-106)$ را بسط می دهیم، فقط توانهای زوج p ظاهر می شوند، و ما یک معادله جبری از p^2 و درجه N داریم. اگر ریشه ها همگی منفی باشند، همان طور که اگر H در معادله $(12-101)$ مثبت معین باشد خواهند بود، در این صورت تمام وجوه طبیعی پایدار خواهند بود. هر ریشه $\omega_j^2 = -p^2$ دو مقدار $p = \pm i\omega_j$ می دهد. $p = i\omega_j$ را در معادلات $(12-105)$ جایگزین می کنیم و X_{ij} و P_{ij} را که در حالت کلی مختلط اند، از آنها به دست می آوریم. البته ثابت دلخواهی وجود دارد که می توان آن را به هر روش مناسبی اختیار کرد. جوابها به ازای $p = -i\omega_j$ عبارت خواهند بود از X_{ij}^* و P_{ij}^* . جوابها را در معادلات $(12-104)$ جایگزین می کنیم و در ثابت دلخواه $A_j e^{i\theta_j}$ ضرب، و جوابهای مختلط مزدوج را با هم ترکیب می کنیم تا جواب حقیقی برای وجه طبیعی z را به دست آوریم:

$$x_k = A_j C_{kj} \cos(\omega_j t + \beta_{kj} + \theta_j), \quad (12-107)$$

$$p_k = A_j C_{kj} \cos(\omega_j t + \gamma_{kj} + \theta_j),$$

که در آن

$$X_{kj} = \frac{1}{\gamma} C_{kj} e^{i\beta_{kj}},$$

$$P_{kj} = \frac{1}{\gamma} D_{kj} e^{i\gamma_{kj}}, \quad (12-108)$$

و A_j و θ_j دامنه و فاز دلخواه اند. اکنون جواب عام، ترکیبی از وجوه طبیعی است:

$$x_k = \sum_{j=1}^N A_j C_{kj} \cos(\omega_j t + \beta_{kj} + \theta_j), \quad (12-109)$$

$$p_k = \sum_{j=1}^N A_j C_{kj} \cos(\omega_j t + \gamma_{kj} + \theta_j).$$

توجه کنید که نمی توانیم نتیجه بالا را برحسب مختصات طبیعی q_1, \dots, q_N که به طور خطی به x_1, \dots, x_N مربوط شده باشند، نمایش دهیم، و این به سبب اختلاف فاز β_{kj} و γ_{kj} است که از جملات حاصل ضرب مختصات و اندازه حرکت ناشی می شود. می توان تبدیلی خطی پیدا کرد که $2N$ متغیر $x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N$ را به مجموعه ای از مختصات و اندازه های حرکت طبیعی $q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N$ مربوط کند، که هر یک از آنها با فرکانس طبیعی مربوطه نوسان کند. چنین تبدیلاتی به نظریه تبدیل قانونی دینامیک هامیلتونی متعلق اند و خارج از حد این کتاب اند.

اگر هر ریشه p^2 از معادله $(12-106)$ مثبت یا مختلط باشد، وجه طبیعی مربوطه ناپایدار خواهد بود و مختصات و اندازه های حرکت به صورت نمایی از مقادیر پاینده شان دور خواهند شد. ریشه $p^2 = 0$ به پایداری خنثی مربوط می شود. حالتی که معمولاً زمانی پیش می آید که ریشه های $p^2 = 0$ هنگامی است که یک مختصه قابل اغماض در میان x_1, \dots, x_N منظور شده باشد. اگر z_j قابل اغماض باشد و در x_1, \dots, x_N منظور شده باشد، در این صورت p_j ثابت است و ممکن است هر مقداری را قبول کند. اگر برای حرکت پاینده داده شده اولیه p_j با p_j کمی تفاوت داشته باشد،

حرکت پاینده جدیدی با \dot{x} ثابت که کمی با \dot{x} تفاوت دارد، وجود خواهد داشت. این حرکت جدید به وسیله رابطه زیر داده می شود.

$$x_j = A_j + B_j \dot{x}; \quad \epsilon, \quad \text{بقیه } x_k = A_k, \quad (11-12)$$

که در آن A_k ممکن است با \dot{x} کمی تفاوت داشته باشد. این حرکت به یک وجه طبیعی با $p^2 = 0$ مربوط می شود. ممکن است که یک مختصه قابل اغماض \dot{x} وجود داشته باشد، ولی ما دستگاه مختصاتی را انتخاب کرده باشیم که در آن \dot{x} ظاهر نمی شود. ریشه $p^2 = 0$ معادله (۱۲-۱۰۶) هنوز رخ می دهد. چون مختصاتی که عملاً به کار برده شده اند، توابعی از مختصه قابل اغماض خواهند بود، در وجه طبیعی مربوط به آن، چند مختصه یا همگی آنها می توانند سرعتهای ثابت ارائه دهند. اینها را می توانیم با جایگذاری در معادلات حرکت (۱۲-۱۰۳) به دست آوریم. در بعضی حالات، عملیات جبری لازم برای استفاده از یک مختصه قابل اغماض \dot{x} به طور صریح بسیار مشکل است، و ممکن است ترجیح دهیم که دستگاه مختصاتی به کار بریم که در آن \dot{x} ظاهر نمی شود. این عمل، درجه معادله ویژه (۱۲-۱۰۶) را یک درجه افزایش می دهد، ولی چون ریشه اضافی، $p^2 = 0$ است می دانیم که از p^2 فاکتورگیری می شود و معادله باقیمانده دارای همان درجه ای خواهد بود که اگر \dot{x} را نادیده می گرفتیم.

حالت چندگانگی، یعنی وقتی ریشه چندگانه برای p^2 پیدا می شود، برای معادلات (۱۲-۱۰۳) پیچیده تر از معادلات (۱۲-۲۰) است، که در آن نیرو از انرژی پتانسیلی به دست می آید که فقط به x_1, \dots, x_N بستگی دارد. دیگر نمی توانیم از نظریه قطری کردن تانسور متقارن استفاده کنیم و نشان دهیم که برای یک ریشه مضاعف p^2 ، معادلات (۱۲-۱۰۵) دارای همان تعداد جوابهای مستقل مضاعف اند، یعنی نمی توانیم همان طور که در مورد معادلات مشابه (۱۲-۲۳) یا (۱۲-۳۳) عمل کردیم، در اینجا نیز عمل کنیم. بعضی اوقات معادلات (۱۲-۱۰۵) ممکن است فقط یک جواب مستقل داشته باشد، حتی وقتی که p^2 ریشه های مضاعف معادله (۱۲-۱۰۶) باشد، در این صورت باید در جستجوی جوابهایی به شکلهای دیگری غیر از شکل (۱۲-۱۰۴) باشیم. در اینجا عملیات جبری را با تمام جزئیات انجام نمی دهیم،^۱ ولی نتیجه این است که وقتی به ازای ریشه چندگانه p^2 معادلات (۱۲-۱۰۵) به اندازه کافی جوابهای مستقل X_k و P_k نمی دهند، در این صورت X_k و P_k در معادلات (۱۲-۱۰۴) را باید به وسیله چند جمله ایهایی بر حسب t از درجه $(n-1)$ جایگزین کرد، که در آن n چندگانگی ریشه p^2 است. عبارات حاصله باید در معادلات (۱۲-۱۰۳) جایگزین شوند، تا $2Nn$ رابطه بین $2Nn$ ضریب در $2N$ چند جمله ای بدهند. می توان نشان داد که این روابط درست n ضریب دلخواه به جای می گذارند و لذا تعداد صحیح ثابتهای دلخواه در دست است. به طریق دیگر، می توانیم ضرایب معادلات هامیلتون (۱۲-۱۰۱) را کمی تغییر دهیم تا چندگانگی

۱. برای بحث بیشتر مسائل ارتعاشات کوچک به فصل ششم کتاب زیر مراجعه کنید:

E. J. Routh, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Advanced Part. New York: Dover Publications, 1955.

یک روش حل شایسته تر ولی نه به اندازه کافی کامل که در آن از روشهای ماتریس استفاده می شود در کتاب زیر داده شده است:

R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*, New York: McGraw-Hill, 1953.

p^2 از بین برود و جواب را پیدا کنیم و سپس شکل حدی آن را هنگامی که ضرایب به مقادیر اصلی خود نزدیک می‌شوند، بیابیم. (به مسئله ۳۷ فصل ۲ مراجعه کنید). وقتی توانهای t در جواب ظاهر می‌شوند، واضح است که حتی وقتی p^2 حقیقی و مثبت است، جواب پایدار نیست، بلکه نمایشگر نوسانی است که دامنه آن بعد از مدت مدیدی به صورت توانی از t افزایش خواهد یافت. بنابراین به طور کلی در مورد معادلات (۱۲-۱۰۳) چندگانگی بر پایداری دلالت می‌کند. مشاهده خواهیم کرد که ریشه‌های چندگانه معادله (۱۲-۱۰۶) معمولاً مرز بین جوابهای حقیقی و جوابهای مختلط برای p^2 اند، بدین معنی که تغییر کوچکی در ضرایبی مانند a_{kl} ، b_{kl} ، یا c_{kl} چندگانگی را تقسیم می‌کند و بر حسب جهت تغییر، از طرفی به دو جواب حقیقی، یا از طرف دیگر به دو جواب مختلط برای ریشه‌های p^2 منجر می‌شود. این وضع از نظر ریاضی تشابه بسیاری با مسئله نوسانگر هارمونیک میرا دارد، که در آن یک ریشه دوگانه برای p در معادله (۲-۱۲۵) خط تقسیم بین حالات تند میرایی و کند میرایی است و به جوابهای خطی بر حسب t منجر می‌شود. در حالت فعلی، هیچ‌گونه میرایی وجود ندارد. معادله (۱۲-۱۰۶) فقط شامل توانهای زوج p است و اگر ریشه‌های مختلط مزدوج برای p^2 پیدا شود، در این صورت چهار ریشه مربوطه p به شکل $\pm \gamma \pm i\omega$ اند و بعضی از جوابها به طور نمایی افزایش می‌یابند. بنابراین ریشه‌های چندگانه، مرز بین حالات پایدار و ناپایدارند. در مورد معادلات (۱۲-۲۰) که در آن نیروها وابسته به سرعت نیستند، مرز بین پایداری و ناپایداری فقط هنگامی رخ می‌دهد که ریشه‌ای از p^2 صفر باشد. ریشه‌های منفی چندگانه برای p^2 همیشه به جوابهای پایدار مربوط می‌شوند.

باید متذکر شویم که حتی وقتی ریشه‌های p^2 همه منفی و متفاوت‌اند، و در نتیجه جوابهای معادلات (۱۲-۱۰۳) همه پایدارند، نمی‌توانیم تضمین کنیم که جوابهای دقیق معادلات غیرخطی که از معادله هامیلتونی کامل (۱۲-۹۷) نتیجه می‌شوند، همه پایدارند. برای ارتعاشات حول نقطه تعادل وقتی نیروها، از انرژی پتانسیل به دست می‌آیند، قادر بودیم ثابت کنیم که جوابهای پایدار معادلات خطی شده فقط در اطراف یک پتانسیل حداقل به دست می‌آیند، و در آن حالت اگر دامنه به اندازه کافی کوچک باشد، جوابها به طور مطلق پایدارند. در بالا مشاهده کردیم که اگر تابع هامیلتونی H در نزدیکی حرکت پاینده، مثبت (یا منفی) معین باشد، در این صورت نیز می‌توانیم نشان دهیم که جوابها پایدارند. ولی جوابهای معادلات (۱۲-۱۰۳) حتی وقتی H مثبت یا منفی معین نباشد، ممکن است همه پایدار باشند. در آن حالت تنها چیزی که می‌توانیم بگوییم این است که برای هر مدت زمانی که مایل باشیم، اگر با دامنه‌های به اندازه کافی کوچک شروع کنیم، جوابهای مسئله مورد نظر که به وسیله تابع هامیلتونی (۱۲-۹۷) داده می‌شود، به طور تقریب همان جوابهای مسئله خطی شده‌ای خواهند بود که به وسیله تابع هامیلتونی (۱۲-۱۰۱) داده می‌شود. این صحیح است زیرا با کوچک کردن دامنه به اندازه کافی، می‌توانیم عبارات غیرخطی را به اندازه دلخواه کوچک کنیم و اثر آنها روی حرکت فقط هنگامی می‌تواند قابل ملاحظه باشد که آنها روی یک زمان خیلی طولانی انتگرالگیری شوند. مع هذا اگر از عبارات غیرخطی صرف نظر کنیم، نمی‌توانیم مدعی پایداری کامل برای تمام مدت باشیم. در واقع حالاتی شناخته شده‌اند که در آنها جوابهای خطی پایدارند و با این همه از هر فاصله‌ای نسبت به حرکت پاینده نیز شروع کنیم، جواب دقیق به مقدار بسیار زیادی از

حرکت دائم منحرف می‌شود. یافتن ضوابط و معیارهایی برای تعیین پایداری نهایی در حالت کلی شاید برجسته‌ترین مسئله حل نشده مکانیک کلاسیک باشد.^۱

۷-۱۲ نوسانهای بتاترون در یک شتاب‌دهنده

در یک دستگاه شتاب‌دهنده دایره‌ای شکل ذره مثلاً سیکلوترون، بتاترون، یا سینکروترون، ذرات باردار در یک میدان مغناطیسی می‌گردند که آنها را ضمن شتاباندن در فضای خلأ دایره‌ای شکلی، نگه می‌دارد. چون ذرات ضمن شتاب‌دار شدن چندین بار می‌گردند، ثابت مدار دارای اهمیت اساسی است. چون ذره در هر گردش فقط نمو انرژی کمی به دست می‌آورد، می‌توانیم ابتدا پایداری مدارها در انرژی ثابت را بررسی کنیم، و سپس خود عمل شتاباندن را به‌طور جداگانه در نظر بگیریم. ما در اینجا فقط مسئله پایداری در انرژی ثابت E را در نظر خواهیم گرفت. فرض می‌کنیم که میدان مغناطیسی حول محور قائمی متقارن است و در نتیجه با استفاده از مختصات استوانه‌ای (شکل ۳-۲۲) می‌توانیم بنویسیم

$$B(\rho, \varphi, z) = B_z(\rho, z)\hat{z} + B_\rho(\rho, z)\hat{\rho}. \quad (111-12)$$

میدان مغناطیسی در سینکروترون یا بتاترون نیز تابعی از زمان است و با افزایش انرژی، افزایش می‌یابد ولی چون E را ثابت در نظر می‌گیریم، B را هم ثابت تلقی می‌کنیم. فرض خواهیم کرد که در صفحه منصف $z = 0$ ، میدان به تمامی قائم باشد:

$$B(\rho, \varphi, 0) = B_z(\rho)\hat{z}. \quad (112-12)$$

ذره‌ای با انرژی مناسب E می‌تواند در دایره‌ای به شعاع ثابت $\rho = a(E)$ حرکت کند. این مدار را مدار تعادل می‌نامیم. پایداری این مدار مورد توجه ماست، یعنی می‌خواهیم بدانیم که آیا ذرات نزدیک این مدار ارتعاشات کوچکی حول آن انجام می‌دهند، یا نمی‌دهند. چنین ارتعاشات را نوسانهای بتاترون می‌نامند زیرا این نظریه ابتدا برای بتاترون به دست آمد.

پتانسیل برداری (بخش ۹-۸) برای یک میدان مغناطیسی متقارن حول محور z را می‌توان کاملاً در جهت φ گرفت:

$$A = A_\varphi(\rho, z)\hat{\varphi}, \quad (113-12)$$

و از اینجا

$$B = \nabla \times A = \left(\hat{z} \frac{\partial}{\partial z} + \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \times \hat{\varphi} A_\varphi(\rho, z) \\ = \hat{z} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \hat{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \quad (114-12)$$

از معادله (۱۱۴-۱۲) مشاهده می‌کنیم که A به وسیله رابطه زیر داده می‌شود،

$$A_\varphi(\rho, z) = \rho^{-1} \int^{\rho} \rho B_z(\rho, z) d\rho, \quad (115-12)$$

زیرا به علت ابهام در جهت $\hat{\varphi}$ ، A_φ باید به ازای $\rho = 0$ صفر شود. توجه کنید که $2\pi\rho A_\varphi$ شار مغناطیسی است که از دایره‌ای به شعاع ρ می‌گذرد.

۱. وی. آی. آرنولد (V. I. Arnold, *Soviet Math.* 2, 247, 1961) نشان داده است که برای $N \leq 2$ ، به مفهوم خاصی، در تقریباً تمام حالات، وقتی معادلات خطی (۱۲-۱۰۳) پایدار هستند، معادلات غیرخطی کامل هم دارای جوابهای پایدار برای حرکاتی هستند که به اندازه کافی نزدیک به حرکت پایا است.

تابع لاگرانژی به وسیله معادلات (۹-۱۵۴) و (۹-۱۶۶) داده می شود:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} \rho \dot{\varphi} A_{\varphi}(\rho, z), \quad (12-116)$$

که در آن e و m به ترتیب بار و جرم ذره ای هستند که باید شتابانده شود. اگر سرعت ذره با تندی نور قابل مقایسه باشد، یعنی اگر انرژی جنبشی با mc^2 قابل مقایسه یا بزرگتر از آن باشد، باید از شکل نسبیتی تابع لاگرانژی (مسئله ۲۳ فصل ۹) استفاده شود. اندازه های حرکت عبارت اند از

$$\begin{aligned} p_{\rho} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho}, \\ p_{\varphi} &= m \rho^2 \dot{\varphi} + \frac{e}{c} \rho A_{\varphi}, \\ p_z &= m \dot{z}. \end{aligned} \quad (12-117)$$

تابع هامیلتون به وسیله معادله (۹-۱۹۶) یا (۹-۲۰۰) داده می شود:

$$H = \frac{p_{\rho}^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{[p_{\varphi} - (e/c)\rho A_{\varphi}]^2}{2m\rho^2}. \quad (12-118)$$

مشاهده می کنیم که φ قابل اغماض است و p_{φ} ممکن است به صورت یک ثابت داده شده در نظر گرفته شود. در این صورت تابع هامیلتون به شکل زیر است:

$$H = 'T' + 'V', \quad (12-119)$$

که در آن

$$'T' = \frac{p_{\rho}^2 + p_z^2}{2m} = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2), \quad (12-120)$$

$$'V' = \frac{[p_{\varphi} - (e/c)\rho A_{\varphi}]^2}{2m\rho^2}. \quad (12-121)$$

مسئله به مسئله معادلی در تعادل استاتیکی تبدیل می شود. حرکت های پاینده به وسیله جواب های ρ و z معادلات زیر داده می شوند

$$\frac{\partial 'V'}{\partial z} = \frac{e}{c} \rho \dot{\varphi} B_{\rho} = 0, \quad (12-122)$$

$$\frac{\partial 'V'}{\partial \rho} = -\rho \dot{\varphi} \left(m \dot{\varphi} + \frac{e}{c} B_z \right) = 0, \quad (12-123)$$

که در آن از معادلات (۱۲-۱۱۷) و (۱۲-۱۱۴) استفاده کرده ایم. اولین معادله فوق در صفحه منصف $z = 0$ برقرار است و معمولاً نه جای دیگری ($\rho \dot{\varphi} \neq 0$). معادله دوم به معادله زیر منجر می شود.

$$\dot{\varphi} = -\frac{e}{mc} B_z(\rho), \quad (12-124)$$

که با معادله (۳-۲۹۹) معادل است. می توانیم ρ را از معادله (۱۲-۱۲۴) با در دست داشتن $\dot{\varphi}$ یا $\dot{\varphi}$ را به ازای $\rho = a$ (شعاع مدار تعادل) به دست آوریم. توجه کنید که انرژی $\frac{1}{2} m a^2 \dot{\varphi}^2$ ذره ای که حرکت آن پاینده است، کمتر از انرژی کل H ذره ای است که حرکتش را مطالعه می کنیم، لکن اختلاف برای ارتعاشات نزدیک به حرکت پاینده در کمیت های کوچک از مرتبه دوم است. طبق مطالب بخش قبلی، دو ذره باید چنان اختیار شوند که دارای p_{φ} یکسان باشند.

اکنون فرض می‌کنیم

$$\rho = a + x, \quad (12-125)$$

که در آن a شعاع مدار حرکت پاینده است. سپس به وسیله بسط بر حسب توانهای x ، z ، \dot{x} ، \dot{z} داریم،

$$'T' = \frac{1}{\gamma} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2), \quad (12-126)$$

$$'V' = \frac{1}{\gamma} m \omega^2 (1-n)x^2 + \frac{1}{\gamma} m \omega^2 n z^2, \quad (12-127)$$

که در آن

$$\omega = \dot{\phi} = -\frac{e B_z \cdot (a)}{m c}, \quad (12-128)$$

$$n = -\left(\frac{a}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right)_{z=0, \rho=a}, \quad (12-129)$$

و از معادلات (۱۲-۱۱۴)، (۱۲-۱۱۷)، و (۱۲-۱۲۴) و معادله زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = \frac{\partial B_\rho}{\partial z}, \quad (12-130)$$

معادله فوق از این حقیقت ناشی می‌شود که

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (12-131)$$

همان‌طور که از معادله (۹-۱۶۲) نیز مشهود است، کمیت n را شاخص میدان می‌نامند. بی‌درنگ مشاهده می‌کنیم که حرکت فقط در صورتی پایدار است که

$$0 < n < 1. \quad (12-132)$$

در یک سیکلوترون میدان در مرکز تقریباً ثابت است و در نتیجه $n \ll 1$ است و سپس در نزدیکی لبه خارجی آهتر با به تندی کاهش می‌یابد. در یک بتاترون یا سینکروترون، میدان مغناطیسی دارای n ثابتی است و به تدریج که ذرات شتابانده می‌شوند، مقدار B افزایش می‌یابد تا a را ثابت نگه دارد. از معادله (۱۲-۱۲۹) نتیجه می‌شود که وقتی B_z افزایش می‌یابد، مقدار n تغییر نمی‌کند، البته به شرط آنکه شکل میدان مغناطیسی به صورت تابعی از شعاع تغییر نکند، یعنی به شرط آنکه $\partial B_z / \partial z$ متناسب با B_z افزایش یابد.

چون متغیرهای x و z در $'T'$ و $'V'$ از هم جدا می‌شوند، بی‌درنگ می‌توانیم فرکانسهای نوسان بتاترون را بنویسیم. راحت‌تر است که آنها را بر حسب تعداد نوسانهای بتاترون در هر گردش ν_x و ν_z بیان کنیم:

$$\nu_x = \frac{\omega_x}{\omega} = (1-n)^{1/2}, \quad (12-133)$$

$$\nu_z = \frac{\omega_z}{\omega} = n^{1/2}.$$

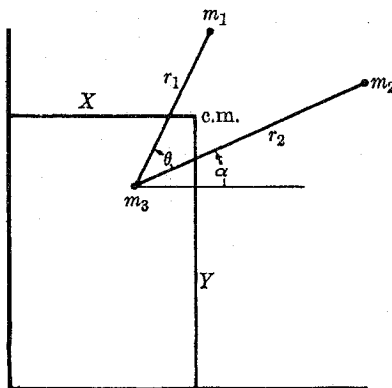
اگر در شتاب‌دهنده نواقصی وجود داشته باشد، به طوری که B_z مستقل از ϕ نباشد، در این صورت اختلاف بین B_z و مقدار متوسط‌اش باعث یک نیروی متناوب می‌شود که بر مختصه x وارد

می‌گردد. اختلال حاصله مدار را می‌توان به کمک حل معادلات نوسانگر هارمونیک واداشته مربوط به آن به‌دست آورد. اگر B_p در همه جای صفحه منصف ($z = 0$) صفر نباشد، نیروهای قائمی اعمال خواهند شد که باعث نوسانهای قائم بتاترون می‌شوند. در حالت کلی این گونه نواقص شتاب‌دهنده به تغییرات شاخص میدان n نیز منجر می‌شود. و در نتیجه $n = n(\varphi)$ می‌شود، و n برای حرکت دائم یک تابع متناوب از زمان می‌گردد. در شتاب‌دهنده‌های گرادیان متغیر، شاخص میدان n به‌عمد بر حسب زاویه سمتی φ به‌طور متناوب تغییر داده می‌شود. حل این مسئله دشوارتر از آن است که در اینجا آورده شود.

۱۲-۸ پایداری سه جسم لاگرانژ

یک جواب خاص مسئله سه جسم که تحت تأثیر جاذبه ثقل متقابل‌شان حرکت می‌کنند، به‌وسیله لاگرانژ کشف شد. این جواب حرکتی دائمی است که در آن سه جرم همان‌طور که حول مرکز جرم مشترک‌شان گردش می‌کنند، در رئوس مثلثی متساوی‌الاضلاع باقی می‌مانند. مایل‌ایم که پایداری این حرکت پاینده را تحقیق کنیم. این مسئله در واقع مثالی از یک گروه مسائل نسبتاً کلی در مکانیک آسمانی، در مبحث پایداری جوابهای خاص معادلات حرکت است. وقتی جواب خاص حرکتی دائم است، مسئله را می‌توان به کمک روش بخش ۱۲-۶ حل کرد.

اگر حرکتی را که فقط به یک صفحه محدود دند در نظر بگیریم، مسئله ساده خواهد شد. در این صورت شش مختصه، یعنی دو مختصه برای هر ذره وجود خواهد داشت. یک بررسی کوچک نشان می‌دهد که سه مختصه قابل‌اغماض وجود دارد. دو تا از آنها نمایشگر انتقالات صلب سه ذره‌اند و می‌توان آنها را مختصات دکارتی مرکز جرم دانست. اندازه‌های حرکت ثابت مربوط به آن، مؤلفه‌های اندازه حرکت خطی کل‌اند. سومین مختصه قابل‌اغماض نمایشگر یک دوران صلب سه ذره حول مرکز جرم است. اندازه حرکت ثابت مربوط به آن، همان اندازه حرکت زاویه‌ای کل است. سه مختصه غیرقابل‌اغماض باقیمانده مکانهای نسبی سه ذره نسبت به یکدیگر را تصریح می‌کنند، این مختصات باید در یک حرکت پاینده، ثابت باشند. بنابراین هر حرکت پاینده باید یک انتقال و دوران



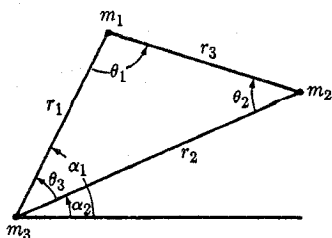
شکل ۱۲-۱ مختصات مسئله سه جسم.

صلب دستگاه سه جسم باشد. به عنوان مثال می توانیم مختصات را مانند شکل ۱۲-۱ انتخاب کنیم. در اینجا X و Y مختصات مرکز جرم اند، و تغییر α در صورتی که باقی مختصات ثابت نگه داشته شوند، نمایشگر یک دوران تمامی دستگاه حول مرکز جرم است و r_1, r_2, θ شکل و اندازه مثلثی را تعیین می کنند که به وسیله سه جرم m_1, m_2, m_3 به وجود آمده است. انتظار داریم که سه وجه طبیعی ارتعاش r_1, r_2, θ را حول مقادیر پاینده شان پیدا کنیم. اگر احتمالاً هر یک از مختصات قابل اغماض را نادیده گرفتیم، در این صورت فقط آن حرکت های دائمی را به دست خواهیم آورد که در آنها آن مختصه ثابت است. در این صورت مختصه قابل اغماض به صورت ریشه صفر ($p^2 = 0$) معادله ویژه (۱۲-۱۰۶) ظاهر خواهد شد.

بنا به معادله (۴-۱۲۷) انرژی جنبشی به دو قسمت تقسیم خواهد شد، یک قسمت به X و Y و قسمت دیگر به r_1, r_2, θ, α بستگی خواهد داشت. انرژی پتانسیل فقط به r_1, r_2, θ بستگی دارد. در این صورت مختصات X و Y بر r_1, r_2, θ, α عمودند و حرکت مرکز جرم از مسئله جدا می شود. انرژی مرکز جرم

$$T_{c.m.} = \frac{1}{2} M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) = \frac{1}{2M} (p_X^2 + p_Y^2), \quad M = m_1 + m_2 + m_3, \quad (12-134)$$

ثابت است و می توان آن را از تابع هامیلتون حذف کرد. مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می کند و ما می توانیم حرکت را جداگانه نسبت به مرکز جرم بررسی کنیم. واضح است که مختصه قابل اغماض α بر θ عمود نیست، زیرا سرعت زاویه ای m_1 شامل $(\dot{\theta} + \dot{\alpha})$ است و مربع این کمیت در انرژی جنبشی ظاهر می شود. این نتیجه تصادفی انتخاب مختصات نیست، بلکه نتیجه ای ضمنی از این حقیقت است که دوران کلی دستگاه بر حرکت «داخلی» که به وسیله r_1, r_2, θ توصیف می شود، اثر می گذارد. تمرین جبری ساده ای است که انرژی جنبشی را بر حسب r_1, r_2, θ, α بنویسیم و اندازه های حرکت $P_\alpha, P_\theta, P_{r_1}, P_{r_2}$ را پیدا کنیم و تابع هامیلتون را تشکیل دهیم و حرکت های پاینده را بیابیم و روش بخش ۱۲-۶ را دنبال کنیم تا معادله ویژه (۱۲-۱۰۶) به دست آید و آن معادله درجه سوم از p^2 خواهد بود که ریشه هایش نوع انحرافات کوچک از حرکت پاینده را معین می کند. مع هذا همان طور که خواننده ممکن است تحقیق کند، این روش بسیار پرکار است. جالب این است که به این نتیجه می رسیم که یک روش کم زحمت تر برای پیدا کردن جواب واقعی این است که از پیروی دقیق از روش هامیلتون - لاگرانژ صرف نظر کنیم و معادلات حرکت را از اصول اولیه نتیجه بگیریم.



البته هنوز به نتایج نکات کلی فوق به عنوان راهنما احتیاج خواهیم داشت. هنوز هم عملیات جبری بسیاری وجود دارد به طوری که اشتباهات جبری هنوز به احتمال بسیار رخ می دهند. لذا بهتر است به جای مختصات θ و α از مختصات α_1 و α_2 مطابق شکل ۱۲-۲ استفاده کنیم تا یک تقارن جبری بین ذرات m_1 و m_2 پدید آید. این کار عملیات جبری لازم را کاهش می دهد و آزمونی برای نتایج فراهم می آورد، زیرا فرمولهای ما باید تقارن مناسب بین علائم اندیسی «۱» و «۲» را نشان دهند. اکنون α_1 و α_2 هیچ کدام قابل اغماض نیستند و مشاهده می کنیم که دیگر مختصه قابل اغماض به طور صریح ظاهر نمی شود. در هر حال نمی توانستیم از خاصیت قابل اغماض بودن مختصه استفاده کنیم، زیرا تصمیم نداریم که معادلات را به شکل تابع هامیلتون بنویسیم. معادله ویژه ما بر حسب p^2 از مرتبه چهار خواهد بود، ولی می دانیم که یکی از ریشه های آن $p^2 = 0$ خواهد بود و می توانیم از آن فاکتورگیری کنیم. همچنین در شکل ۱۲-۲ چند متغیر کمکی $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ و θ_4 نشان می دهیم که مورد احتیاج است.

معادلات حرکت m_1 را بر حسب مؤلفه های خواهیم نوشت که به طور شعاعی از m_2 به طرف خارج متوجه و بر شعاع r_1 عمود است. در به کار بردن مستقیم قوانین حرکت نیوتن، باید تمام شتابها را نسبت به یک دستگاه مختصات ساکن در نظر بگیریم. شتاب m_1 برابر مجموع شتابش نسبت به m_2 و شتاب m_2 است. شتاب m_2 را می توان با به کار بردن قانون حرکت نیوتن برای m_2 که به وسیله m_1 و m_2 جذب می شود، پیدا کرد. نیروی وارد بر m_1 نیروی ثقل m_2 و m_3 است. بنابراین در جهت شعاعی داریم،

$$m_1 \left(\ddot{r}_1 - r_1 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_1 G}{r_1^2} + \frac{m_2 G}{r_2^2} \cos \theta_3 \right) = - \frac{m_1 m_2 G}{r_2^2} - \frac{m_1 m_3 G}{r_3^2} \cos \theta_1. \quad (12-135)$$

معادله مربوط به حرکت m_1 عمود بر r_1 عبارت است از

$$m_1 \left(r_1 \ddot{\alpha}_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\alpha}_1 - \frac{m_2 G}{r_2^2} \sin \theta_3 \right) = - \frac{m_1 m_2 G}{r_2^2} \sin \theta_1. \quad (12-136)$$

برای حرکت m_2 نیز می توان دو معادله مشابه نوشت. چهار معادله را می توان به سادگی به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 - r_1 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{(m_1 + m_2) G}{r_1^2} + \frac{m_2 G}{r_2^2} \cos \theta_3 + \frac{m_3 G}{r_3^2} \cos \theta_1 &= 0, \\ \ddot{r}_2 - r_2 \dot{\alpha}_2^2 + \frac{(m_2 + m_3) G}{r_2^2} + \frac{m_1 G}{r_1^2} \cos \theta_3 + \frac{m_3 G}{r_3^2} \cos \theta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (12-137)$$

$$r_1 \ddot{\alpha}_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\alpha}_1 - \frac{m_2 G}{r_2^2} \sin \theta_3 + \frac{m_3 G}{r_3^2} \sin \theta_1 = 0,$$

$$r_2 \ddot{\alpha}_2 + 2\dot{r}_2 \dot{\alpha}_2 + \frac{m_1 G}{r_1^2} \sin \theta_3 - \frac{m_3 G}{r_3^2} \sin \theta_2 = 0.$$

تقارن جبری بین علائم اندیسی «۱» و «۲» در معادلات فوق نشان داده شده است. (توجه کنید که $\alpha_1 - \alpha_2 = \theta_3$ و اگر دو ذره را با یکدیگر عوض کنیم، علامتش تغییر می کند) با استفاده از قوانین سینوس و کسینوس برای مثلث، می توان متغیرهای کمکی $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ را بر حسب r_1, r_2, α_1 و α_2 بیان داشت.

اکنون می‌بینیم که چرا آسان‌تر است که قوانین نیوتن را به‌طور مستقیم به کار ببریم. می‌توانیم به‌سادگی شتاب m_p را بر حسب نیروهای ثقل وارد بر m_p بیان کنیم. در طرز بیان ریاضی تابع لاگرانژ معادلات مربوطه برای $r_1, r_2, r_3, \alpha_1, \alpha_2$ باید عباراتی که نمایشگر شتاب m_p اند، به‌طور سینماتیکی، یعنی بر حسب مختصات و سرعتها و شتابهای m_1 و m_p بیان شوند، زیرا آنها از طریق مشتق‌گیری از انرژی جنبشی T در مختصات تعمیم یافته به‌دست آمده‌اند. این خیلی پیچیده است و به‌طور صریح شامل مکان مرکز جرم نسبت به m_1, m_p, m_p می‌شود، که در این طرز بیان ریاضی فعلی احتیاجی بدان نداریم: معادلات حاصل با معادلات (۱۲-۱۳۷) معادل، ولی از نظر شکل خیلی پیچیده‌ترند. البته یک دلیل برای سادگی معادلات (۱۲-۱۳۷) استفاده از متغیرهای کمکی $\theta_1, \theta_2, \theta_3, r_3$ است. در نحوه بیان ریاضی لاگرانژ باید از چنین متغیرهای کمکی نسبت به r_1, r_2, r_3, α_1 و α_2 مشتق گرفت تا بتوان معادلات حرکت را نوشت.

ابتدا درصدد پیدا کردن حرکت‌های پاینده برمی‌آییم. از بحث اولیه خود می‌دانیم که یک حرکت پاینده فقط ممکن است یک دوران صلب حول مرکز جرم (به اضافه یک انتقال یکنواخت) باشد. بنابراین $r_1, r_2, r_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ را ثابت می‌گیریم و فرض می‌کنیم که

$$\alpha_2 = \omega t, \quad \alpha_1 = \omega t + \theta_3. \quad (12-138)$$

اگر مشتق‌های مربوط را از این روابط به‌دست آوریم و در آخرین معادله از معادلات (۱۲-۱۳۷) جایگزین کنیم، داریم،

$$\frac{1}{r_1^2} \sin \theta_2 = \frac{1}{r_2^2} \sin \theta_3. \quad (12-139)$$

از قانون سینوسها نتیجه می‌شود

$$\frac{r_1}{\sin \theta_2} = \frac{r_2}{\sin \theta_3}, \quad (12-140)$$

بجز در مواردی که $\sin \theta_2 = \sin \theta_3 = 0$ ، داریم،

$$r_1^2 = r_2^2. \quad (12-141)$$

به همین ترتیب از معادله سوم معادلات (۱۲-۱۳۷) نتیجه می‌گیریم که بجز در مواردی که $\sin \theta_2 = \sin \theta_1 = 0, r_2 = r_3$ ، بنابراین می‌توانیم روابط زیر را بنویسیم:

$$r_1 = r_2 = r_3 = a, \quad (12-142)$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}.$$

تنها حرکت پاینده ممکن (مگر آن که اجرام در یک خط مستقیم قرار گیرند)، حرکتی است که در آن سه جرم در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته باشند. هنوز باید نشان دهیم که دو معادله اول از معادلات (۱۲-۱۳۷) برقرارند. شرط برقراری آنها این است که

$$\omega^2 = \frac{MG}{a^3}, \quad (12-143)$$

که در آن M جرم کل است. این جواب خاص مسئله سه جسم است که توسط لاگرانژ به‌دست آمد. حالتی که در آن سه جرم روی یک خط مستقیم قرار می‌گیرند به‌عنوان تمرین به‌عهده خواننده گذاشته می‌شود.

اکنون برای حرکت‌های نزدیک به حرکت پاینده، جواب‌هایی جستجو می‌کنیم. فرض می‌کنیم

$$r_1 = a + x_1, \quad r_2 = a + x_2, \quad (144-12)$$

$$\alpha_1 = \omega t + \frac{1}{3}\pi + \varepsilon_1, \quad \alpha_2 = \omega t + \varepsilon_2,$$

که در آن x_1, x_2, ε_1 و ε_2 چهار متغیر مستقل جدید باشند که ما آنها را کوچک در نظر می‌گیریم. روابط فوق را در معادلات (۱۲-۱۳۷) جایگزین می‌کنیم و فقط جملات خطی را نگه می‌داریم. ابتدا

$$\theta_3 = \frac{1}{3}\pi + \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad (145-12)$$

را محاسبه می‌کنیم و از قانون کسینوسها تا مرتبه اول نتیجه می‌شود

$$r_3^2 = a^2 \left[1 + \frac{x_1 + x_2}{a} + \sqrt{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right]. \quad (146-12)$$

اکنون، از قانون سینوسها نتیجه می‌گیریم

$$\sin \theta_1 = \frac{r_2}{r_3} \sin \theta_3; \quad (147-12)$$

بنابراین تا مرتبه اول،

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{1}{3}\sqrt{3} \frac{x_1 - x_2}{a}, \quad (148-12)$$

و به همین ترتیب،

$$\theta_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1}{3}\sqrt{3} \frac{x_1 - x_2}{a}. \quad (149-12)$$

به‌عنوان امتحان توجه کنید که $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$ و اکنون می‌توانیم معادلات فوق را در معادلات (۱۲-۱۳۷) جایگزین کنیم و تا مرتبه اول چنین می‌شوند.

$$\ddot{x}_1 + 2a\omega \dot{\varepsilon}_1 - \left(\omega^2 + \frac{2m_1 + 2m_3 - (1/4)m_2}{a^3} G \right) x_1 - \frac{9m_2 G}{4a^3} x_2 - \frac{3\sqrt{3}m_2 G}{4a^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0,$$

$$\ddot{x}_2 - 2a\omega \dot{\varepsilon}_2 - \left(\omega^2 + \frac{2m_2 + 2m_3 - (1/4)m_1}{a^3} G \right) x_2 - \frac{9m_1 G}{4a^3} x_1 - \frac{3\sqrt{3}m_1 G}{4a^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0,$$

$$a\ddot{\varepsilon}_1 + 2\omega \dot{x}_1 - \frac{3\sqrt{3}m_2 G}{4a^3} (x_1 - x_2) - \frac{9m_2 G}{4a^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0,$$

$$a\ddot{\varepsilon}_2 + 2\omega \dot{x}_2 - \frac{3\sqrt{3}m_1 G}{4a^3} (x_1 - x_2) - \frac{9m_1 G}{4a^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0. \quad (150-12)$$

توجه کنید که دومین و چهارمین معادله را می‌توان از اولین و سومین معادله به‌وسیله تعویض «۱» و «۲» و معکوس کردن علامتهای α_1, α_2 و ω به‌دست آورد. این تقارن از انتخاب مختصات در شکل ۱۲-۲ نتیجه می‌شود.

یک وجه طبیعی را می‌توان با قرار دادن

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 e^{pt}, & x_2 &= X_2 e^{pt}, \\ \varepsilon_1 &= E_1 e^{pt}, & \varepsilon_2 &= E_2 e^{pt}. \end{aligned} \quad (151-12)$$

به‌دست آورد. برای سهولت فرض می‌کنیم که

$$p = (G/a^3)^{1/2} P. \quad (152-12)$$

اگر معادلات (۱۲-۱۵۱) را در معادلات (۱۲-۱۵۰) جایگزین کنیم و از معادله (۱۲-۱۴۳) استفاده کنیم، داریم،

$$\begin{aligned} & \left(P^2 - 3M + \frac{9}{4}m_r \right) \frac{X_1}{a} - \frac{9}{4}m_r \frac{X_2}{a} - \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_r + 2M^{1/2}P \right) E_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_r E_2 = 0, \\ & -\frac{9}{4}m_1 \frac{X_1}{a} + \left(P^2 - 3M + \frac{9}{4}m_1 \right) \frac{X_2}{a} - \frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 E_1 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 - 2M^{1/2}P \right) E_2 = 0, \\ & \left(2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}m_r \right) \frac{X_1}{a} + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_r \frac{X_2}{a} + \left(P^2 - \frac{9}{4}m_r \right) E_1 + \frac{9}{4}m_r E_2 = 0, \\ & -\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \frac{X_1}{a} + \left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \right) \frac{X_2}{a} + \frac{9}{4}m_1 E_1 + \left(P^2 - \frac{9}{4}m_1 \right) E_2 = 0. \end{aligned} \quad (12-153)$$

دترمینان ویژه عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} \left(P^2 - 3M + \frac{9}{4}m_r \right) & \left(-\frac{9}{4}m_r \right) & -\left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_r \right) & \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_r \right) \\ \left(-\frac{9}{4}m_1 \right) & \left(P^2 - 3M + \frac{9}{4}m_1 \right) & -\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \right) & -\left(2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \right) \\ \left(2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}m_r \right) & \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_r \right) & \left(P^2 - \frac{9}{4}m_r \right) & \left(\frac{9}{4}m_r \right) \\ -\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \right) & \left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \right) & \left(\frac{9}{4}m_1 \right) & \left(P^2 - \frac{9}{4}m_1 \right) \end{vmatrix} = 0.$$

(۱۲-۱۵۴)

از ملاحظات قبل می‌دانیم که این دترمینان باید معادله درجه چهارمی از P^2 باشد که یکی از ریشه‌های آن $P^2 = 0$ این حقیقت، همراه با تقارنهایی که در ضرایب وجود دارند، ما را تشویق می‌کند که سعی کنیم بسط دترمینان فوق را ساده کنیم و از P^2 فاکتور بگیریم. ستون دوم را به اول و سوم را به چهارم اضافه می‌کنیم و سپس سطر اول را از سطر دوم و سطر سوم را از سطر چهارم کم می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} \left(P^2 - 3M \right) & \left(-\frac{9}{4}m_r \right) & -\left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_r \right) & -\left(2M^{1/2}P \right) \\ \cdot & \left[P^2 - 3M + \frac{9}{4}(m_1 + m_r) \right] & \left[2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_r) \right] & \cdot \\ \left(2M^{1/2}P \right) & \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_r \right) & \left(P^2 - \frac{9}{4}m_r \right) & P^2 \\ \cdot & \left[2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_r) \right] & -\left[P^2 - \frac{9}{4}(m_1 + m_r) \right] & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

(۱۲-۱۵۵)

در ستون آخر از p فاکتور می‌گیریم و سپس ستون آخر را در $\sqrt{2}M^{1/2}$ ضرب و از ستون اول کم می‌کنیم. در این صورت می‌توان از ستون اول از p فاکتور گرفت و در نتیجه خواهیم داشت

$$P^2 \begin{vmatrix} P & \left(-\frac{9}{4}m_1\right) & -\left(\sqrt{2}M^{1/2}P + \frac{\sqrt{3}\sqrt{V}}{4}m_1\right) & -(\sqrt{2}M^{1/2}) \\ \cdot & \left[P^2 - \sqrt{2}M + \frac{9}{4}(m_1 + m_1)\right] & \left[\sqrt{2}M^{1/2}P - \frac{\sqrt{3}\sqrt{V}}{4}(m_1 - m_1)\right] & \cdot \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}M^{1/2}\right) & \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{V}}{4}m_1\right) & \left(P^2 - \frac{9}{4}m_1\right) & P \\ \cdot & \left[\sqrt{2}M^{1/2}P + \frac{\sqrt{3}\sqrt{V}}{4}(m_1 - m_1)\right] & -\left[P^2 - \frac{9}{4}(m_1 + m_1)\right] & \cdot \end{vmatrix} = 0 \quad (156-12)$$

اکنون فاکتور P^2 واضح است. برای ساده کردن بسط دترمینان، سطر سوم را در $\sqrt{2}PM^{-1/2}$ ضرب، و از سطر اول کم می‌کنیم:

$$P^2 \begin{vmatrix} \cdot & * & * & -(\sqrt{2}M^{1/2} + \sqrt{2}PM^{-1/2}) \\ \cdot & \left[P^2 - \sqrt{2}M + \frac{9}{4}(m_1 + m_1)\right] & \left[\sqrt{2}M^{1/2}P - \frac{\sqrt{3}\sqrt{V}}{4}(m_1 - m_1)\right] & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2}}M^{1/2} & * & * & * \\ \cdot & \left[\sqrt{2}M^{1/2}P + \frac{\sqrt{3}\sqrt{V}}{4}(m_1 - m_1)\right] & -\left[P^2 - \frac{9}{4}(m_1 + m_1)\right] & \cdot \end{vmatrix} = 0 \quad (157-12)$$

ستاره‌ها عباراتی را نشان می‌کنند که ما آنها را اینجا نمی‌نویسیم، زیرا در نتیجه، ظاهر نخواهند شد. اکنون می‌توانیم برحسب ستون اول بسط دهیم و دترمینانهای 3×3 حاصل را نسبت به ستون آخر بسط دهیم. نتیجه نهایی عبارت است از:

$$P_2 (M + P^2) \left[P^2 + MP^2 + \frac{\sqrt{2}V}{4}(m_1 m_1 + m_1 m_1 + m_1 m_1) \right] = 0. \quad (158-12)$$

به‌عنوان آزمون صحت عملیات جبری توجه کنید که سه جرم به‌طور متقارن در این معادله ظاهر می‌شوند، همان‌طور که باید چنین می‌شد. این تصادف جالبی است که یک فاکتور اضافی به‌طور صریح ظاهر می‌شود و در نتیجه فقط باید برای به‌دست آوردن P^2 یک معادله درجه دوم را حل کرد. بالاخره چهار ریشه داریم:

$$P^2 = 0, \quad P^2 = -M,$$

$$P^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}M \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[M^2 - \sqrt{2}V(m_1 m_1 + m_1 m_1 + m_1 m_1) \right]^{1/2}. \quad (159-12)$$

همان‌طور که می‌دانیم، ریشه صفر از این حقیقت ناشی می‌شود که مختصه قابل اغماض اضافی وجود دارد. ریشه $P^2 = -M$ به وجه نوسان پایداری منجر می‌شود. دو ریشه آخر برای P^2 هر دو

حقیقی و منفی خواهند بود به شرط آن که،

$$(m_1 + m_p + m_p)^2 > 27(m_1 m_p + m_p m_p + m_p m_1). \quad (12-160)$$

اگر جهت این نامساوی عوض شود، دو ریشه آخر مختلط می شوند و ما چهار مقدار مختلط برای P خواهیم داشت. از این چهار ریشه، دو ریشه به جوابهای نوسانی میرا و دو ریشه دیگر به جوابهای نوسانی ضد میرا منجر می شوند. در حالت حد واسط، وقتی دو طرف نامساوی (۱۲-۱۶۰) مساوی اند، می توان نشان داد که دامنه نوسان به طور خطی در زمان افزایش می یابد. بنابراین وقتی شرط (۱۲-۱۶۰) برقرار نباشد، حرکت لاگرانژی سه جسم ناپایدار است. اگر یکی از اجسام، مثلاً m_1 خیلی کوچکتر از دو تای دیگر باشد، حالت خاص مسئله سه جسم را داریم که در بخش ۷-۶ بررسی گردید و در این صورت شرط پایداری به شرط زیر تبدیل می شود،

$$(m_p + m_p)^2 > 27m_p m_p, \quad (12-161)$$

یا اگر m_p بزرگترین باشد،

$$m_p > 24/96 m_p. \quad (12-162)$$

اگر m_p خورشید و m_p مشتری باشد، این شرط برقرار است. بنابراین اگر از اثرات بقیه سیارات صرف نظر کنیم، حرکتهای پاینده پایداری وجود خواهند داشت که در آنها یک جسم کوچک حول خورشید با همان زمان تناوب مشتری و در رأس یک مثلث متساوی الاضلاع نسبت به خورشید و مشتری گردش خواهد کرد. (دو تا از این مکانها وجود دارد). شبه ستاره های تروژن گروهی از اجسام با زمان تناوب مشتری اند که ظاهراً در این مکان قرار دارند. چون معادله (۱۲-۱۶۱) به وسیله دستگاه ماه-زمین نیز برقرار است، حرکت پاینده ای نظیر یک ماهواره مصنوعی در دستگاه ماه-زمین پایدار است، در نظر گرفتن حرکت عمود بر صفحه حرکت پاینده این نتایج را تغییر نخواهد داد. مع هذا با توجه به تذکری که در انتهای بخش ۱۲-۶ داده شده، نتایج ما در باره پایداری، فقط برای زمانهای تناوب محدود و معتبرند.

حل معادلات (۱۲-۱۵۳) و نیز تعیین نسبتهای متغیرها و در نتیجه الگوی نوسانی هر وجه طبیعی را به عنوان تمرین به عهده خواننده می گذاریم. (مسئله ۳۰ را ببینید). در حل معادلات (۱۲-۱۵۳)، بهتر است که از همان رشته عملیات استفاده شود که ما را از دترمینان (۱۲-۱۵۴) به دترمینان (۱۲-۱۵۷) رسانید. توجه کنید که اضافه کردن یک سطر دترمینان به سطر دیگر به مانند اضافه کردن معادلات مربوطه است. جمع دو ستون نیز به گروه بندی متغیرهای مربوطه مربوط می شود، یعنی معرفی متغیر جدیدی که یک ترکیب خطی از دو متغیر اصلی است.^۲

مسائل

۱. تبدیل به مختصات طبیعی را برای دو نوسانگر جفت شده شکل ۴-۱۰ پیدا کنید.
۲. به وسیله تبدیل از مختصات x_1 و x_2 به مختصات طبیعی با استفاده از روش بخش ۱۲-۳، مسئله ۴۰ فصل ۴ را حل کنید.

1. Trojan

۲. یک بررسی جامع تر و پیشرفته تر مسئله سه جسمی را می توان در کتاب زیر یافت.

C. L. Siegel, *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Berlin: Springer-Verlag, 1956.

۳. جرم m که در فضا حرکت می‌کند تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد که انرژی پتانسیل آن عبارت است از:

$$V = V_0 \exp [(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta yz - \gamma \epsilon y a - \Delta z a) / a^2],$$

که در آن ثابتهای V_0 و a مثبت‌اند. نشان دهید که V دارای یک نقطه می‌نیم است. فرکانسهای طبیعی ارتعاش حول نقطه می‌نیم را پیدا کنید.

۴. جرم m از پایه ثابتی به وسیله فنری با ضریب k به طول آزاد $l = 2mg/k$ آویزان شده است. جرم m دیگری به وسیله فنر مشابهی از جرم m اول آویزان شده است. شش مختصه طبیعی و فرکانسهای مربوطه برای ارتعاش کوچک این دستگاه را نسبت به مکان تعادلش پیدا کنید. هر فنر فقط نیرویی امتداد خط واصل دو انتهایش وارد می‌کند، ولی می‌تواند در انتهایش آزادانه در هر جهتی بچرخد.

۵. یونی به جرم m و به بار q به وسیله نیروی جاذب خطی $F = -kr$ در نقطه A نگه داشته می‌شود، که در آن r فاصله یون از نقطه A است. به همین ترتیب، یون مشابهی به نقطه دوم B در فاصله l از نقطه A محدود شده است. دو یون (در فضای سه بعدی) تحت تأثیر این نیروها و نیروهای دافع الکترواستاتیکی متقابلشان حرکت می‌کنند. وجوه طبیعی ارتعاش را پیدا کنید و عمومی‌ترین جواب برای ارتعاشات کوچک حول نقطه تعادل را بنویسید.

۶. جرم m در شکل ۴-۱۰ تحت تأثیر نیروی $F_y = B \sin \omega t$ قرار می‌گیرد. دستگاه در لحظه $t = 0$ ساکن است. معادله حرکت را به وسیله روش مختصات طبیعی و با استفاده از نتیجه مسئله ۱ پیدا کنید.

۷. یونهای مسئله ۵ تحت تأثیر موج الکترومغناطیسی پلاریزه تابنده‌ای قرار می‌گیرند که بر خط AB عمود است و میدان الکتریکی آن $E \cdot \cos \omega t$ با خط AB زاویه 45° می‌سازد. حرکت حالت پاینده آن را پیدا کنید.

۸. جرم مذکور در مسئله ۳ تحت تأثیر نیروی $F_x = F_y = F_z = Be^{-at}$ قرار می‌گیرد. جواب خاص را پیدا کنید.

۹. تانسورهای B ، M ، و K مسئله ۳۹ فصل ۴ را بنویسید و نشان دهید که هر سه تانسور را می‌توان به‌طور همزمان قطری کرد و سپس مسئله را به وسیله روش مختصات طبیعی حل کنید.

۱۰. اجرام m_1 و m_2 در شکل ۴-۱۰ به ترتیب تحت تأثیر نیروهای اصطکاک $-\gamma m_1 \dot{x}_1$ و $-\gamma m_2 \dot{x}_2$ قرار می‌گیرند. جواب عام را پیدا کنید.

۱۱. فرض کنید که $V^0(x_1, \dots, x_f)$ در نقطه $x_1 = \dots = x_f = 0$ دارای می‌نیم است و تابع $V^1(x_1, \dots, x_f)$ کوچک است، لکن لزومی ندارد که معادله (۱۲-۶۶) برقرار باشد. عبارات تقریبی تا مرتبه اول بر حسب V^1 و مشتقهای آن در $x_1 = \dots = x_f = 0$ برای مختصات x_1^0, \dots, x_f^0 و نقطه تعادل جدید برای $V = V^0 + V^1$ را پیدا کنید. اگر بسط V^0 حول $x_1 = \dots = x_f = 0$ به وسیله معادله (۱۲-۶۷) داده شده باشد (به اضافه عبارات مرتبه بالاتر)، و اگر عبارات درجه دوم در بسط V چنین باشند،

$$V = \sum_{k,l} \frac{1}{\gamma} (K_{kl} + K'_{kl}) y_k y_l,$$

که در آن $y_k = x_k - x_k^0$ است، عبارات تقریبی مرتبه اول برای ضرایب K'_{kl} را به دست آورید.

۱۲. مطلوب است تقریبهای مرتبه دوم برای C'_j و C'_i که تا مرتبه اول به وسیله معادلات (۱۲-۸۰) و (۱۲-۸۳) داده می‌شوند.

۱۳. مطلوب است تقریب مرتبه سوم تصحیح فرکانسی که تا مرتبه دوم به وسیله معادله (۱۲-۹۱) داده می شود.

۱۴. معادلاتی را بنویسید که باید برای به دست آوردن تقریب مرتبه اول در حالتی که شرایط (۱۲-۸۷) برای گروهی از چهار وجه نزدیک برقرار نیستند، حل شوند (یعنی حالت چندگانگی تقریب).

۱۵. یک آونگ سه گانه از یک جرم M که به وسیله ریسمانی به طول l از پایه ثابتی آویزان شده تشکیل شده است. جرم m به وسیله ریسمانی به طول l از M آویزان می شود و جرم سوم m به وسیله ریسمان سومی به طول l از این جرم دوم آویزان می شود. اجرام همگی در یک صفحه قائم نوسان می کنند. معادلات ارتعاشات کوچک دستگاه را با استفاده از زوایای θ_1 ، θ_2 ، و θ_3 (به عنوان مختصات) که به وسیله ریسمانها با قائم به وجود می آید، بنویسید. نشان دهید که اگر $M \gg m$ و اگر عبارات مرتبه $(m/M)^{1/2}$ قابل اغماض باشند، مختصات طبیعی را می توان یافت. فرکانسهای طبیعی تقریبی را تا مرتبه m/M پیدا کنید. [راهنمایی. K را به یک تانسور ثابت تبدیل و M را قطری کنید].

۱۶. چهار جرم شکل ۱۲-۳ تحت تأثیر چهار فنر مشابه با ضریب k و فنر ضعیفی با ضریب $k' \ll k$ فقط در امتداد یک خط مستقیم افقی حرکت می کنند. یک جواب تقریبی تا مرتبه اول در k' برای وجوه طبیعی ارتعاش به دست آورید.

۱۷. جواب تقریبی مسئله ۱۶ را در حالتی پیدا کنید که تمام جرمها مساوی اند. آیا نتیجه تقریبی راه حل جدیدی برای حل دقیق مسئله پیشنهاد می کند؟

۱۸. یک بیضوی یکنواخت دوار به جرم M که محور تقارنش دو سوم قطر استوائیش باشد، به وسیله قرار دادن اجرام m ، $2m$ ، $3m$ ، $4m$ ، $5m$ به ترتیب در پیرامون دایره عظیمه آن در نقاطی به فاصله 60° تغییر داده می شود. دو وزنه، هر یک به جرم $4m$ در دو انتهای مخالف قطری قرار گرفته اند که در عرض جغرافیایی جرمهای m ، با محور زاویه 45° تشکیل می دهد. اگر $m \ll M$ ، محوره های اصلی را تا مرتبه اول بر حسب m/M پیدا کنید. [راهنمایی. روش اختلال را که در بخش ۱۲-۵ برای قطری کردن تانسور W به دست آمد، می توان برای قطری کردن تقریبی هر تانسور متقارن $I' + I''$ به شرط معلوم بودن بردارهای مشخصه I'' و کوچک بودن I' ، به کار برد].

۱۹. روش اختلال را در مورد مسئله ریسمانی که چگالی متغیر دارد و در آخرین بند بخش ۹-۹ با فرض $\sigma \ll a$ در نظر گرفته شد، به کار ببرید. پایین ترین فرکانس طبیعی را تا مرتبه دوم بر حسب a پیدا کنید و جواب مربوطه $u(x, t)$ را تا مرتبه اول بر حسب a بنویسید.

۲۰. با در نظر گرفتن اصطکاک به عنوان اختلال کوچک و با فرض این که جواب بی اصطکاک قبلاً معلوم شده است، یک روش اختلال مرتبه اول برای حل معادلات (۱۲-۶۰) به زبان ریاضی بنویسید. نشان دهید که چرا حتی تا مرتبه اول نمی توان مختصاتی طبیعی وارد کرد که شامل اثرات اصطکاک باشد.

۲۱. دو بار $+Ze$ در نقاط ثابتی به فاصله $2a$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. الکترونی به جرم m و بار $-e$ در میدان این بارها حرکت می‌کند. حرکت‌های پاینده و ارتعاشات کوچک حول حرکت‌های پاینده را پیدا کنید.

*۲۲. دو بار $+Ze$ و $-Ze$ در نقاط ثابت $z = a$ و $z = -a$ قرار گرفته‌اند. الکترونی به جرم m و بار $-e$ در میدان این بارها حرکت می‌کند. نموداری از z بر حسب t (فاصله از محور z است) رسم کنید که نشان‌دهنده مقادیری از z و t باشد که برای آنها حرکت‌های پاینده وجود دارند. پایداری این حرکت‌های پاینده را تحقیق کنید.

۲۳. جرم m بی‌اصطکاک بر روی یک میز صاف افقی می‌لغزد. جرم m به ریسمان بی‌جرمی به طول کل l بسته شده است که از داخل سوراخی در میز عبور می‌کند و در انتهای دیگرش به جرم M بسته شده است که در زیر میز آویزان می‌شود. تابع هامیلتون را با استفاده از مختصات قطبی r و α جرم m نسبت به سوراخ و زوایای کروی θ و φ جرم M نسبت به سوراخ، بنویسید. حرکت‌های پاینده و فرکانسهای طبیعی ارتعاشات کوچک حول حرکت پاینده را پیدا کنید.

۲۴. فرض کنید که سه جرم شکل ۴-۱۶ بتوانند به‌طور آزاد در صفحه‌ای حرکت کنند، ولی مقید باشند که در خط مستقیمی نسبت به یکدیگر باقی بمانند. مختصات خود را چنان اختیار کنید که تا آنجا که ممکن است قابل اغماض باشند. حرکت‌های پاینده را پیدا کنید و وجوه طبیعی ارتعاش حول آنها را به‌دست آورید.

۲۵. جسم صلب متقارنی به‌وسیله حلقه‌های بی‌اصطکاک بی‌وزنی سوار شده است. سنجاقی به یکی از حلقه‌ها چنان وصل شده است که گشتاور بازگرداننده $-k\phi$ حول محور z را ایجاد می‌کند، که در آن ϕ زاویهٔ اویلر است، حرکت‌های پاینده را پیدا کنید و نوع ارتعاشات کوچک حول آنها را تحقیق کنید.

۲۶. در مسئلهٔ ۱۳، فصل ۱۱، سنجاقی بین محور قرص و حلقه‌ها وصل شده است به‌طوری که گشتاور بازگرداننده $-k\psi'$ را وارد می‌کند، که در آن ψ' زاویهٔ دوران نسبی بین قرص و حلقه‌هاست. «ژیروسکوپ» آزادانه بی‌هیچ گونه نیروی خارجی در فضا حرکت می‌کند. حرکت‌های پاینده را پیدا کنید و ارتعاشات کوچک حول آنها را تحقیق کنید.

۲۷. دو جرم m به‌وسیلهٔ میلهٔ بی‌وزن صلبی به طول $2l$ بهم وصل شده‌اند. یک جرم به‌وسیلهٔ فنری با ضریب k و جرم دیگر با فنری به ضریب $2k$ به مبدأ وصل است. طول آزاد هر دو فنر صفر است. اجرام در صفحهٔ مشترکی حرکت می‌کنند. برای مختصات از مختصات قطبی r و θ مرکز جرم نسبت به مبدأ و از زاویهٔ α که میله با شعاعی که از مبدأ به مرکز جرم وصل می‌شود می‌سازد، استفاده کنید. وقتی فنر قویتر به کمترین مقدار ممکن کشیده شده باشد $\alpha = 0$ بگیرید. حرکت‌های پاینده را پیدا کنید و شرایط لازم پایداری آنها را به‌دست آورید.

*۲۸. در مسئلهٔ ۲۳، جرم دوم m بی‌اصطکاک بر روی میزی می‌لغزد و به‌وسیلهٔ میلهٔ بی‌جرمی به طول a به جرم اول وصل شده است. (فرض کنید که در این ترتیب تداپیروی چنان ظریف به‌کار رفته است که میله و ریسمان با هم درگیر نمی‌شوند). همچنین فرض کنید که $M = 2m$. زاویهٔ β بین میله و ریسمان را به‌عنوان یک مختصهٔ اضافی به‌کار ببرید. ارتعاشات طبیعی حول حرکت‌های پاینده پایداری را بیابید.

۲۹. پتانسیل برداری ناشی از دو قطبی مغناطیسی با گشتاور مغناطیسی μ در مختصات کروی نسبت به محور دو قطبی عبارت است از:

$$A = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r^2} \hat{\phi}.$$

برای ذره باردارى که در چنین میدانی حرکت می‌کند، حرکت‌های پاینده را پیدا کنید و نشان دهید که این حرکتها ناپایدارند.

۳۰. جواب معادلات (۱۲-۱۵۳) را برای X_1, X_2, E_1, E_2 و E_3 وقتی $P^2 = -M$ پیدا کنید و نوسانهای مربوطه را توصیف کنید. [راهنمایی. به آخرین بند بخش ۱۲-۸ مراجعه کنید].

* ۳۱. در بخش ۱۲-۸، حالتی را تجزیه و تحلیل کنید که سه جسم m_1, m_2, m_3 در یک خط مستقیم قرار می‌گیرند. نشان دهید که سه حرکت پاینده ممکن وجود دارد، یکی برای هر جرم که بین دو جرم دیگر قرار می‌گیرد. [راهنمایی. به قانون علائم دکارت احتیاج خواهید داشت]. نشان دهید که حرکت‌های نزدیک هریک از این حرکت‌های پاینده ناپایدارند. نتایج خود را با نتایج بخش ۷-۶ و مسئله ۱۹ فصل ۷ مقایسه کنید.

۳۲. جواب معادلات (۱۲-۱۵۳) برای ریشه مضاعف $P^2 = -1/2M$ را هنگامی پیدا کنید که نامساوی (۱۲-۱۶۰) به تساوی تبدیل می‌شود. نشان دهید که در این حالت معادلات (۱۲-۱۵۰) دارای جواب دومی هستند که در آن X_1, X_2, E_1, E_2 توابع خطی معینی از t ، مثلاً $X_1 = X'_1 + X''_1 t$ و غیره‌اند. (اگر فرض کنید که یکی از ضرایب، مثلاً X'_1 صفر است، می‌توانید عملیات جبری را کمی ساده‌تر کنید. این فرض مجاز است، زیرا اگر مضرب مناسبی از جواب اولی را که پیدا کرده‌اید و در آن X_1 ثابت است، از جواب دوم کم کنید، می‌توانید X'_1 را صفر اختیار کنید. خطی بودن معادلات، ترکیب خطی جوابها را مجاز می‌سازد.)

۳۳. جواب معادلات (۱۲-۱۵۳) برای X_1, X_2, E_1, E_2 را برای ریشه $P^2 = 0$ پیدا کنید و نشان دهید که به حرکت پاینده جدیدی در نزدیکی حرکت انتخاب شده، مربوط می‌شود. چون جواب شما فقط یک ضریب دلخواه دارد، باید جواب دیگری برای معادلات (۱۲-۱۵۰) مربوط به $P^2 = 0$ وجود داشته باشد. شکل آن را حدس بزنید و آن را به وسیله جایگزینی، توجیه کنید.

* ۳۴. نشان دهید که اگر حرکت‌های سه جسم لاگرانژ در خارج از صفحه حرکت پاینده در نظر گرفته شوند، لااقل یکی از سه مختصه اضافی قابل اغماض است. به عنوان دو مختصه غیرقابل اغماض، فواصل $q_1 = z_1 - z_2$ و $q_2 = z_2 - z_3$ را اختیار کنید، که در آن z_i فاصله عمودی m_i از صفحه حرکت پاینده است. معادلات خطی شده حرکت را به وسیله روش به کار برده شده در بخش ۱۲-۸ به دست آورید. سپس ارتعاشات طبیعی مربوطه را از معادلات به دست آورید و نشان دهید که نتیجه را می‌توان به سادگی به صورت تغییر کوچکی در طرز قرارگیری صفحه حرکت پاینده تفسیر کرد.

اصول موضوع پایه‌ای نظریه نسبیت خاص

۱-۱۳ اصول موضوع نظریه نسبیت^۲ خاص

در بخش ۷-۱ مشاهده کرده‌ایم که قوانین حرکت نیوتن از این خاصیت برخوردارند که اگر در یک دستگاه مختصات برقرار باشند، در هر دستگاه مختصات دیگری که با سرعتی ثابت نسبت به دستگاه اول حرکت می‌کند، نیز برقرارند. معادلات حرکت در دو دستگاه مختصات هم‌شکل‌اند (با نیروهای همسان در سمت راست). اصل موضوع نسبیت خاص نیوتن مسجل می‌کند که تمام قوانین فیزیک باید از چنین خاصیتی برخوردار باشند.

اصل نسبیت خاص. هر قانون فیزیک باید چنان باشد که اگر در هر دستگاه مختصاتی برقرار است، در هر دستگاه مختصات دیگری که با سرعتی ثابت نسبت به آن دستگاه حرکت می‌کند، نیز برقرار باشد. (۱-۱۳)

این اصل موضوع حاکی از آن است که مجموعه‌ای خاص از دستگاههای مختصات یافت می‌شوند که نسبت به یکدیگر به‌طور یکنواخت حرکت می‌کنند، و در هر یک از آنها قوانین فیزیک برقرارند. چنین دستگاههایی را دستگاههای مختصات لخت می‌گویند. در دستگاه مختصاتی که نسبت به یک دستگاه لخت شتاب داده شده باشد، قوانین فیزیک، دست‌کم به همان شکل، لزوماً برقرار نیستند. اصل موضوع (۱-۱۳) این حکم را به آزمایش واگذار می‌کند که تعیین کند کدام دستگاههای مختصات، لخت‌اند. با در نظر گرفتن یک قانون فیزیکی مناسب، مثلاً قانون اول حرکت نیوتن، قانون لختی، باید به‌طور تجربی تعیین کنیم که این قانون در کدام دستگاه مختصات، برقرار است.

در نزد اکثر افراد اصل نسبیت به‌طور شهودی پرکشش است. از دیدگاه عملی، کمیت‌هایی فیزیکی مانند مکان و سرعت باید با مشخص کردن روش اندازه‌گیری‌شان، تعریف شوند. ما مکان و سرعت هر جسم را نسبت به جسمی دیگر یا نسبت به دستگاه مختصاتی اندازه می‌گیریم که مکان مبدأ و محورهایش با توجه به اجسام معین تعیین می‌شوند. به این ترتیب، مکان و سرعت فقط نسبت به جسم دیگری یا نسبت به دستگاهی مختصات معنی پیدا می‌کنند. از این زاویه، باید تمام دستگاههای مختصات معادل باشند. در حالی که این استدلال اصل نسبیت را توجیه‌پذیر می‌کند، اما صدق و اعتبار آن را ثابت نمی‌کند. در واقع، اگر قرار بود که یک قانون فیزیکی در یک دستگاه مختصات لخت برقرار باشد و نه در

۱. این فصل و فصل بعدی به ویرایش آخر اضافه شده است. با توجه به اینکه اکنون زنده‌یاد احمد بیرشک در میان ما نیست و ویرایش این دو فصل را آقای بهرام معلمی قبول زحمت کردند و لذا سبک و برخی از اصطلاحات در این دو فصل با فصلهای اولیه تفاوت دارد.

۲. خواننده به منظور آمادگی برای خواندن این فصل، می‌تواند بخشهای ۱-۴، ۷-۱، و ۷-۲ را مرور کند.

دستگاههای دیگر، این حقیقت به تنهایی روشی عملی برای تمایز بین دستگاههای مختصات ارائه می‌کرد، درست همانگونه که قانون لختی ما را مجاز می‌کند که دستگاههای مختصات لختی را از دستگاههای شتاب‌دار متمایز کنیم. بنابراین می‌توانیم یک سرعت مطلق به‌عنوان سرعت نسبت به دستگاه مختصاتی تعریف کنیم که آن قانون فیزیکی خاص در آن دستگاه برقرار است. همچنین آشکار است که تا حدی که اصل نسبیت خاص از لحاظ شهودی توجیه است، اصلی کلی‌تر نیز به همان ترتیب توجیه‌پذیر است، یعنی قوانین فیزیک در تمام دستگاههای مختصات، مستقل از چگونگی حرکت این دستگاهها، باید یکسان باشند. این ایده به نظریه عام نسبیت منجر می‌شود، که از لحاظ ریاضی به‌طور قابل ملاحظه‌ای دشوارتر و از دیدگاه تجربی کمتر جاثفاده است. در این فصل و فصل بعدی، جز چند ملاحظه در بخش آخر، توجه و بررسی خود را به نظریه نسبیت خاص منحصر خواهیم کرد.

توجه کنید که اصل موضوع نسبیت، مانند قوانین ترمودینامیک، اصلی کلی است که در مورد تمام قوانین فیزیک صادق است. باید هر قانون فیزیکی فعلاً پذیرفته یا پیشنهاد شده را بررسی کنیم تا ببینیم آیا با این اصل موضوع می‌خواند یا خیر، در غیر این صورت، باید تعدیل مناسبی را بیابیم که با اصل موضوع اینشتین سازگار باشد که وی در مقاله اولش^۱ موفق شد این کار را در مورد قوانین مکانیک و قوانین الکترومغناطیس انجام دهد. همان‌طور که خواهیم دید، وی به تعدادی نتیجه شگفت هدایت شد که تمام آنها با بسیاری از آزمایشهای گوناگون سازگار از آب درآمدند. نظریه نسبیت خاص اکنون بر پایه تجربی بسیار محکمی استوار است.

در بادی امر به‌نظر می‌رسد که معادلات الکتریسیته و مغناطیس به‌صورتی که ماکسول آنها را تدوین و فرمول‌بندی کرد، اصل نسبیت را نقض می‌کنند. به‌طور اخص، معادلات ماکسول وجود امواج الکترومغناطیسی را، با سرعت حرکت نور، c ، پیش‌بینی می‌کنند. اگر قانونی فیزیکی از این قرار باشد که نور با سرعت c در دستگاه مختصاتی حرکت می‌کند، در این صورت ظاهراً معادله (۷-۵) نشان می‌دهد که این قانون در دستگاه مختصاتی که با سرعتی ثابت نسبت به دستگاه اول حرکت می‌کند، برقرار نخواهد بود. باید قانون انتشار نور را چنان تعدیل کرد که سرعت c نه نسبت به دستگاه مختصات بلکه نسبت به منبع نور یا نسبت به محیطی بیان شود که در آن نور انتشار می‌یابد و تمام فضا را پُر می‌کند. هر یک از این دو نظر مستلزم ایجاد تغییراتی در معادلات ماکسول خواهد بود، و از این گذشته این نظرها با آزمایش در توافق نیستند. در واقع، آزمایش نشان داده است که در حیطه دقتی که تحت آن آزمایشها انجام می‌شوند، این قانون که نور (در خلأ) با سرعت کلی c حرکت می‌کند، در حقیقت در تمام دستگاههای مختصات صادق است. اینشتین در سال ۱۹۰۵ نظریه نسبیت خاص خود را بر اساس اصل موضوع نسبیت (۱۳-۱) و اصل زیر پیشنهاد کرد:

(۱۳-۲) سرعت نور ثابت عمومی بدون تغییری، c ، نسبت به هر دستگاه مختصات است.

در میان آزمایشهایی که این اصل موضوع را توجیه می‌کنند، می‌توان از آزمایشهای مایکلسون و مورلی^۲، در خصوص سرعت نور نسبت به زمین متحرک، مشاهدات ابیراهی در جهت نورگسلی از ستارگان، و مشاهدات نورگسلی از دستگاههای ستاره‌ای دوگانه چرخان (مسئله ۱) یاد کرد.

1. A. Einstein, *Annalen der Physik*, 17 (1905).

2. A. A. Michelson and E. W. Morley, *Amer. J. Science*, 34, 333 (1887).

متأسفانه، بحث دربارهٔ این آزمایشها از حوصلهٔ این مطلب، خارج است. برای دستیابی به بحثی دربارهٔ مبانی تجربی نظریهٔ نسبیت، خواننده می‌تواند به یکی از کتابهای عامه فهم معتبر در بارهٔ این مبحث یا به نوشته‌ای در بارهٔ نظریهٔ نسبیت رجوع کند (ر. ک. فهرست مراجع). یکی از مستقیم‌ترین توجیحات اصل موضوع (۱۳-۲) بر پایهٔ اندازه‌گیری اختلاف سرعت نور نسبت به زمین در طول یک سال استوار است که کیندی و سرن‌دیک^۱ انجام داده‌اند. در این اندازه‌گیری نشان داده شد که سرعت در دو دستگاه مختصاتی که با سرعت نسبی 60000 متر در ثانیه حرکت می‌کنند، با تقریب $2m/sec$ ، یکسان است.

علی‌الاصول، اصل موضوع (۱۳-۲) بیانی از یک قانون فیزیکی خاص مربوط به انتشار نور است، قانونی که خودش پیامدی از قوانین کلی تر الکتریسته و مغناطیس است که ماکسول آنها را تدوین و فرمول‌بندی کرد. اینشتین این قانون خاص را به این علت برای اصل خود برگزید که وجود چنین قانونی، همان‌طوری که خواهیم دید، در بر پا کردن یک دستگاه مختصات و در تعیین روابط بین دستگاههای مختصاتی که به‌طور نسبی حرکت می‌کنند، نقشی عمده ایفا می‌کند. سرعت c نقشی اساسی در نظریهٔ نسبیت بازی می‌کند که فراتر از نقش آن به‌عنوان سرعت انتشار نور است. می‌توانستیم اصل دوم را به‌صورتی کلی تر فرمول‌بندی کنیم:

(۱۳-۲') قوانین فیزیکی متضمن سرعت ثابت عمومی c هستند [که بنا بر اصل (۱۳-۱) باید در تمام دستگاههای مختصات یکسان باشد].

این نکته را که قوانین فیزیکی می‌توانند شامل سرعتی عمومی باشند که در هر دستگاه مختصات یکسان است، اینشتین کشف کرد. تنها چنین سرعتی می‌تواند وجود داشته باشد (مسئلهٔ ۱۲) و در نتیجه هر قانون فیزیکی که به یک سرعت ثابت عمومی برمی‌گردد، باید شامل سرعت c باشد.

نخستین گام در تدوین نظریهٔ نسبیت، ارائهٔ تعریفهای مناسبی از کمیت‌های فیزیکی متفاوت است که در قوانین فیزیکی ظاهر می‌شوند: مکان، سرعت، زمان، انرژی، و مانند آنها. بسیاری از این کمیتها، مثلاً مکان، نسبت به یک دستگاه مختصات خاص تعریف می‌شوند. واضح است که اگر قرار باشد اصل (۱۳-۱) صادق باشد، کمیت‌های فیزیکی متفاوت باید در هر دستگاه مختصات خاص به روش یکسانی تعریف شوند. این گزاره که سرعت نور در تمام دستگاههای مختصات مقدار یکسانی دارد، نادرست یا به‌هر حال بی‌معنی خواهد بود، مگر آنکه یک‌گانه‌ی که سرعت بر حسب آنها اندازه‌گیری می‌شود در تمام دستگاههای مختصات به شکل یکسانی تعریف شده باشند. به محض آنکه مشخص شد که هر دستگاه مختصات باید چگونه بر پا شود و باید چگونه کمیت‌های متفاوتی نسبت به آن اندازه‌گیری شوند، گام بعدی عبارت خواهد بود از تعیین روابط بین کمیت‌های مربوطه در دستگاههای مختصات لختی مختلف. در فیزیک کلاسیک، تغییرات بین دو دستگاه مختصات که نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند، از طریق معادلات (۷-۱)، (۷-۵)، و (۷-۶) بر حسب مکان، سرعت، و شتاب بیان می‌شود. همان‌طوری که در بالا اشاره کردیم، این معادلات تبدیل با اصل موضوع (۱۳-۲) ناسازگارند. در عوض، در بخش ۱۳-۵ مجموعه‌ای دیگر از معادلات تبدیل، معادلات تبدیل لورنتس، به‌دست خواهیم آورد، که بین دستگاههای لختی مختلف رابطه برقرار می‌کنند. وقتی بدانیم چگونه کمیت‌های فیزیکی متفاوت را از یک دستگاه مختصات به دیگری تبدیل

1. R. J. Kennedy and E. M. Thorndike, *Phys. Rev.*, 42, 400 (1932).

کنیم، می‌توانیم با بررسی کردن هر قانون فیزیکی پی ببریم که آیا در دستگاه‌های مختلف لخت شکل یکسانی دارد یا خیر. معلوم می‌شود که برای معادلات الکترودینامیک ماکسول، چنین حالتی رخ می‌دهد، نتیجه‌ای که شاید با توجه به اتخاذ اصل (۱۳-۲) از همان آغاز، تعجب‌آور نباشد. از سه قانون حرکت نیوتن، تنها قانون اول آن با تبدیل لورنتس سازگار است؛ دو قانون دیگر مستلزم ترمیم‌اند. اینشتین در مسیر یافتن چگونگی تغییر دادن قوانین حرکت نیوتن، با مشاهده این نکته به هدف خود هدایت شد که این قوانین برای تمام حالت‌هایی که سرعت در مقایسه با سرعت نور ناچیز است، دلایل تجربی کاملاً توجیه‌گر بوده‌اند. معادلات تبدیل لورنتس مرتبط‌کننده دو دستگاه مختصات لختی، هرگاه که سرعت نسبی این دو دستگاه مختصات در مقایسه با سرعت نور چشم‌پوشیدنی باشد، همان‌طوری که واقعاً باید، به معادلات کلاسیک متناظر تبدیل می‌شوند. بنابراین اینشتین ناگزیر شد قوانین نسبیتی جدید مکانیک را، هرگاه تمام سرعت‌های درگیر خیلی از c کمتر باشند، با قوانین کلاسیکی قدیمی مکانیک وفق دهد. استدلالی مشابه از جانب نیلس بور در کارهای اولیه‌اش در مورد نظریه کوانتومی، به کار گرفته شده است. بور از اصلی به نام اصل همخوانی بهره گرفت، که می‌توانیم آن را به شیوه‌ای کلی‌تر به قرار زیر تدوین کنیم:

اصل همخوانی. هر نظریه جدیدی که ارائه می‌شود باید در پیش‌بینی‌هایش از پدیده‌هایی که نظریه قدیمی‌تر درباره آنها پیش‌بینی‌های درستی ارائه کرده، با آن نظریه قدیمی‌تر همخوانی داشته باشد. (۱۳-۴)

این نظر ظاهراً پیش پا افتاده به مثابه ابزاری بسیار قدرتمند در تدوین نظریه‌های فیزیکی مدرن از کار درآمده است. اینشتین به این اعتبار به تدوین معادلات حرکت نسبیتی صحیح، هدایت شد. نخستین پرسش، در جستجوی قوانین نسبیتی مکانیک، از این قرار است که آیا تدوین قوانین بقا (پایستگی)، به‌ویژه قانون بقای حرکت، به طریقی که با اصول نسبیت سازگار باشد، ممکن است یا خیر. پی خواهیم برد که در واقع چنین است، به شرط آنکه تعریف اندازه حرکت یک ذره را برطبق معادله (۴-۷۴) تغییر دهیم. چنین برمی‌آید که قانون بقای حرکت با اصول موضوع نسبیت فقط وقتی سازگار است که قانون بقای انرژی را نیز در آن بگنجانیم. انرژی هر ذره عبارت است از انرژی جنبشی‌ای که به کمک معادله (۴-۷۳) بیان می‌شود، به علاوه انرژی سکون، mc^2 ، آن. اگر جرم جسمی m باشد، در این صورت فرمول ساده mc^2 ، بنا به نظریه نسبیت، شامل تمام انواع مختلف انرژی - انرژی گرمایی، انرژی پتانسیل، انرژی هسته‌ای، و مانند آنها - که در جسم گنجانده‌اند، خواهد شد. وقتی تعریف درست نسبیتی اندازه حرکت معلوم باشد، می‌توانیم تلاش کنیم قانون حرکت نیوتن را با مشخص کردن این نکته تعمیم دهیم که نیروی وارد بر ذره باید با آهنگ تغییر زمانی اندازه حرکت نسبیتی‌اش برابر باشد. این گزاره بیان یک قانون نسبیتی حرکت است. قانون حرکت بر یک تبدیل خاص برای نیرو دلالت می‌کند وقتی از یک دستگاه مختصات به دیگری تغییر حالت می‌دهیم. در این صورت ضروری است قوانین گوناگون نیرو را بررسی و اگر لازم بود آنها را تغییر دهیم تا با این قانون تبدیل سازگاری یابند. این موارد مباحث اصلی این فصل و فصل بعدی را تشکیل می‌دهند.

۱۳-۲ پارادوکس ظاهری مرتبط با سرعت نور

هر چند که اصل موضوع نسبیت (۱۳-۱) به‌طور شهودی پرکشش و جذاب است، وقتی با اصل

موضوع دوم (۱۳-۲) ترکیب می‌شود، به نظر می‌رسد که به تعدادی نتایج متناقض منجر می‌شود که پذیرش این نظریه را براساس این دو اصل موضوع، در ابتدا دشوار می‌کند. بسیاری از این تناقضها و پارادوکسها به پارادوکسی بسیار ساده مربوط می‌شوند که مستقیماً ناشی از اصل موضوع دوم‌اند و در این بخش به آن خواهیم پرداخت.

یک پالس نوری را در نظر بگیرید که مبدأ O را در لحظه $t = 0$ ترک می‌کند و در مدت زمان t فاصله x را پیموده است (شکل ۱۳-۱). حال فرض کنید که دستگاه مختصات ستاره‌داری را اختیار می‌کنیم که مبدأ آن، O^* ، در امتداد محور x با سرعت v حرکت می‌کند. فرض کنید که در لحظه $t = 0$ ، مبدأ O^* با O منطبق است و در مدت زمان t فاصله h را، مطابق شکل ۱۳-۱، پیموده است. بنابر شکل می‌رسیم به

$$x = x^* + h \quad (۴-۱۳)$$

حال اگر سرعت نور نسبت به O ، عبارت باشد از c ،

$$x = ct, \quad (۵-۱۳)$$

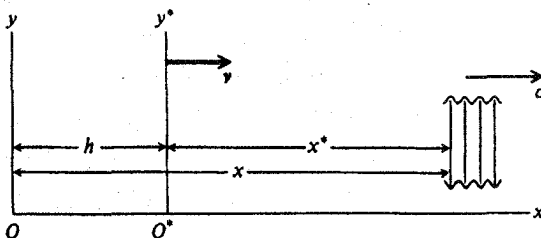
و اگر

$$h = vt, \quad (۶-۱۳)$$

آشکار است که سرعت نور نسبت به O^* عبارت خواهد بود از

$$c^* = \frac{x^*}{t} = c - v. \quad (۷-۱۳)$$

به این ترتیب، $c^* \neq c$ ، و به نظر می‌رسد که به تناقضی با اصل موضوع (۱۳-۲) می‌رسیم. چون بحث منجر به معادله (۷-۱۳) فقط به روابط ریاضی و هندسی ساده وابسته است، پی بردن به اینکه این معادله چگونه می‌تواند نادرست باشد، دشوار است. در واقع، در این گزاره هیچ نکته نادرستی یافت نمی‌شود. معادله (۷-۱۳) محققاً در نظریه نسبیت و نیز در فیزیک کلاسیک برقرار است به شرط آنکه به‌طور واضح بدانیم نمادهایی که در این معادله ظاهر می‌شوند چه معنایی دارند. توجه کنید که در معادله (۴-۱۳) به‌طور ضمنی فرض می‌شود که سه فاصله x ، h ، و x^* جملگی در چارچوب یک مجموعه از یکاها اندازه‌گیری می‌شوند، یا در غیر این صورت، اختلافهای موجود در این یکاها پیش از جمع کردن آنها، باید تصحیح شوند. اگر این سه کمیت بر حسب یکاهای یکسانی اندازه‌گیری نشوند، و اگر هیچ اقدامی برای این نکته در نوشتن معادله منظور نشود، آشکار است معادله



شکل ۱۳-۱ یک پالس نوری که با سرعت c در جهت محور x حرکت می‌کند، و رابطه‌اش با یک مبدأ ثابت O و یک مبدأ متحرک O^* .

برقرار نخواهد بود. به همین ترتیب، فرض می‌کنیم که همان فاصله زمانی t ، اندازه گرفته شده در یکاهای یکسان، در هر سه معادله (۱۳-۵)، (۱۳-۶) و (۱۳-۷) منظور شده است. نتیجه گیری ما، که محققاً باید در هر نظریه‌ای برقرار باشد، از این قرار است که معادله (۱۳-۷) رابطه بین سرعت c نسبت به O و سرعت c^* نسبت به O^* ، را که با سرعت v نسبت به O حرکت می‌کند، ارائه می‌دهد به شرط آنکه این سه سرعت، با تقسیم فاصله‌های مناسب به مدت زمان یکسان t به دست آیند، که در آن تمام فاصله‌ها به یک طریق و بر حسب یکاهای یکسان اندازه گیری شوند. ملاحظه می‌کنیم که برای رفع پارادوکس بین معادله (۱۳-۷) و اصل موضوع (۱۳-۲)، باید فرض کنیم که وقتی یک دستگاه مختصات نسبت به دیگری حرکت می‌کند، یکاهای زمان یا طول، یا هر دو، در این دو دستگاه مختصات، مختلف‌اند. مثلاً اگر فاصله x^* بر حسب یکاهای کوچک‌تر از یکاهای فاصله x اندازه گیری شده باشد، سرعت c^* بزرگ‌تر از $c-v$ درخواهد آمد. به همین ترتیب، اگر مدت زمان t^* که پالس نوری مبدأ را ترک کرد بر حسب یکاهای طولانی‌تر از یکاهای t اندازه گیری شود، باز هم $c^* = x^*/t^*$ از $c-v$ بزرگتر درخواهد آمد. یکی از این دو امکان، یا هر دو، ممکن است برابری c^* و c را مجاز کنند.

در فیزیک کلاسیک فرض می‌شود، هر چند این فرض معمولاً به‌طور واضح بیان نمی‌شود، که مادام که ما آثار بدیهی مانند واپیچشهای ناشی از شتابهای شدید را ننگجانیم، نتایج اندازه‌گیریها تحت تأثیر حرکت ابزار اندازه‌گیری قرار نمی‌گیرند. اگر اصول موضوع نظریه نسبیت را بپذیریم، در این صورت باید این فرض را رها و این امکان را منظور کنیم که میله‌های اندازه‌گیری متحرک از میله‌های اندازه‌گیری ساکن کوتاه‌ترند، یا اینکه یک ساعت متحرک ممکن است آهسته‌تر از ساعت ثابت کار کند. در این صورت، تعریف عملی هر کمیت فیزیکی نه تنها باید شامل تشخیص روشی باشد که براساس آن باید اندازه‌گیری شود، بلکه باید متضمن تشخیص سرعتی هم باشد که وسایل اندازه‌گیری مربوطه با آن سرعت حرکت می‌کنند. رسم این است که این قرارداد را بپذیریم که، تا وقتی به نحو دیگری بیان نشده، تمام کمیت‌های مرتبط به یک دستگاه مختصات خاص توسط ابزاری اندازه‌گیری می‌شوند که نسبت به آن دستگاه مختصات ساکن‌اند. حال اگر منظور ما از x^* فاصله پالس نوری از O^* باشد که در دستگاه مختصات ستاره‌دار اندازه‌گیری می‌شود، و اگر t^* زمان اندازه‌گیری شده در دستگاه مختصات ستاره‌دار باشد، بنا بر اصل (۱۳-۲) می‌رسیم به:

$$c = \frac{x}{t} = \frac{x^*}{t^*}, \quad (۱۳-۸)$$

که در آن x و t در دستگاه بی‌ستاره اندازه‌گیری می‌شوند. در بخش ۱۳-۴ نتایجی مرتبط با رفتار ساعتها و میله‌های اندازه‌گیری متحرک به دست خواهیم آورد.

فرض هوشمندانه‌تر دیگری نیز وجود دارد که متضمن استدلالی است که به معادله (۱۳-۷) می‌انجامد. چون پالس نوری و مبدأهای O و O^* همگی نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند، سه فاصله x ، h ، و x^* در شکل ۱۳-۱ جملگی باید در لحظه یکسان t اندازه‌گیری شوند. در بخش بعدی خواهیم دید که می‌توانیم منظور خود از لحظه یکسان در دو جای مختلف را فقط نسبت به یک دستگاه مختصات خاص، تعریف کنیم. لازم نیست دو رویدادی که نسبت به یک دستگاه مختصات همزمان‌اند، نسبت به دستگاه دیگری همزمان باشند. بنابراین فاصله x^* در دستگاه مختصات ستاره‌دار را می‌توان در دستگاههای یکاهای مختلف و حتی بین نقاط مختلف اندازه‌گیری

کرد، در صورتی که تمام اندازه‌گیریها در دستگاه بی‌ستاره، همان‌طوری که در رسیدن به معادله (۱۳-۷) فرض شده بود، انجام گیرد.

۱۳-۳ دستگاههای مختصات، چارچوبهای مرجع

برای ایجاد و برقراری یک دستگاه مختصات، ابتدا مبدأ آن، O ، را مشخص می‌کنیم، که مکان آن باید به‌طریقی، احتمالاً با توجه به شیئی یا رویدادی قابل شناسایی، مشخص شود. آنگاه سه محور متقابلاً عمود x ، y ، z را مشخص می‌کنیم که جهت‌هایشان باید نظر به اشیاء قابل شناسایی مشخص شوند. فرض خواهیم کرد که دستگاه مختصات چنان انتخاب شده که دستگاهی لخت است. اگر فرض کنیم که قانون لختی برقرار است، در این صورت یکی از راههای تضمین این نکته که دستگاه مختصات مان لخت است از این قرار خواهد بود که مبدأ و محورها را نسبت به اجسامی اختیار کنیم که نیرویی بر آنها وارد نمی‌آید. [به علت تساوی جرم گرانشی و جرم لختی، تعیین اینکه چه موقع هیچ نیرویی بر جسم وارد نمی‌آید می‌تواند دشوار و حتی علی‌الاصول ناممکن باشد. اگر قرار است در اینجا همراه با نظریهٔ نسبیت پیش برویم باید از این مشکل چشم‌پوشیم. به این مطلب در بخش آخر این فصل باز خواهیم گشت.]

بعد از اختیار کردن یک مبدأ و مجموعه‌ای از محورها برای دستگاه مختصات خودمان، پس از آن باید روشی را مشخص کنیم که قرار است از طریق آن کمیت‌های فیزیکی متفاوت اندازه‌گیری شوند. از آنجا که اصول موضوع ما حاکی از آن است که رفتار وسایل اندازه‌گیری ممکن است به شیوهٔ حرکت آنها بستگی داشته باشند، تعیین روش حرکت ابزار اندازه‌گیری هر کمیت خاص ضروری است. این تشخیص و تعیین فقط باید در مورد دستگاه مختصات و شاید اجسامی صورت پذیرد که قرار است اندازه‌گیری‌ها روی آنها انجام شوند. ما اکنون مشخص می‌کنیم که تمام وسایل اندازه‌گیری نسبت به دستگاه مختصات ساکن تلقی می‌شوند، مگر اینکه خلاف آن ابراز شود. در مورد برخی اندازه‌گیریهای خواص یک جسم فیزیکی خاص، مثلاً جرم آن، شاید مشخص کردن اینکه ابزار اندازه‌گیری قرار است نسبت به جسمی ساکن باشند که خواص آن باید اندازه‌گیری شود، راحت‌تر باشد.

هر تعریفی از یک کمیت فیزیکی مستلزم فرضیهایی در مورد قوانین فیزیکی حاکم بر رفتار ابزار اندازه‌گیری به کار گرفته شده است. مثلاً از قانون (۱۳-۲) برای تعریف و مشخص کردن روشی بهره می‌گیریم که تحت آن، زمان در هر نقطهٔ خاصی در یک دستگاه مختصات اندازه‌گیری شود. وقتی پدیده‌های فیزیکی جدیدی کشف می‌شوند که با قوانین فیزیکی قبلی در تناقض اند، نه تنها تغییر دادن قوانین، بلکه بررسی تعاریف مفاهیم و کمیت‌های فیزیکی متفاوت ضروری است تا معلوم شود که آیا به فرضیهایی که دیگر برقرار نیستند بستگی دارند یا خیر. در عمل یا حتی در عالم نظر این امکان وجود ندارد که صراحتاً تمام فرضیهایی را مشخص کنیم که در هر تعریف عملی خاص در نظر گرفته می‌شوند. ما آن فرضیهایی را مشخص می‌کنیم که در هر مرحلهٔ خاصی در تکامل علم فیزیک مناسب به نظر می‌رسند، اما فرضیهایی بیان نشده ممکن است در تجزیه و تحلیل بعدی مهم جلوه کنند. بسیاری از این فرضها را باید به اتکای عواملی بجا آورد که می‌توانند نتایج اندازه‌گیری خاصی را متأثر کنند. در فیزیک کلاسیک فرض می‌شود که با برخی استثناهای واضح، نتایج یک اندازه‌گیری (از میان چیزهای دیگر) به رنگ ابزار اندازه‌گیری، پیشینهٔ ابزار اندازه‌گیری، هلال ماه در زمانی که اندازه‌گیری انجام

می شود، یا سرعت حرکت این ابزار، بستگی ندارد. فرض اخیر دیگر در نظریه نسبیت اختیار نمی شود، اما ما فرض خواهیم کرد که با برخی استثناهای بدیهی، سه عامل دیگر، و در واقع عوامل بسیار دیگری، نتایج اندازه گیریهای فیزیکی را متأثر نمی کنند.

نوع دیگر فرض از این قرار است که روشهای مختلف اندازه گیری کمیتی واحد به نتایج یکسانی خواهد انجامید. مثلاً، روشهای بسیار و گوناگونی برای اندازه گیری طول به کار می برند، که بعضی از آنها برای حالات معینی مناسب و برخی نامناسب اند. اندازه گیریهای طول به نحوی مستلزم مقایسه طول نامعلوم، که باید اندازه گیری شود، با طول معلومی است که قسمتی از آلات اندازه گیری را تشکیل می دهد و بنا بر فرضهایمان باید نسبت به دستگاه مختصاتی که اندازه گیری در چارچوب آن انجام می پذیرد، در حال سکون باشد. این طول معلوم به نوبه خود در قبال طول واحد معیار مشخصی باید درجه بندی شود. مانند فیزیک کلاسیک، فرض خواهیم کرد که وقتی بتوان روشهای مختلفی را برای اندازه گیری کمیتی یکسان به کار برد، به نتایج یکسان خواهیم رسید، البته به شرط آنکه ابزارهای اندازه گیری نسبت به یکدیگر ساکن باشند. بنابراین، به هنگام بحث کردن درباره یک کمیت اندازه پذیر خاص، می توانیم هر روش اندازه گیری را برگزینیم که برای منظور ما راحت تر است. به خصوص، در تجزیه و تحلیلهایی که بعداً خواهد آمد، فرض می کنیم که طول بین هر دو نقطه ثابت در دستگاه مختصات مان به طریق معمولی توسط میله اندازه گیری، اندازه گیری می شود. به تعریف محتاطانه تری از طول شیئی متحرک، که بعداً ارائه خواهد شد، نیاز داریم. به همین ترتیب، فرض می کنیم که تعاریف عملی مناسب برای تمام کمیتهای فیزیکی که با آنها سروکار خواهیم داشت، داده شده اند یا داده خواهند شد.

مکان هر نقطه در دستگاه مختصات مان به کمک مختصات x ، y ، z معین می شود که فرض می کنیم به وسیله میله های اندازه گیری که نسبت به دستگاه مختصات ساکن اند، اندازه گیری می شوند. مکان هر رویداد فیزیکی توسط مختصات x ، y ، z در نقطه ای که رخ داده است، در فضا تعیین خواهد شد، و زمان آن رویداد، t ، نیز مشخص خواهد شد. این زمان t به روش زیر اندازه گیری می شود. فرض می کنیم که در مبدأ دستگاه مختصات یک ساعت ساکن قرار داده شده است که زمان t اندازه گیری شده از زمان مرجع منتخب، $t = 0$ ، را نشان می دهد. درست همانگونه که مبدأ در فضا به وسیله شیئی قابل تشخیص که بر آن هیچ نیرویی وارد نیامده است، تعیین مکان می شود، زمانی که برای مبدأ تعیین مکان شده است، به وسیله رویدادی قابل تشخیص که در مبدأ فضایی رخ می دهد، تعیین می شود. این رویداد به آسانی می تواند صفر خود ساعت باشد اگر سبب راحتی شود. به هر رویدادی که در مبدأ فضایی دستگاه مختصات رخ می دهد زمان t نشان داده شده روی ساعت، در لحظه ای که رویداد رخ داده، تخصیص داده خواهد شد.

برای مشخص کردن زمانی که یک رویداد در جای دیگری غیر از مبدأ فضایی رخ می دهد، روشهای متعددی وجود دارد. یکی از این روشها از این قرار است که فرض کنیم در هر نقطه از فضا ساعتی قرار داده شده که نسبت به دستگاه مختصات ساکن است. و با ساعت مرجع که در مبدأ قرار داده شده یا دست کم با همان سرعت کار می کند، یکسان است. پس، لازم است مشخص کنیم چگونه این ساعتها باید با هم همزمان شوند. از آنجا که ما در حال حاضر فقط یک قانون فیزیکی (۱۳-۲) در اختیار داریم، برای تطابق ساعتها باید از این قانون بهره گیریم. بنابراین، برای همزمان کردن ساعتها در نقطه (x, y, z) ، توافق می کنیم که از نقطه (x, y, z) ، یعنی، با دریافت یک سیگنال نوری در

نقطه (x, y, z) که توسط ساعت در مبدأ در زمانی مشخص فرستاده می‌شود، ساعت در مبدأ را بخوانیم. ما زمان نشان داده در ساعت مبدأ را با اضافه کردن زمان $c/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ که سیگنال نوری نیاز دارد از مبدأ به نقطه (x, y, z) برود، تصحیح خواهیم کرد، و ساعت محلّی را در زمان تصحیح شده مربوطه قرار خواهیم داد. یک روش دیگر معادل برای تعیین کردن زمان t مربوط به رویدادی که در نقطه (x, y, z) رخ می‌دهد، و نیازی به تعداد زیادی ساعت ندارد، از قرار مشروح در زیر است. سیگنال نوری ارسالی از رویداد موردنظر را در مبدأ مشاهده می‌کنیم و زمان رسیدن سیگنال را که به وسیله ساعت مبدأ اندازه‌گیری می‌شود، در نظر می‌گیریم. سپس، زمان لازم برای سفر نور با سرعت c از نقطه (x, y, z) به مبدأ را از این زمان کم می‌کنیم. این زمان تصحیح شده، زمان رویداد موردنظر، t ، است.

اکنون می‌توان به هر جسم متحرک مختصات $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ را نسبت داد، که علی‌الاصول می‌توانند مطابق با این تعریفها اندازه‌گیری شوند. اکنون می‌شود مؤلفه‌های سرعت و شتاب جسم را به طریق معمول به‌عنوان مشتقات این توابع تعریف کرد. جرم هر جسم را می‌توان با استفاده از ترازو یا با مقایسه شتاب آن با شتاب جسمی معیار، مطابق آنچه در بخش ۱-۳ تشریح شد، محاسبه کرد. در هر یک از این دو حالت، ابزار اندازه‌گیری و جرم معیار نسبت به جرم نامعلوم در حالت ساکن یا تقریباً ساکن خواهند بود.

برای آنکه مطمئن شویم کمیت‌های فیزیکی در دستگاه‌های مختصات لخت مختلف به همین روش تعریف می‌شوند، باید برای مقایسه یکاهای اصلی در دو دستگاه مختصات به روشی مجهز باشیم. می‌توان یکاهای بنیادی را به دو روش تعریف کرد. مثلاً، در مورد طول می‌توان در روش اول، شیء فیزیکی خاصی اختیار کرد که طولش در حکم یکای طول معیار تعریف می‌شود. بنابراین، برای مدت زمانی طولانی متر فاصله بین دو نشانه روی میله‌ای تعریف شده بود که در دفتر بین‌المللی اوزان و مقادیر، در سور فرانسه، نگهداری می‌شد. اگر یکای طول را به این طریق تعریف کنیم، با مشکلی از این قرار مواجه می‌شویم که منظورمان از متر در دستگاه مختصاتی (ستاره‌دار) که نسبت به دستگاه آزمایشگاه (بی‌ستاره) در فرانسه با سرعتی مشخص حرکت می‌کند، چیست. برای انجام این کار می‌توانیم آزمایشگاه را چنان بیاراییم که میله معیار دومی را مدرج کند، که البته انجام این کار تنها وقتی امکان‌پذیر است که میله سنج معیار دوم نسبت به متر اصلی ساکن باشد. در این صورت میله معیار دوم شتاب‌دار می‌شود تا به سرعت مناسبی برسد که نسبت به دستگاه مختصات متحرک ساکن باشد. فرض می‌کنیم که این شتاب به اندازه کافی آهسته و با دقت به جسم داده می‌شود که هیچ تغییر شکل واضحی در میله سنج معیار دوم ایجاد نمی‌شود، و سپس آن را به‌عنوان سنج معیار در دستگاه مختصات ستاره‌دار تعریف می‌کنیم.

روشی تا حدی رضایت‌بخش‌تر برای مقایسه معیارهای طول در دو دستگاه مختصات مختلف براساس این مشاهده که طولهای عمود بر جهت حرکت نسبی می‌توانند مستقیماً مقایسه شوند، پایه‌گذاری شده است. دو نقطه ساکن در دستگاه مختصات بی‌ستاره و یک سنج جداگانه را در نظر می‌گیریم که در جهتی عمود بر جهتی اندازه‌گیری می‌شوند که تحت آن دستگاه ستاره‌دار حرکت می‌کند. همان‌طور که این دو نقطه در دستگاه مختصات ستاره‌دار حرکت می‌کند، یک جفت خط موازی ترسیم می‌کنند. در این صورت، فاصله بین این دو خط به‌عنوان سنج معیار در دستگاه

مختصات ستاره‌دار تعریف می‌شود. توجه کنید که ما فرض می‌کنیم که طول میلهٔ سنجه بر اثر چرخش میلهٔ سنجه در فضا متأثر نمی‌شود، به طوری که اگر سنجه‌ای در یک سمتگیری مدرج شود، می‌تواند برای اندازه‌گیری طول در هر جهتی به کار رود.

روش دوم تعریف یکای طول عبارت است از انتخاب پدیده‌ای فیزیکی که به طور عمومی قابل شناسایی است، و سپس تعریف کردن یک سنجه (متر) در ارتباط با طولی اندازه‌پذیر محاط در این پدیده. در حال حاضر این سنجه (متر) به صورت $\frac{1650763}{73}$ برابر طول موج خط قرمز خاصی در طیف یک ایزوتوپ خاص کریپتون، ^{81}Kr ، تعریف می‌شود. اتمهای کریپتون که پرتو گسیل می‌کنند باید در دستگاه مختصاتی که اندازه‌گیری می‌شوند در حال سکون باشند، و طول موج باید در خلأ اندازه‌گیری شود. این تعریف یکای طول می‌تواند در هر دستگاه مختصاتی عملی شود و مشکل مقایسهٔ یکاها در دو دستگاه پیش نمی‌آید.

فرض خواهیم کرد که هر یک از این روشهای شناسایی یکاها در دو دستگاه لخت نتایج یکسانی خواهند داد. به خصوص، رابطه‌ای مهم بین اندازهٔ طولها نسبت به دو دستگاه لخت از استدلال ما در مورد مقایسهٔ میله‌های سنجهٔ معیار پیروی می‌کند. طولهای عمود بر جهت حرکت نسبی دو دستگاه می‌توانند به طور مستقیم، همان طوری که در بالا ملاحظه کردیم، مقایسه شوند. بنابراین، طولها و فواصل عمود بر جهت حرکت، در هر دو دستگاه مختصات مقادیر یکسانی دارند.

همین بحث را می‌توان برای تعریف یکاهایی که برحسب آنها سایر کمیت‌های فیزیکی باید اندازه‌گیری شوند، پیش کشید. یکی از روشهای مشخص کردن یکای زمان، وقتی یکای فاصله مشخص شده است (یا بر عکس)، عبارت است از مشخص کردن مقداری دقیق برای سرعت نور و فراهم آوردن این امکان که یکای زمان از طریق مقایسهٔ مقدار اندازه‌گیری شدهٔ سرعت نور با مقدار معیار مشخص شده، تعیین شود. در حال حاضر (۱۹۷۰ میلادی) اندازه‌گیری بازه‌های زمانی و فاصله با دقت بیشتری نسبت به اندازه‌گیری سرعت نور، از لحاظ تکنیکی امکان‌پذیر است، و به این علت یکای زمان در حال حاضر، بر حسب زمان گردش زمین به دور خورشید در سال ۱۹۰۰ تعریف می‌شود. پیش‌بینی می‌شود که وقتی روشهای اندازه‌گیری مناسب به اندازهٔ کافی پیشرفت کردند، یکای زمان برحسب بسامد خط طیفی معینی از اتمی خاص، تعریف خواهد شد. اگر همان خط طیفی انتخاب شود که برای تعریف طول معیار به کار گرفته شد، معادل آن است که سرعت نور مشخص شود.

همان طوری که مشاهده کرده‌ایم، می‌توان طول یک جسم متحرک را مستقیماً با روشی ساده اندازه‌گیری کرد، در صورتی که طولی که قرار است اندازه‌گیری شود بر جهت حرکت عمود باشد. چندین روش موجه برای اندازه‌گیری یک طول در جهتی موازی جهت حرکتش به کار گرفته می‌شود. فرض کنید دو نشانهٔ A و B روی جسمی متحرک نمایشگر انتهای طولی باشند که باید اندازه‌گیری شود. فاصلهٔ $l = \overline{A'B'}$ بین نقاط ثابت A' و B' ، که می‌توانند با یک میلهٔ سنجهٔ ساکن اندازه‌گیری شود، اکنون به عنوان فاصلهٔ بین نشانه‌های متحرک A و B در دستگاه مختصات مان تعریف می‌شود.

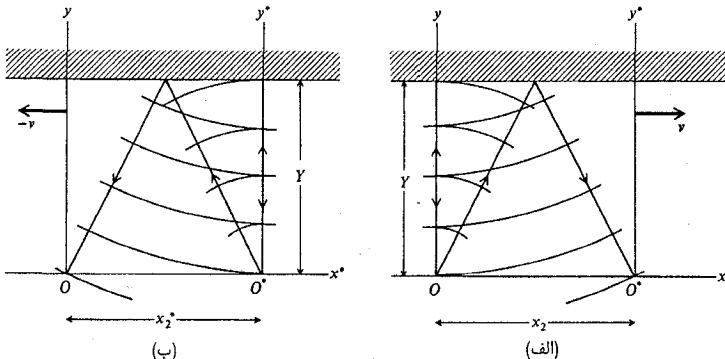
این روش را می‌توان برای اندازه‌گیری طول \overline{AB} در هر سمتگیری نسبت به سرعتش، به کار برد. روش دیگری برای اندازه‌گیری طولی موازی با جهت حرکتش، هر گاه سرعت آن، v ، اندازه‌گیری شده باشد (همانگونه که قبلاً تعریف شده)، عبارت است از اندازه‌گیری بازهٔ زمانی t ، بین عبور A و B از نقطه‌ای ثابت. در این صورت، طول \overline{AB} عبارت است از $l = vt$. روش سوم نیز در مسئلهٔ ۴

مطرح شده است. فرض می‌کنیم که تمام این روشهای اندازه‌گیری طول نسبت به یک دستگاه مختصات معلوم، نتیجه یکسانی را به دست می‌دهد. این فرض با اصل نسبیّت سازگار است (مسائل ۴ و ۶ را ملاحظه کنید).

به این نتیجه خواهیم رسید که اجسام متحرک، از جمله ابزار اندازه‌گیری متحرک، به شیوه‌های نامنتظره رفتار می‌کنند در صورتی که سرعتشان با سرعت نور قابل مقایسه باشد. با همه این احوال، ملاحظات سینماتیکی مربوط به مکانها و حرکت‌های اجسام نسبت به یک تک دستگاه مختصات، یا نسبت به یکدیگر، مراعات شدنی است اگر فاصله‌ها، زمانها، سرعتها، و مانند آنها، به وسیله ابزارهایی اندازه‌گیری شوند که نسبت به یک تک دستگاه مختصات اندازه‌گیری شوند. وقتی بخواهیم بین کمیت‌های اندازه‌گیری شده در دستگاه‌های مختصات مختلف با حرکت نسبی سریع رابطه برقرار کنیم، باید آثار نسبیتی را منظور کنیم.

نتیجه‌ای چشمگیر که بی‌درنگ از تعریفهای بالا حاصل می‌شود از این قرار است که دو رویداد E_1 و E_2 که در یک لحظه $t_1 = t_2$ در دو جای مختلف از یک دستگاه مختصات لخت رخ می‌دهند، ممکن است در لحظه‌های مختلف $t_1^* \neq t_2^*$ در یک دستگاه لخت که نسبت به اولی در حرکت است، رخ دهند. این نتیجه شاید می‌توانست قبلاً پیش‌بینی شده باشد، اگر به خاطر بساویریم که همزمان‌سازی ساعتها در هر یک از دو دستگاه مختصات باید با استفاده از سیگنال‌های نوری و این فرض که در هر دستگاه مختصات نور با سرعت یکسان c منتشر می‌شود، انجام پذیرد. حتی این امکان نیز وجود دارد، که در ضمن نگران‌کننده‌تر هم هست، که وضعیت‌هایی یافت شوند که در آنها دو رویداد E_1 و E_2 چنان رخ دهند که E_1 قبل از E_2 در یک دستگاه مختصات لخت رخ می‌دهد و بعد از E_2 در دستگاه دیگری رخ می‌دهد.

مثلاً، حالت نشان داده شده در شکل ۱۳-۲ را در نظر بگیرید. دوباره دو دستگاه مختصات داریم که با محورهای موازی توجیه شده‌اند، و دستگاه مختصات ستاره‌دار با سرعت v در



شکل ۱۳-۲ الف) یک پالس نوری کروی گسیلیده از مبدأ، بازتابیده از یک آینه تخت در $y = Y$ ، و بازگشته به O و O' ، که در دستگاه مختصات بی‌ستاره دیده می‌شود. ب) همان رویدادها در دستگاه مختصات ستاره‌دار مشاهده می‌شوند.

امتداد محور x حرکت می‌کند. مبدأ زمانی در هر دو دستگاه مختصات زمانی اختیار می‌شود که مبدأهای فضایی O و O^* بر هم منطبق‌اند. در این لحظه یک پالس کروی از نور از مبدأهای منطبق به خارج فرستاده می‌شود، که انتشار می‌یابد و تا آینه‌ای مسطح موازی با صفحه xz واقع در $y = Y$ منتشر می‌شود، و باز می‌تابد و برمی‌گردد. قسمتی از موج کروی بازتابیده به مبدأ O برمی‌گردد، همان رویدادی که آن را E_1 می‌نامیم، و بخش دیگری از موج به مبدأ متحرک O^* برمی‌گردد که اکنون به نقطه $x = x_1$ رفته است. دریافت پالس بازتابیده در O^* را رویداد E_2 می‌نامیم. رویداد بیانگر خروج اولیه پالس نوری در مبدأ فضا-زمان $x = y = z = t = 0$ در دستگاه بی‌ستاره و نیز در مبدأ $x^* = y^* = z^* = t^* = 0$ در دستگاه ستاره‌دار، رخ می‌دهد. ابتدا به این رشته رویدادها از دیدگاه دستگاه مختصات بی‌ستاره نگاه می‌کنیم (شکل ۱۳-۲ (الف))، به خاطر می‌آوریم که تا وقتی یک دستگاه مختصات موردنظرمان است، می‌توانیم ملاحظات سینماتیکی معمولی مبتنی بر انتشار نور با سرعت c را به کار ببریم. بخشی از موج که تا آینه حرکت می‌کند و به O برمی‌گردد، ظاهراً در زمان

$$t_1 = \frac{2Y}{c}, \quad (9-13)$$

فرامی‌رسد که زمانی است نسبت داده شده به رویداد E_1 در دستگاه مختصات بی‌ستاره. رویداد E_2 در نقطه زیر رخ می‌دهد

$$x_2 = vt_2, \quad y_2 = z_2 = 0.$$

نوری که به O^* می‌رسد، فاصله

$$ct_2 = 2 \left[\frac{1}{4} x_2^2 + Y^2 \right]^{1/2}$$

را پیموده است. مقادیر مربوطه را به جای x_2 می‌نشانیم و سپس معادله را برحسب t_2 حل می‌کنیم:

$$t_2 = \frac{2Y}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (10-13)$$

بنابراین، در دستگاه مختصات بی‌ستاره، رویداد E_2 بعد از رویداد E_1 رخ می‌دهد، یعنی $t_2 > t_1$. اکنون همان رشته رویدادها را از دیدگاه دستگاه مختصات ستاره‌دار، مطابق شکل ۱۳-۲ (ب)، ملاحظه می‌کنیم. مبدأ بی‌ستاره O اکنون به طرف چپ حرکت می‌کند و ما استدلال می‌کنیم که سرعت اندازه‌گیری شده آن، v ، در O^* باید برابر سرعت O^* باشد که در O اندازه‌گیری می‌شود. اگر دو دستگاه لختی در اختیار داشته باشیم، و اگر در هر یک از آنها سرعت v را اندازه بگیریم که با آن دیگری حرکت می‌کند، باید سرعت مساوی در دو حالت را به دست آوریم. اگر چنین حالتی نمی‌بود، ما روشی تجربی برای تمایز بین دو دستگاه مختصات می‌داشتیم. این موضوع با اصل (۱۳-۱) مان در تناقض خواهد بود. جهت سرعت نسبی هر دستگاه نسبت به دیگری البته به سمتگیرهای نسبی محورهای ستاره‌دار و بی‌ستاره بستگی خواهد داشت. اگر مانند حالت حاضر، دو مجموعه محورها موازی باشند، و اگر O^* در جهت مثبت نسبت به O در امتداد محور x حرکت کند، سرعت O^* نسبت به O عبارت است از $v_x = v$ و $v_y = v_z = 0$ ؛ و سرعت O نسبت به O^* عبارت است از $v_x^* = -v$ و $v_y^* = v_z^* = 0$. همچنین، همان‌طوری که قبلاً نشان داده‌ایم، مختصه $y^* = Y$ آینه در

دستگاه مختصات ستاره‌دار همان مؤلفه γ آینه در دستگاه بی‌ستاره خواهد بود، زیرا هر دو عمود بر حرکت اندازه‌گیری می‌شوند. ما اکنون، مانند بالا، مشاهده می‌کنیم که رویداد E_1 در مبدأ $x_1^* = y_1^* = z_1^* = 0$ در لحظه

$$t_1^* = \frac{\gamma Y}{c} \quad (11-13)$$

رخ می‌دهد، و رویداد E_2 در نقطه $x_2^* = y_2^* = z_2^* = 0$ در زمان

$$t_2^* = \frac{\gamma Y}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}! \quad (12-13)$$

رخ خواهد داد. زمانهای نسبت داده شده به دو رویداد در دستگاه مختصات ستاره‌دار با زمانهای نسبت داده شده در دستگاه بی‌ستاره جابه‌جا شده‌اند، و رویداد E_1 اکنون قبل از رویداد E_2 در دستگاه ستاره‌دار رخ می‌دهد.

این نتیجه پارادوکسی با عقل متعارف چنان متناقض است که به ما این احساس را می‌دهد که نظریه‌ای که این نتیجه را پیش‌بینی می‌کند باید خود - متناقض باشد، یا دست‌کم باید به نتایج نامعقول فیزیکی هدایت شود. اگر علت این ایده را بررسی کنیم، خواهیم دید که ناشی از درک ما از علیت است. اگر یک رویداد علت رویدادی دوم باشد، در هر دستگاه مختصات رویداد اول قطعاً باید قبل از رویداد دوم پیش آید. در وضعیت فعلی، رویداد E_2 ، یعنی گسیل پالس نوری، تا اندازه‌ای علت دو رویداد دیگر E_1 و E_2 است و بنابراین باید قبل از آنها بیاید، به همان گونه که در واقع در دو دستگاه چنین می‌کند. اگر رابطه‌ای علی بین رویدادهای E_1 و E_2 برقرار می‌بود، در یکی از دو دستگاه مختصات به تناقضی با اصل علیت برمی‌خوریم، که علت باید قبل از معلول بیاید. مثلاً، اگر سیگنالی از هر نوع بتواند در زمان t_1 از مبدأ O به خارج گسیل شود، بروز رویداد E_1 را نشان می‌دهد، و اگر این سیگنال بتواند در زمان t_2 به نقطه O^* برسد، در این صورت به تناقض بر خواهیم خورد، زیرا در دستگاه مختصات ستاره‌دار باید سیگنال قبل از فرستاده شدن گسیل و ارسال شود، و ما از رویداد E_1 قبل از اینکه در دستگاه مختصات ستاره‌دار رخ داده باشد، با خبر خواهیم شد. در نتیجه، اگر قرار باشد اصل علیت را رها نکنیم، باید در وضعیتی از این دست، ناممکن باشد که دو رویداد E_1 و E_2 رابطه‌ی نسبی مستقیمی داشته باشند. به خصوص، باید ناممکن باشد که هر نوع سیگنالی یک رویداد را ترک کند و به دیگری وارد شود. سیگانها ممکن است بر نوعی موج حمل شوند؛ مثلاً، یک موج نوری یا یک موج صوتی، یا ممکن است به وسیله‌ی شیئی فیزیکی حمل شوند که از یک رویداد به رویداد دیگر می‌رود، مثل پیامی که در یک بطری بر امواج دریا سپرده می‌شود. زمان بین دو رویداد E_1 و E_2 در دو دستگاه مختصات عبارت است از

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= t_2^* - t_1^* = \frac{\gamma Y}{c} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right] \\ &= (cx_2 - \gamma v Y) / c^2 = (-cx_1^* - \gamma v Y) / c^2. \end{aligned} \quad (13-13)$$

این زمان از زمان لازم برای اینکه نور فاصله $x_2 - x_1^* = -x_1^*$ بین دو رویداد را طی کند، کوتاه‌تر است. همین نتیجه در تمام حالت‌هایی یافت می‌شود که زمان‌بندی دو رویداد در دو دستگاه مختصات لخت مختلف، متفاوت باشد؛ اختلاف زمانی بین دو رویداد همواره از زمان لازم برای اینکه نور فاصله

مربوطه در هر یک از دستگاههای مختصات را طی کند، کوتاه تر است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که اگر قرار باشد نظریه با اصل علیت سازگاری کند، باید برای هر سیگنال، یا هر شیئی مادی که بتواند سیگنالی را حمل کند، حرکت سریعتر از سرعت عمومی c در هر دستگاه مختصاتی ناممکن باشد.

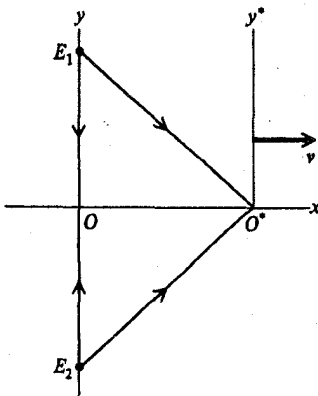
از آنجا که بنابر قوانین فیزیکی قرار داشتن هر شیئی در مرکز یک دستگاه مختصات ساکن مجاز است، به خصوص نتیجه می‌گیریم که سرعت نسبی دو دستگاه مختصات لخت، v ، هرگز نمی‌تواند از c تجاوز کند. در واقع، قبلاً می‌توانستیم از معادلات (۱۳-۱۰) متوجه شده باشیم که v باید از c کمتر باشد وگرنه نظریه دستخوش تناقض با خود می‌شود. زیرا این واقعیت قطعاً درست است که نسبت به دستگاه مختصات ستاره‌دار، پالس نوری در یک مدت زمان $t_p^* = \gamma Y/c$ تا آینه می‌رود و دوباره برمی‌گردد، به طوری که رویداد E_p قطعاً رخ می‌دهد. به علت ویژگیهای رفتار ساعتها، مدت زمان t_p نسبت داده شده به این رویداد ممکن است در دستگاه مختصات بی‌ستاره متفاوت باشد، اما این رویداد مطمئناً رخ می‌دهد و بنابراین باید مدت زمان حقیقی t_p به آن نسبت داده شود. نتیجه می‌گیریم که سرعت v باید کمتر از c باشد.

این برداشت از نظریه نسبیت، که اشیای مادی نمی‌توانند با سرعتی بیشتر از سرعت نور حرکت کنند از لحاظ تجربی کاملاً تأیید شده است. مهندسان باید همواره این نتیجه و سایر برداشت‌های نظریه را در طراحی شتابگرهای ذرات که ذرات زیر اتمی را تا کسب انرژیهای بالا شتاب می‌دهند، منظور کنند. الکترونی در لامپ پرتو ایکس پرا انرژی، با انرژی 5000000 eV با سرعتی حدود 87% سرعت نور حرکت می‌کند. اگر قوانین مکانیک کلاسیک در این مورد صادق باشند، الکترونی با 10% برابر این انرژی با سرعت $\sqrt{10}$ برابر یا بیش از دو برابر سرعت نور، حرکت می‌کرد. اما، سرعت الکترونی با انرژی 5000000 eV فقط $99/88$ درصد سرعت نور است. این واقعیت که الکترونیهای با انرژی بیش از حدود یک میلیون ولت جملگی با سرعت تقریباً یکسانی حرکت می‌کنند، طراحی شتابگرهای خطی الکترون را به نحو چشمگیری آسان تر می‌کند. در شتابگر خطی الکترون به طول دو مایل (بیش از 3 کیلومتر) در دانشگاه استنفورد، الکترونها می‌توانند تا 2000 برابر این انرژی یا 10^7 eV شتاب بگیرند، که سرعت آنها در چنین انرژی‌ای فقط 10 سانتی متر بر ثانیه کمتر از سرعت نور است.

مشکل در مورد همزمانی فقط وقتی پیش می‌آید که تلاش می‌کنیم زمان وقوع دو رویدادی را مقایسه کنیم که در مکانهای مختلف در فضا رخ می‌دهند. اگر دو رویداد در یک مکان روی دهند، یا چندان به هم نزدیک باشند که زمان لازم برای انتشار نور از یکی به دیگری در قیاس با زمانهای مورد نظر برای هر مورد خاصی چشم‌پوشیدنی باشد، در این صورت مشکل همزمانی پیش نمی‌آید. بنابراین، رویدادهایی که در یک دستگاه مختصات در یک مکان، یا در این معنی تقریباً در یک مکان، و همزمان یا تقریباً همزمان، رخ می‌دهند، در هر دستگاه مختصات دیگری نیز همزمان یا تقریباً همزمان خواهند بود. به خصوص، می‌توانیم فرض کنیم که اگر ساعتی متحرک از برابر یک ساعت ثابت عبور کند، می‌توانیم قرائتهای روی آنها را در لحظه‌گذر به روشی نامبهم مقایسه کنیم، و اگر بخواهیم می‌توانیم ساعت‌هایی را همزمان کنیم به طوری که در آن لحظه همان قرائت را نشان دهند. به همین ترتیب، اگر دو ناظر نسبتاً متحرک در لحظه‌ای معین از کنار یکدیگر عبور کنند، و اگر در آن

لحظه زمان را روی ساعتی دوردست قرائت کنند (از طریق مشاهده نور یا سیگنالهای رادیویی گسیلی از آن)، با قرائت آنها در آن لحظه روی ساعت، تطبیق نخواهد کرد. اما، در مورد چگونگی تصحیح زمان لازم برای اینکه سیگنال نوری از ساعت دوردست گسیل شوند، تطبیق نخواهند کرد، زیرا هر کدام از این ناظران فرض می‌کند که سیگنال نوری با سرعت c نسبت به خود وی حرکت می‌کند. این زبان تصویری که به ناظرهایی با حرکت نسبی مربوط می‌شوند اغلب در نمایش اختلاف بین کمیتهای فیزیکی نسبت به دستگاههای مختصات مختلف، مناسب است. خواننده تشخیص خواهد داد که چنین زبانی بر هر ناهمخوانی واقعی در باره موقعیت فیزیکی دلالت نمی‌کند. اما، هر کسی، هر جور که حرکت کند، آزاد است که از اندازه‌گیری بهره‌گیرد که با هر ابزاری انجام گرفته، و آزاد است در محاسباتش از کمیتهای اندازه‌گیری شده نسبت به هر دستگاه مختصاتی بهره بگیرد، به شرط آنکه اندازه‌گیری به درستی انجام شده باشد. هر کمیت معین ممکن است نسبت به دو دستگاه مختصات مختلف مقادیر متفاوت داشته باشد، اما تمام ناظرها راجع به آن مقادیر با هم توافق کنند. در مثال بالا، هر ناظری می‌تواند تصحیح مربوط به مدت زمان حرکت نور نسبت به دستگاه مختصاتی را محاسبه کند که در آن ناظر دیگری در حال سکون است، و البته آنها در مورد آن تصحیح با هم موافق‌اند، مگر اینکه یکی از آنها در محاسبه‌اش اشتباه کرده باشد.

اگر دو رویداد E_1 و E_2 در دستگاه مختصات بی‌ستاره‌ای همزمان باشند، پس در هر دستگاه مختصاتی که بر خط واصل بین این دو رویداد عمود باشد، نیز همزمان خواهند بود. برای نشان دادن این موضوع، مبدأ O را نقطه میانی خط واصل دو رویداد می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که مبدأ O^* در امتداد عمود منتصف این خط، مطابق شکل ۱۳-۳، حرکت می‌کند. ساعتی ثابت در O و ساعتی متحرک در O^* ورود سیگنالهای نوری گسیلی از دو رویداد را ثبت می‌کنند. بنابر تقارن مکانی مشاهده می‌کنیم که در هر لحظه معین، و همانگونه که از هر یک از دو دستگاه مختصات دیده می‌شود، هر یک از دو ساعت در فاصله مساوی از نقاطی قرار دارد که رویدادهای E_1 و E_2 رخ دادند. اگر سیگنالهای نوری گسیلی از دو رویداد منتشر می‌شوند به‌طور همزمان به یکی از ساعتها برسند، باید به همین ترتیب به‌طور همزمان به ساعت دیگر هم برسند. بنابراین، در محاسبه زمان وقوع هر دو رویداد E_1 و E_2 ، تصحیح یکسان از زمان ورود به مبدأ تفریق می‌شود، و این گزاره در مورد هر دو دستگاه مختصات صادق خواهد بود. در نتیجه، اگر $t_1 = t_2$ ، همچنین $t_1^* = t_2^*$ ، هر چند که t_1 و t_2 به‌طور کلی مساوی نخواهند بود.

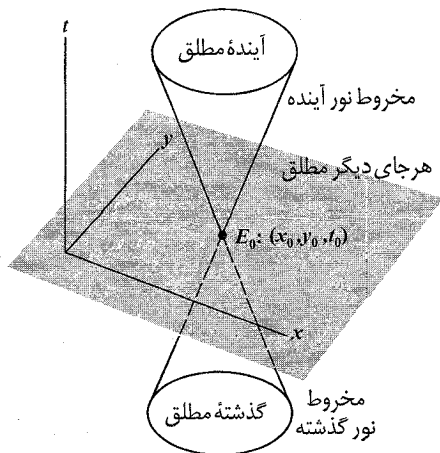


شکل ۱۳-۳ همزمانی وقوع دو رویداد روی خطی عمود بر جهت حرکت.

صحبت از مکان نقطه‌ای متحرک در فضا تنها وقتی معنی دار است که زمانی را مشخص کنیم که به آن رجوع می‌کنیم. اگر نیت، تبدیل یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگری، متحرک نسبت به اولی، باشد، تنها وقتی می‌توانیم این تبدیل را انجام دهیم که علاوه بر مختصات x, y, z آن نقطه، زمان t را که تبدیل در ظرف آن انجام می‌پذیرد نیز مشخص کنیم. برعکس، رویدادهایی که به آنها زمان یکسانی در یک دستگاه مختصات نسبت داده شده است، زمانهای مختلف در دستگاه مختصات دیگری نسبت داده می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که اگر بخواهیم متغیر زمان را از یک دستگاه مختصات به دیگری تبدیل کنیم، نه تنها باید زمان t بلکه نقطه فضایی x, y, z را که زمان t به آن مربوط می‌شود، نیز مشخص کنیم. مادام که تنها به یک تک دستگاه مختصات مراجعه می‌کنیم، می‌توانیم به‌طور جداگانه راجع به یک نقطه x, y, z در فضا و زمان t صحبت کنیم. ولی اگر بخواهیم به دو یا چند دستگاه مختصات با حرکت نسبی رجوع کنیم، یا اگر بخواهیم بدون مراجعه به دستگاه مختصات خاصی گزاره‌هایی را عرضه کنیم، در این صورت نه تنها باید درباره یک نقطه در فضا یا یک زمان جداگانه صحبت کنیم، بلکه به‌جای آن راجع به رویدادی که در نقطه خاصی در زمان خاص و اینکه در چه دستگاه مختصات خاصی مختصات (x, y, z, t) دارد، صحبت کنیم. اغلب راحت‌تر است که زبان هندسی را معرفی و به چهار متغیر (x, y, z, t) به‌عنوان نمایشگر یک «نقطه» در «فضای» چهاربعدی رجوع کنیم. برای اینکه تمیز بدهیم آیا راجع به فضای سه‌بعدی معمولی صحبت می‌کنیم یا در خصوص این فضای چهاربعدی، به «نقطه» چهاربعدی (x, y, z, t) به‌عنوان یک رویداد، و به فضای مربوطه به‌عنوان فضا - زمان رجوع خواهیم کرد. این کاربرد اصطلاحات هندسی راحت است، اما نباید دستخوش این خطا شویم که حاکی از آن است که هیچ تمایزی بین فضا و زمان وجود ندارد. طولها باید توسط میله‌های سنج و فواصل زمانی با یک ساعت اندازه‌گیری شوند. اینها مفاهیم فیزیکی مختلف ولی مرتبط‌اند، که به روشهای مختلف ولی مرتبط، اندازه‌گیری می‌شوند. لازم است که درباره چهار متغیر (x, y, z, t) توأم با یکدیگر بیندیشیم، به این علت که دو رویدادی که نسبت به یک دستگاه مختصات در محل یکسان در زمانهای مختلف رخ می‌دهند، در یک دستگاه مختصات متحرک در محل‌های مختلف رخ خواهند داد و برعکس، دو رویدادی که در یک دستگاه مختصات به‌طور همزمان در محل‌های مختلف رخ می‌دهند، در یک دستگاه مختصات متحرک در زمانهای مختلف رخ خواهند داد. اکنون رویداد E با مختصات (x_0, y_0, z_0, t_0) در یک دستگاه مختصات را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که یک سیگنال نوری کروی این رویداد را ترک می‌کند و در سراسر فضا حرکت می‌کند. این سیگنال نوری در زمان t به هر نقطه دیگر (x, y, z) خواهد رسید که بدیهی است به‌کمک معادله زیر بیان شود:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - c^2(t-t_0)^2 = 0 \quad (14-13)$$

مجموعه رویدادهای (x, y, z, t) که مختصاتشان در معادله (۱۴-۱۳) صدق می‌کنند، می‌گویند روی مخروط نوری نسبت به رویداد E قرار می‌گیرد. همچنین، معادله (۱۴-۱۳) توسط رویدادهایی با $t < t_0$ برقرار می‌شود که چنان جایگذاری شده‌اند که سیگنالی نوری که از رویداد (x, y, z, t) شروع به خارج شدن می‌کند، به رویداد E خواهد رسید. نظر به اینکه قانون انتشار نور



شکل ۱۳-۴ مخروط نوری.

در تمام دستگاههای مختصات یکسان است، اگر دستگاه مختصات ستاره‌داری را در نظر بگیریم که در آن مختصات رویداد E_0 عبارت باشد از $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, t_0^*)$ ، در این دستگاه مختصات همان مخروط نوری (۱۳-۱۴) از رویدادهایی تشکیل می‌شود که مختصاتشان در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$(x^* - x_0^*)^2 + (y^* - y_0^*)^2 + (z^* - z_0^*)^2 - c^2(t^* - t_0^*)^2 = 0. \quad (13-15)$$

ملاحظه می‌کنیم که شکل معادله مخروط نوری در تمام دستگاههای مختصات یکسان است، همان طوری که باید باشد، زیرا می‌توانیم مخروط نوری را نسبت به هر رویداد خاص E_0 بدون مراجعه به دستگاه مختصاتی، تعریف کنیم. این معادله شامل دو جزء است: یک مخروط نوری آینده که تمام رویدادهایی را دربر می‌گیرد که سیگنالی نوری که رویداد E_0 را ترک می‌کند به آن می‌تواند برسد، و یک مخروط نوری گذشته متشکل از تمام رویدادهایی است که از آنها یک سیگنال نوری می‌تواند به رویداد E_0 برسد.

می‌توانیم وضعیت را با معطوف کردن توجه خود به صفحه xy آسانتر تجسم کنیم. یک سیگنال نوری از رویداد E_0 شروع و در مسیر دایره‌شکل گسترده‌ای در این صفحه حرکت می‌کند. در شکل ۱۳-۴، دو مختصه x و y را به‌طور افقی و زمان t را به‌طور عمودی و با واحد مناسبی ترسیم می‌کنیم. در چنین طرحی، رویدادها در صفحه $z = z_0$ که مختصاتشان معادله (۱۳-۱۴) را برقرار می‌کنند روی یک زوج مخروط، مطابق شکل، قرار می‌گیرند.

مشاهده کرده‌ایم که مخروط نوری خودش به نحوی مستقل از دستگاه مختصات تعریف می‌شود و در تمام دستگاههای مختصات حاوی رویدادهای یکسان است. به همین ترتیب، درون مخروط نوری در تمام دستگاههای مختصات از یک مجموعه رویدادهای مشابه تشکیل می‌شود، اگرچه این رویدادها در دستگاههای مختلف، مختصات مختلفی خواهند داشت. هر رویداد E در درون مخروط نوری آینده در تمام دستگاههای مختصات دارای این خاصیت خواهد بود که هر شیئی که با سرعتی کمتر از c حرکت کند می‌تواند از E_0 به آن نزدیک شود، هر چند که سرعت خاص لازم در دستگاههای مختصات مختلف، متفاوت خواهد بود. مثلاً، دستگاه مختصاتی که مبدأ آن از E_0 به E می‌رود وجود دارد، که در آن E و E_0 در مکانی یکسان ولی در زمانهای مختلف رخ می‌دهند.

درونة مخروط نوری اغلب آینه‌د مطلق نسبت به رویداد E نامیده می‌شود؛ کلمه «مطلق» حاکی از آن است که این مجموعه از رویدادها در تمام دستگاههای مختصات یکسان است، و کلمه «آینه‌د» از این بابت به کار رفته است که به‌ازای هر یک از این رویدادهای E ، دستگاه مختصاتی یافت می‌شود که در آن E و E در مکان یکسانی رخ می‌دهند ولی زمان وقوع E بعد از زمان وقوع E است. انجام بحثی متناظر با بحث مربوط به درونة مخروط نوری گذشته را که گذشته مطلق نسبت به E نامیده می‌شود، به خواننده وامی‌گذاریم.

یک رویداد E خارج از مخروط نوری نسبت به E فقط می‌تواند از نقطه‌ای قابل دسترسی شود که E را ترک و با سرعتی بیش‌تر از c حرکت می‌کند اگر $t > t_0$ یا برعکس، اگر $t < t_0$. دو رویداد از این نوع نمی‌توانند با یکدیگر ارتباط برقرار کنند یا به‌صورت علی بر یکدیگر تأثیر گذارند، هیچ سیگنال یا شیئی فیزیکی نمی‌تواند یکی از آنها ترک کند و به دیگری برسد. مجموعه رویدادهای خارج از مخروط نوری گاهی در جای دیگر نسبت به E مطلق نامیده می‌شود. مشاهده کرده‌ایم که یک رویداد E که در جای دیگر نسبت به E مطلق است، دارای این خاصیت است که در بعضی دستگاههای مختصات ممکن است قبل از E و در دستگاههای مختصات دیگر بعد از E رخ دهد. بنابراین پیوستگی، می‌توان این بحث را به میان کشید که دستگاه مختصاتی وجود دارد که در آن این دو رویداد به‌طور هم‌زمان ولی در جاهای مختلف رخ می‌دهند. بعداً وقتی معادلاتی برای تبدیل لورنتس می‌نویسیم، خواننده قادر خواهد بود آن دستگاه مختصات را به‌طور صریح برای هر زوج رویداد معین E و E پیدا کند (مسئله ۱۰).

به این ترتیب، پنج رابطه ممکن متفاوت بین دو رویداد E و E برقرار است، که دارای معنایی مستقل از هر دستگاه مختصات‌اند. رویداد E ممکن است در جای دیگر مطلق از E باشد، ممکن است در آینه‌د مطلق یا گذشته مطلق نسبت به E باشد، یا ممکن است روی مخروط نوری آینه‌د یا روی مخروط نوری گذشته نسبت به E باشد. اگر در دستگاه مختصاتی E و E دارای مختصات (x, y, z, t) و (x_0, y_0, z_0, t_0) باشند، می‌توانیم بیازماییم که کدام یک از این روابط بر حسب اینکه آیا کمیت مشروح در زیر بیشتر از، کمتر از، یا مساوی با صفر باشد، برقرار است:

$$S = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 \quad (13-16)$$

و در دو حالت اخیر، آیا کمیت $(t - t_0)$ بزرگتر از صفر است یا کوچکتر از آن. کمیت S که از معادله (۱۳-۱۶) به‌دست می‌آید، خودش مستقل از دستگاه مختصاتی است که در آن S محاسبه می‌شود (مسئله ۱۱).

۱۳-۴ رفتار ساعتها و میله‌های سنجه

پیش از به‌دست آوردن معادلات تبدیل بین دو دستگاه مختصات که نسبت بهم حرکت می‌کنند، ابتدا از اصل (۱۳-۲) برای تعیین رفتار ساعتها و میله‌های سنجه متحرک بهره می‌گیریم. برای اینکه قانون جدید برای ساعت‌های متحرک را به‌دست آوریم، مانند همیشه در فیزیک، ساده‌ترین وضعیت را برای مطالعه اختیار می‌کنیم. دو ساعت را، یکی ساکن در مبدأ O دستگاه مختصات بی‌ستاره، و دیگری در مبدأ O^* دستگاه مختصاتی که با سرعت v در امتداد محور x حرکت می‌کند، در نظر می‌گیریم. فرض خواهیم کرد که این دو ساعت چنان هم‌زمان می‌شوند که در لحظه‌ای که ساعت متحرک از مقابل ساعت

ثابت می‌گذرد هر دو صفر را قرائت می‌کنند. نظر به اینکه ما باید قانون انتشار نور را در هر دو دستگاه مختصات به کار گیریم، لازم است که فواصل را نسبت به دو دستگاه مختصات مقایسه کنیم. تنها فواصل اصلی را که در حال حاضر می‌دانیم چگونه باید نسبت به دو دستگاه مختصات مقایسه کنیم، فواصلی اند که عمود بر جهت حرکت اندازه‌گیری می‌شوند. بنابراین، ترتیبی اتخاذ می‌کنیم که در شکل ۱۳-۲ نشان داده شده است. قبلاً معادلات (۱۳-۱۰) و (۱۳-۱۱) را برای زمان ورود پالس نوری در نقطه O^* به دست آوردیم که به وسیلهٔ دو ساعت اندازه‌گیری می‌شود؛ و از آنها نتیجه می‌گیریم

$$t_p^* = t_p \left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} \quad (13-17)$$

بنابراین، ساعت متحرک با ضریب $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$ آهسته‌تر از ساعت ثابت کار می‌کند، که در دستگاه مختصات بی‌ستاره اندازه‌گیری شده است.

این اثر، به نام اتساع زمان، به‌طور تجربی و در عمل به‌خوبی تأیید می‌شود. نیمه‌عمر اندازه‌گیری شدهٔ ذرات پرتوزا، مثلاً مویونها، وقتی ذرات با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کنند نسبت به وقتی که همان ذرات ساکن‌اند، به‌نحو چشمگیری طولانی‌ترند،^۱ و نسبت زمانهای حیات آنها دقیقاً از عبارت $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$ به دست می‌آید. اثر موسباوتر^۲ روشی ارائه می‌کند برای اندازه‌گیری بسامدهای نوری (پرتوهای گاما) گسیلی از هسته‌های پرتوزا، با دقتی بسیار بالا، دقیق‌تر از یک در 10^{14} . این رقم برای اندازه‌گیری تغییر بسامد ناشی از سرعت ۳۰ متر در ثانیه، کافی است. بنابراین، می‌توانیم فرمول (۱۳-۱۷) را برای ساعت‌هایی بررسی کنیم که با سرعت‌هایی کاملاً معمولی حرکت می‌کنند.

اگر ساعت متحرکی سرعتش را تغییر دهد، و اگر فرض کنیم که شتاب چندان کوچک است که بر آهنگ کار کردن ساعت بی‌تأثیر است، در این صورت از بحث بالا انتظار داریم که ساعت متحرک در هر لحظه با ضریب $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$ آهسته‌تر کار کند، که در آن v سرعت لحظه‌ای ساعت است. اگر t^* زمانی باشد که روی ساعت متحرک قرائت می‌شود، و t زمان نسبت به یک دستگاه مختصات لخت باشد که در آن دستگاه ساعت با سرعت v حرکت می‌کند، در این صورت

$$dt^* = dt \left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} \quad (13-18)$$

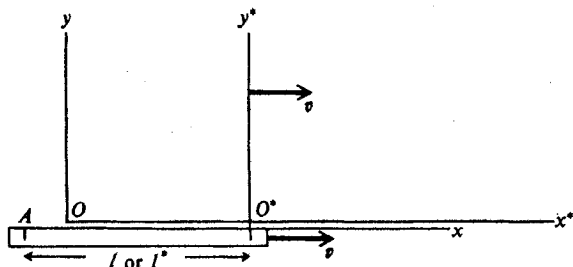
رابطهٔ بین t^* و t از طریق انتگرال‌گیری از این معادله به دست می‌آید. طبق اصول موضوع نسبیت لازم است به این نتیجه برسیم که آهنگ کار کردن یک ساعت به سرعتش بستگی دارد. لازم نیست فرض کنیم که این آهنگ به شتاب بستگی دارد. از لحاظ تجربی، فرمول (۱۳-۱۸) حتی برای ساعت‌های شتابدار، به‌خوبی تأیید می‌شود. هیچ‌گونه اثری از شتاب مشاهده نشده است، مگر در مورد آثار واضح شتاب‌های شدید، که به سازوکار ساعت خاص مورد نظر بستگی دارند. از جنبهٔ نظری، اگر فرض کنیم ساعتها مطابق فرمول (۱۳-۱۸) عمل می‌کنند، نظریهٔ خاص نسبیت مجموعهٔ قوانین فیزیکی سازگاری به دست می‌دهند.

1. D. H. Frisch and J. H. Smith, "Measurement of the Relativistic Time Dilation Using μ -Mesons," *Amer. J. Phys.*, 31, 342 (May, 1963).

2. S. DeBenedetti, "The Mossbauer Effect", *Scientific American*, April, 1960, p. 72. Available as Offprint No. 271 from W. H. Freeman and Co., San Francisco.

اکنون به آن دو ساعت برگردیم که، یکی ساکن در دستگاه مختصات بی ستاره، و دیگری ساکن در دستگاه مختصات ستاره‌دار است و با سرعت v نسبت به دستگاه بی ستاره حرکت می‌کند. بنا بر اصل موضوع نسبیت، ساعت بی ستاره باید به همین طریق نشان دهد که آهسته‌تر از ساعت ستاره‌دار کار می‌کند، همانگونه که از دستگاه مختصات ستاره‌دار اندازه‌گیری شده است. رشته رویدادها در دستگاه مختصات ستاره‌دار در شکل ۱۳-۲ (ب) نشان داده می‌شود. معادلات مربوطه عبارت‌اند از (۱۳-۹) و (۱۳-۱۲) که بر این نتیجه‌گیری دلالت می‌کنند که، از دید دستگاه مختصات ستاره‌دار، ساعت بی ستاره با همان ضریب $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$ آهسته‌تر کار می‌کند. وقتی یک ساعت با سرعت ثابت v نسبت به دیگری حرکت می‌کند، هر دو ساعت تنها یک بار می‌توانند در نزدیکی نقطه مشترکی واقع باشند. بنابراین، تنها این امکان وجود دارد که در یک نقطه به‌طور مستقیم زمانی را که نشان می‌دهند، مقایسه کنیم. در این مورد، به این انتخاب دست زده‌ایم که هر دو ساعت را چنان میزان کنیم که در این زمان عدد صفر را نشان دهند. از آنجا که در هر زمان دیگری دو ساعت به فاصله‌ای از هم جدا خواهند بود، برای مقایسه وقت‌هایشان در هر زمان بعدی لازم است تعریف کنیم که منظورمان از زمان یکسان در دو جای مختلف، چیست. همان طوری که مشاهده کرده‌ایم، انجام این کار به روشی که مستقل از دستگاه مختصات باشد، ناممکن است. در دستگاه مختصات بی ستاره، وقتی پالس نوری به O^* می‌رسد، ساعت در مبدأ زمان t_p را قرائت می‌کند. لکن در دستگاه مختصات ستاره‌دار، وقتی ساعت در مبدأ زمان t_p را قرائت می‌کند، رویداد در O بعد از آنکه پالس نوری به O^* رسیده است، رخ می‌دهد. درست به این دلیل امکان‌پذیر می‌شود که ساعت‌های یک دستگاه مختصات در مقایسه با ساعت‌های دستگاه مختصات دیگر آهسته‌تر کار کنند.

اگر قرار بر این بود که ساعت ستاره‌دار در زمانی سرعتش را معکوس کند و برگردد و از O بگذرد، می‌توانستیم در آن موقع دوباره به‌طور مستقیم زمانهای نشان داده شده به وسیله ساعتها را مقایسه کنیم، و نتیجه‌گیری‌مان از معادله (۱۳-۱۸) از این قرار است که ساعت ستاره‌دار در آن لحظه زمان کوتاه‌تری از ساعت بی ستاره را نشان می‌دهد. می‌توان ضریب کوتاه‌تری را از طریق انتگرال‌گیری از معادله (۱۳-۱۸) از زمانی محاسبه کرد که تا آن لحظه ساعتها آخرین بار یکدیگر را ملاقات کردند. این حقیقت که ساعت ستاره‌دار فاصله زمانی کوتاه‌تری را نسبت به ساعت بی ستاره بین دو برخوردشان نشان می‌دهد، گزاره‌ای مستقل از هر دستگاه مختصات است، زیرا ساعتها را می‌توان به‌طور مستقیم در هر دو برخورد مقایسه کرد؛ اما این بیان ناقض اصل موضوع نسبیت نیست زیرا ساعت ستاره‌دار



شکل ۱۳-۵ اندازه‌گیری طول یک جسم متحرک.

شتاب داده شده است و بنابراین نمی‌تواند به‌عنوان مبدأ دستگاه مختصاتی لخت تلقی شود. اگرچه این تذکر هر ناسازگاری منطقی با اصل (۱۳-۱) را برطرف می‌کند، ولی به‌طور ادراکی وضعیتی نه چندان رضایت‌بخش باقی می‌گذارد. این وضعیت را به‌طور دقیق‌تر در بخش ۱۳-۶ مطالعه می‌کنیم. اکنون با استفاده از نتیجه بالا رفتار یک میله سنجه متحرک یا هر جسم صلب متحرک را تعیین می‌کنیم؛ منظور ما از جسم صلب در این حالت صرفاً جسمی است که تمام قسمت‌هایش با سرعت یکسان حرکت می‌کنند. فرض کنید میله سنجه موازی محور x توجیه می‌شود و با سرعت ثابت v موازی با محور x ، حرکت می‌کند. یک دستگاه مختصات ستاره‌دار معرفی می‌کنیم، همان‌طوری که در شکل ۱۳-۵ نشان داده شده، که با سرعت v حرکت می‌کند. دو نقطه O^* و A روی میله سنجه متحرک ثابت‌اند. می‌خواهیم فاصله l^* بین نقاط O^* و A ، اندازه گرفته شده در دستگاه مختصات متحرک، را برحسب فاصله l بین همان دو نقطه، اندازه گرفته شده در دستگاه مختصات ثابت، تعیین کنیم. در هر دو دستگاه مختصات فاصله زمانی بین گذر O^* و A از ساعت واقع در مبدأ O را اندازه خواهیم گرفت. چون سرعت هر دستگاه مختصات نسبت به دیگری v است، خواهیم داشت

$$l = vt, \quad (13-19)$$

$$l^* = vt^*, \quad (13-20)$$

که در اینجا طبق معمول فرض می‌کنیم که ساعتها در O و O^* همزمان می‌شوند که در لحظه‌ای که دو مبدأ از مقابل یکدیگر می‌گذرند، صفر را نشان دهند، و t و t^* زمانهای اندازه‌گیری شده‌اند، وقتی نقطه A از مبدأ O می‌گذرد. چون هر دو رویدادی که قرار است فاصله زمانی‌شان اندازه‌گیری شود در مکان O رخ می‌دهند، ابهامی در زمان اندازه گرفته شده t وجود ندارد. لکن این دو رویداد در دستگاه مختصات ستاره‌دار در مکانهای مختلف رخ می‌دهند، و در نتیجه استفاده از قانون انتشار نور در دستگاه ستاره‌دار مستلزم تصحیحی در زمان t^* است. بنابراین، باید وضعیت را از دیدگاه دستگاه مختصات ستاره‌دار بازدید کرد، زیرا در آن دستگاه مختصات است که زمان t^* اندازه‌گیری می‌شود. در آن دستگاه مختصات، ساعت واقع در O به اندازه ضریب $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$ آهسته‌تر کار می‌کند. از این رو از بحث قبلی نتیجه می‌گیریم که

$$t = t^* \left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (13-21)$$

و بنابراین می‌رسیم به:

$$l = l^* \left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (13-22)$$

طول اندازه‌گیری شده l میله سنجه متحرک با ضریب $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$ از طول l^* اندازه‌گیری شده در دستگاه مختصاتی که در آن میله سنجه ساکن باشد، کوتاه‌تر است. طول هر شیئی متحرک اندازه‌گیری شده در دستگاه مختصاتی که در آن دستگاه آن شیء ساکن است، طول ساکن شیء نامیده می‌شود. طول ساکن هر شیئی مفهومی مطلق است، زیرا برحسب خود شیء تعریف می‌شود. اگر طول ساکن شیئی را با l_0 نشان دهیم، برای طول هر شیئی که با سرعت v در جهتی موازی آن طول حرکت می‌کند، داریم

$$l = l_0 \left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} \quad (13-23)$$

انقباض طول جسم صلب متحرک را که از معادله (۱۳-۲۳) به‌دست می‌آید انقباض لورنتس

نامند. این مفهوم را نخستین بار در سال ۱۸۹۳ میلادی فیزجرالد معرفی کرد و در سال ۱۸۹۵ میلادی لورنتس برای تشریح نتیجه‌ی تھی آزمایش مایکلسون - مورلی از آن بهره گرفت. لورنتس نشان داد که اگر قرار بر آن بود ابزار مایکلسون در جهتی که حرکت می‌کند بنا به معادله (۱۳-۲۳) منقبض شود، این انقباض اثر حرکتش را دقیقاً خنثی می‌کرد، به طوری که به نظر می‌آید سرعت نور در تمام جهات حتی نسبت به ابزار متحرک، یکسان است. اینشتین گوشزد کرد که اگر طبیعت در این راه توطئه کند و نگذارد که ما به طور تجربی حرکت مطلق ابزارهایمان را تعیین کنیم، اندیشه‌ی سرعت مطلق معنی نخواهد داشت. در نتیجه، او پذیرفتن اصل موضوع نسبیت را پیشنهاد کرد، که از آن همان طوری که ملاحظه کرده‌ایم، فرمول انقباض لورنتس را می‌توان به دست آورد. در واقع، لورنتس با فراتر نهادن نشان داد که اگر ابزاری به طریقی از ذراتی ساخته شود که بر آنها تنها نیروهای الکتریکی طبق معادلات ماکسول وارد آیند، به‌عنوان نتیجه‌ای از این معادلات، ابزار واقعاً طبق فرمول (۱۳-۲۳) منقبض خواهد شد. ملاحظه می‌کنیم که اگر اصول نسبیت برقرار باشند، ابزار در هر حالتی طبق این فرمول منقبض خواهند شد، مستقل از اینکه چه قانون نیرویی بین اجزاء‌اش حاکم است. از آنجا که این کمیتها در نظریه نسبیت به فراوانی یافت می‌شوند، راحت‌تر است که اختصارات زیر را معرفی کنیم:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (13-24)$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (13-25)$$

در اینجا سرعت v ممکن است سرعت هر جسم متحرک یا سرعت دستگاه مختصاتی نسبت به دستگاه مختصات دیگری باشد. اکنون می‌توان معادله (۱۳-۲۳) را به صورت زیر نوشت:

$$l = \frac{l_0}{\gamma}. \quad (13-26)$$

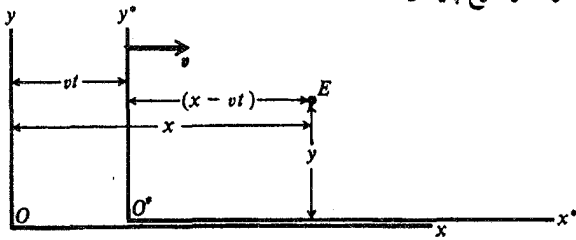
اگر $d\tau$ بازه‌ی زمانی ثبت شده توسط ساعتی باشد که با سرعت v نسبت به دستگاهی مختصات حرکت می‌کند، و اگر dt بازه‌ی زمانی مربوطه باشد که در آن دستگاه اندازه‌گیری شده، از معادله (۱۳-۱۸) می‌رسیم به:

$$dt = \gamma d\tau. \quad (13-27)$$

مدت زمانی را که ساعتی ثبت می‌کند که روی جسمی متحرک قرار داده شده و با آن جسم حرکت می‌کند، زمان عادی نسبت به آن جسم می‌نامند. این تعریف نیز از دستگاه مختصات مستقل است. رابطه بین زمان عادی نسبت به جسمی متحرک و زمان مختصه‌ای در دستگاه مختصات خاصی از طریق انتگرال‌گیری از معادله (۱۳-۲۷) به دست می‌آید، که γ را از سرعت $v(t)$ جسم نسبت به دستگاه مختصات ارزیابی می‌کند.

۱۳-۵ تبدیل لورنتس

اکنون در موقعیتی هستیم که روابط بین مختصات یک رویداد را در دو دستگاه مختصات لخت مختلف به دست آوریم. برای اجتناب از هر گونه پیچیدگی نالازم، فرض می‌کنیم دستگاههای مختصات ستاره‌دار و بی‌ستاره موازی دارند، محورهای x و x^* منطبق‌اند، مبدأهای O و O^* در $t = t^* = 0$ منطبق‌اند، و جهت حرکت، مطابق شکل ۱۳-۶، موازی محورهای x و x^* است. یک رویداد E را در نظر بگیرید که در نقطه (x, y, z) در زمان t در دستگاه مختصات بی‌ستاره



شکل ۱۳-۶ دو دستگاه مختصات در حرکت نسبی.

رخ می‌دهد. فرض کنید مختصات ستاره‌دار این رویداد عبارت باشد از (x^*, y^*, z^*, t^*) . قبلاً نشان داده‌ایم که مختصات اندازه‌گیری شده عمود بر جهت حرکت، در دو دستگاه یکسان‌اند:

$$y^* = y, \quad z^* = z. \quad (13-28)$$

در شکل ۱۳-۶ وضعیت را از دید دستگاه مختصات بی‌ستاره مشاهده می‌کنید. می‌بینیم که در زمان t فاصله رویداد E از صفحه y^*z^* ، اندازه‌گیری شده در دستگاه مختصات بی‌ستاره، عبارت است از

$$l = x - vt. \quad (13-29)$$

توجه کنید که l فاصله ثابت بین صفحه y^*z^* و نقطه‌ای است که با سرعت v حرکت می‌کند، و بنابراین در دستگاه مختصات ستاره‌دار در حال سکون است، و از رویداد E می‌گذرد. در نتیجه، بنا بر معادله (۱۳-۲۶)، داریم

$$x^* = l = \gamma(x - vt). \quad (13-30)$$

برای تعیین کردن زمان t^* نسبت داده شده به رویداد E در دستگاه مختصات ستاره‌دار، فرض می‌کنیم که یک سیگنال نوری گسیل شده از رویداد E به نقطه $(0, y^*, z^*)$ در صفحه y^*z^* می‌رسد. چون این سیگنال نوری با سرعت c به چپ حرکت می‌کند و صفحه y^*z^* با سرعت v به راست حرکت می‌کند، سرعت نسبی آنها در دستگاه مختصات بی‌ستاره $v + c$ است، و در نتیجه زمان ورود سیگنال به صفحه y^*z^* در دستگاه مختصات بی‌ستاره عبارت است از:

$$t_1 = t + \frac{x - vt}{v + c}. \quad (13-31)$$

از آنجا که ساعت‌های متحرک در نقاط $(0, y^*, z^*)$ و O^* روی خطی عمود بر جهت حرکت نسبی قرار دارند، اگر این دو ساعت در دستگاه مختصات ستاره‌دار همزمان شده باشند، در دستگاه مختصات بی‌ستاره نیز همزمان‌اند، اگرچه البته آهسته‌کار می‌کنند و بنابراین زمان بی‌ستاره درست را نشان نمی‌دهند. پس زمان t_1^* قرائت شده در ساعت ستاره‌دار وقتی سیگنال نوری به نقطه $(0, y^*, z^*)$ می‌رسد، همان است که در ساعت واقع در O^* به‌طور همزمان ثبت کرده که بنا بر معادله (۱۳-۱۷) عبارت است از:

$$t_1^* = \frac{t_1}{\gamma}. \quad (13-32)$$

با انجام تصحیح برای زمان سفر نور در دستگاه مختصات ستاره‌دار، زمان t^* از این قرار تعیین می‌شود:

$$t^* = t_1^* - \frac{x^*}{c}. \quad (13-33)$$

با جایگذاری از سه معادله پیشین و بعد از انجام چند عمل ساده جبری، می‌رسیم به:

$$t^* = \gamma \left[t - \left(\frac{vx}{c^2} \right) \right]. \quad (۱۳-۳۴)$$

برای آسانی رجوع در آینده، معادلات تبدیل لورنتس (۱۳-۲۸)، (۱۳-۳۰) و (۱۳-۳۴) که، مطابق آرایش شکل ۱۳-۶، بین دو دستگاه مختصات رابطه برقرار می‌کنند، تحت یک شماره (۱۳-۳۵) ثبت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^* &= \gamma(x - vt), \\ y^* &= y, \\ z^* &= z, \\ t^* &= \gamma \left[t - \left(\frac{vx}{c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (۱۳-۳۵)$$

این معادلات مهم را باید به حافظه سپرد، کاری که نسبتاً آسان است، در صورتی که به تقارن بین معادلات اول و آخر توجه کنیم، و به خاطر داشته باشیم که معادله اول دقیقاً همان معادله کلاسیکی است که از طریق ضریب انقباض لورنتس، γ ، تصحیح شده است.

با در نظر داشتن معادلات (۱۳-۳۵)، می‌توانیم به روشی سراسر معادلات تبدیل بین هر دو دستگاه مختصات لختی را تشکیل دهیم. اگر مبدأهای O و O^* منطبق نشوند، در این صورت مختصات x^* ، y^* ، z^* و t^* در دستگاه مختصات ستاره‌دار رویداد $x=y=z=t=0$ در مبدأ O را صرفاً به سمت راست معادله (۱۳-۳۵) اضافه می‌کنیم. اگر محورهای دستگاههای ستاره‌دار و بی‌ستاره موازی نباشند، دستگاه مختصات سومی را، به نام دستگاه پریم‌دار، معرفی می‌کنیم که مبدأ آن منطبق بر O و محورهای موازی با محورهای ستاره‌دار هستند. چون دستگاههای مختصات پریم‌دار و بدون پریم نسبت به یکدیگر حرکت نمی‌کنند، از طریق معادلات (۷-۱۳) بین آنها رابطه برقرار می‌شود:

$$\begin{aligned} x' &= x(\hat{x} \cdot \hat{x}') + y(\hat{y} \cdot \hat{x}') + z(\hat{z} \cdot \hat{x}'), \\ y' &= x(\hat{x} \cdot \hat{y}') + y(\hat{y} \cdot \hat{y}') + z(\hat{z} \cdot \hat{y}'), \\ z' &= x(\hat{x} \cdot \hat{z}') + y(\hat{y} \cdot \hat{z}') + z(\hat{z} \cdot \hat{z}'), \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (۱۳-۳۶)$$

اکنون مختصات ستاره‌دار از طریق معادلات (۱۳-۳۵) داده می‌شوند که در آنها x' ، y' ، z' و t' به جای x ، y ، z و t در طرف راست قرار می‌گیرند، و متغیرهای اولی از طریق معادلات (۱۳-۳۶) به دست می‌آیند، و اگر مبدأهای O و O^* منطبق نباشند x^* ، y^* ، z^* و t^* نیز اضافه می‌شوند.

همان طوری که ملاحظه کرده‌ایم، سرعت دستگاه مختصات بی‌ستاره نسبت به دستگاه مختصات ستاره‌دار β است. معادلات مربوط به تبدیل معکوس که x ، y ، z و t را بر حسب x^* ، y^* ، z^* و t^* بیان می‌کنند، از معادلات (۱۳-۳۵) با برداشتن ستاره‌ها در سمت چپ و ستاره‌دار کردن متغیرها در سمت راست، و تعویض علامت β ، به دست می‌آیند (مسئله ۹).

ما معادلات تبدیل لورنتس را از اصول موضوع (۱۳-۱) و (۱۳-۲) به دست آورده‌ایم. برعکس، با توجه به معادلات (۱۳-۳۵) و قراردادهایمان در مورد روشی که قرار است مختصات و زمان در هر دستگاه مختصاتی به کمک آنها تعریف شوند، می‌توانیم نشان دهیم که قانون انتشار نور در تمام

دستگاههای لخت یکسان است. فرض کنید می‌دانیم نور در دستگاه مختصات ستاره‌دار با سرعت c منتشر می‌شود، و معادلات تبدیل (۱۳-۳۵) تیز داده شده‌اند. برای اینکه حالت کاملاً کلی را بررسی کنیم، یک پالس نوری را در نظر می‌گیریم که با زاویه α نسبت به محور x منتشر می‌شود. با اختیار کردن محورهای مناسب، معادلاتی که پالس نوری را توصیف می‌کنند، عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}x &= ct \cos \alpha, \\y &= ct \sin \alpha, \\z &= 0.\end{aligned}\quad (13-37)$$

اگر این معادلات را در معادلات (۱۳-۳۵) بنشانیم، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}x^* &= \gamma ct (\cos \alpha - \beta), \\y^* &= ct \sin \alpha, \\z^* &= 0. \\t^* &= \gamma t (1 - \beta \cos \alpha),\end{aligned}\quad (13-38)$$

(به خاطر بیاورید که $\beta = v/c$). معادله آخر از این مجموعه معادلات را بر حسب t حل می‌کنیم و در سه معادله اول می‌نشانیم تا معادلات حرکت پالس نوری را در دستگاه ستاره‌دار به دست آوریم که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}x^* &= ct^* \cos \alpha^*, \\y^* &= ct^* \sin \alpha^*, \\z^* &= 0,\end{aligned}\quad (13-39)$$

که در آن اختصارات زیر را به کار برده‌ایم

$$\begin{aligned}\cos \alpha^* &= \frac{(\cos \alpha - \beta)}{(1 - \beta \cos \alpha)}, \\ \sin \alpha^* &= \frac{\sin \alpha}{\gamma (1 - \beta \cos \alpha)}.\end{aligned}\quad (13-40)$$

معادلات (۱۳-۴۰) یک زاویه حقیقی α^* را تعریف می‌کنند، مشروط بر اینکه

$$\cos^2 \alpha^* + \sin^2 \alpha^* = 1. \quad (13-41)$$

با جایگذاری از معادلات (۱۳-۴۰)، معادله (۱۳-۴۱) به آسانی توجیه می‌شود. بنابراین، نشان داده‌ایم که پالس نوری نیز در دستگاه مختصات ستاره‌دار با سرعت c ولی با زاویه متفاوت α^* نسبت به محور x^* منتشر می‌شود. معادلات تبدیل لورنتس تضمین می‌کنند که هرگاه قانون انتشار نور در یک دستگاه برقرار باشد، در تمام دستگاههای مختصات برقرار است. پس نتیجه می‌گیریم که اگر از معادلات (۱۳-۳۵) شروع کنیم، می‌توانیم نتایج به دست آمده در بخش ۱۳-۴ را استنتاج کنیم. اکنون می‌توانیم دو اصل (۱۳-۱) و (۱۳-۲) را به‌طور صریح‌تری به شکلی دیگر بیان کنیم:

توانیم فیزیکی باید چنان باشند که اگر مختصات و زمان طبق معادلات تبدیل لورنتس (۱۳-۴۲) تبدیل شده باشند، همان شکل خود را در دستگاه مختصات جدید نیز حفظ کنند. (۱۳-۳۵)

برنامه ما عبارت است از واری قوانین فیزیکی گوناگون در قبال این اصل موضوع و یافتن جرح و تعدیلهای مناسب برای آنها که در این اصل صدق نمی‌کنند. البته قوانین فیزیک علاوه بر مختصات و زمان شامل کمیتهای فیزیکی دیگری هم هستند. برای بررسی شکل این قوانین وقتی دستگاه مختصات عوض می‌شود، لازم است بدانیم که این کمیتهای فیزیکی دیگر، چگونه تغییر می‌کنند. این کار ممکن است به دو طریق انجام پذیرد. می‌توان تعریف عملیاتی هر کمیت را بررسی و برای تعیین چگونگی تبدیل این کمیت از طریق این استلزام که کمیت موردنظر دارای تعریف عملی یکسانی در هر دستگاه مختصات است، تلاش کرد. وقتی معادلات تبدیل تمام کمیتهای فیزیکی درگیر تعیین شدند، می‌توان هر قانون مفروضی را آزمود و دید که آیا در اصل موضوع نسبت صدق می‌کند یا خیر. از طریق دیگری هم می‌توان این سؤال را مطرح کرد: چه قوانین تبدیلی برای کمیتهای دیگر غیر از مختصات و زمان باید فرض کنیم تا یک مجموعه پیشنهادی از قوانین فیزیکی با اصل نسبت سازگار باشد؟ البته بعد از آن باید نشان دهیم که این قوانین تبدیل مفروض با همان تعریف عملی هر کمیت فیزیکی در هر دستگاه مختصات لخت سازگار است.

۱۳-۶ برخی کاربردهای تبدیل لورنتس

برای تشریح کاربرد معادلات تبدیل لورنتس، فرمولی برای اثر دوپلر نسبیتی ناشی از حرکت منبع نوری را به دست خواهیم آورد. منبعی که با سرعت v حرکت می‌کند یک سیگنال الکترومغناطیسی با بسامد (زاویه‌ای) ω^* نسبت به منبع گسیل می‌کند. می‌خواهیم بسامد، ω ، این سیگنال را به صورتی که در نقطه‌ای ساکن مشاهده می‌شود، بیابیم. این مسئله را می‌توان به آسانی و به‌طور مستقیم در یک تک دستگاه مختصات ثابت با استفاده از قانون (۱۳-۱۸) برای آهنگ کار کردن ساعتی متحرک، حل کرد (مسئله ۱۳). لکن، برای تشریح کاربرد تبدیل لورنتس، ابتدا معادله‌ای برای موج نوری در دستگاه مختصات ستاره‌داری می‌نویسیم که در آن منبع نوری ساکن است، و سپس این معادله را به دستگاه بی‌ستاره منتقل می‌کنیم.

فرمول موج سینوسی تخت که با بسامد ω^* در جهت x^* با سرعت c منتشر می‌شود، از این قرار خواهد بود:

$$W = A \cos \left[\left(\frac{\omega^*}{c} \right) (x^* - ct^*) + \theta \right],$$

همان طوری که در پاراگراف دوم از بخش ۸-۳ نشان داده شده است، می‌توان این معادله را به مورد موجی نوری که در جهت یک بردار یکه \hat{n}^* حرکت می‌کند، از طریق تعریف کردن بردار موجی

$$k^* = \hat{n}^* \omega^* / c, \quad (13-43)$$

و با قرار دادن

$$W = A \cos (k^* \cdot r^* - \omega^* t^* + \theta), \quad (13-44)$$

تعمیم داد که در آن W مؤلفه‌ای است از میدان الکترومغناطیسی، و $r^* = (x^*, y^*, z^*)$. ما فاز موج، یعنی شناسه کسینوس را که شامل اطلاعاتی در باره بسامد، سرعت، و جهت انتشار موج است، می‌خواهیم. فاز را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$k^* \cdot r^* - \omega^* t^* + \theta = k_x^* x^* + k_y^* y^* + k_z^* z^* - \omega^* t^* + \theta. \quad (13-45)$$

با جایگذاری از معادلات تبدیل لورنتس (۱۳-۳۵) و جمع کردن جملات حاوی x, y, z ، و t

به‌طور جداگانه، فاز را در دستگاه مختصات بی‌ستاره به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$k^* \cdot r^* - \omega^* t^* + \theta = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \theta, \quad (۴۶-۱۳)$$

که در آن اختصارات زیر را به کار برده‌ایم

$$\begin{aligned} k_x &= \gamma \left[k_x^* + \left(\frac{v \omega^*}{c^2} \right) \right], \\ k_y &= k_y^*, \\ k_z &= k_z^*, \\ \omega &= \gamma (\omega^* + v k_x^*) \end{aligned} \quad (۴۷-۱۳)$$

مشاهده می‌کنیم فازی که انتشار موج را توصیف می‌کند، در هر دو دستگاه مختصات شکل یکسانی دارد. در زیر خواهیم دید که معادله‌ای چون معادله (۴۳-۱۳) بین بردار انتشار، k ، و سرعت انتشار، c ، همان‌طوری که باید، با بسامد، ω ، رابطه برقرار می‌کند. خواننده متوجه تشابه بین معادلات تبدیل (۴۷-۱۳) بر حسب کمیت‌های k و ω و معادلات تبدیل (۱۳-۳۵) خواهد شد؛ در فصل آینده به این نکته مراجعه خواهیم کرد.

اکنون فرض می‌کنیم که موج در دستگاه مختصات ستاره‌دار در صفحه $x^* y^*$ تحت زاویه α^*

$$\begin{aligned} k_x^* &= \left(\frac{\omega^*}{c} \right) \cos \alpha^*, \\ k_y^* &= \left(\frac{\omega^*}{c} \right) \sin \alpha^*, \\ k_z^* &= 0. \end{aligned} \quad (۴۸-۱۳)$$

نسبت به محور x^* منتشر می‌شود، به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} k_x &= \left(\frac{\gamma \omega^*}{c} \right) (\cos \alpha^* + \beta), \\ k_y &= \left(\frac{\omega^*}{c} \right) \sin \alpha^*, \\ k_z &= 0, \\ \omega &= \gamma \omega^* (1 + \beta \cos \alpha^*). \end{aligned} \quad (۴۹-۱۳)$$

مشاهده می‌کنیم که در دستگاه مختصات بی‌ستاره، موج تحت زاویه‌ای α نسبت به محور x منتشر می‌شود که به کمک فرمولهای زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{k_x c}{\omega} = \frac{(\cos \alpha^* + \beta)}{(1 + \beta \cos \alpha^*)}, \\ \sin \alpha &= \frac{k_y c}{\omega} = \frac{\sin \alpha^*}{\gamma (1 + \beta \cos \alpha^*)}. \end{aligned} \quad (۵۰-۱۳)$$

بررسی این نکته که $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، و در نتیجه کاوش در این نکته که معادلات (۵۰-۱۳) یک زاویه حقیقی α را تعریف می‌کنند، برعهده خواننده نهاده می‌شود. معادله اول را بر حسب $\cos \alpha^*$

$$\cos \alpha^* = \frac{(\cos \alpha - \beta)}{(1 - \beta \cos \alpha)} \quad \text{حل می‌کنیم} \quad (۵۱-۱۳)$$

معادله (۱۳-۵۱) را می‌توان از معادله اول (۱۳-۵۰) و با معکوس کردن علامت β و جابه‌جا کردن α و α^* به‌دست آورد. معادله (۱۳-۵۱) را در آخرین معادله از معادلات (۱۳-۴۹) می‌نشانیم و بعد از انجام عملیات جبری، می‌رسیم به:

$$\omega = \frac{\omega^*}{\gamma(1 - \beta \cos \alpha)}. \quad (13-52)$$

این فرمولی است برای اثر دوپلر نسبیتی. اگر $\gamma = 1$ گرفته شود، (۱۳-۵۲) درست فرمول کلاسیک مربوط به جابه‌جایی دوپلر است وقتی منبع با سرعت $v = \beta c$ تحت زاویه α نسبت به جهت مشاهده، حرکت می‌کند. عامل γ بیانگر اثر اتساع زمانی ناشی از حرکت منبع نور است. به رابطه متقابل بین معادله (۱۳-۵۲) و معادله آخر مجموعه معادلات (۱۳-۴۹)، حل شده بر حسب ω^* ، نیز توجه کنید.

حال می‌خواهیم قانون تبدیل لورنتس برای سرعتها را به‌دست آوریم. ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که با سرعت u حرکت می‌کند و مبدأ را در مکان ذره در زمان $t = 0$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین، ذره طبق معادلات زیر حرکت می‌کند:

$$\begin{aligned} x &= u_x t, \\ y &= u_y t, \\ z &= u_z t. \end{aligned} \quad (13-53)$$

در معادلات (۱۳-۳۵) می‌نشانیم و می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} x^* &= \gamma(u_x - v)t, \\ y^* &= u_y t, \\ z^* &= u_z t, \\ t^* &= \gamma \left[1 - \left(\frac{v u_x}{c^2} \right) \right] t. \end{aligned} \quad (13-54)$$

معادله آخری در معادلات (۱۳-۵۴) را برحسب t حل و در سه معادله اول جایگذاری می‌کنیم تا برسیم به:

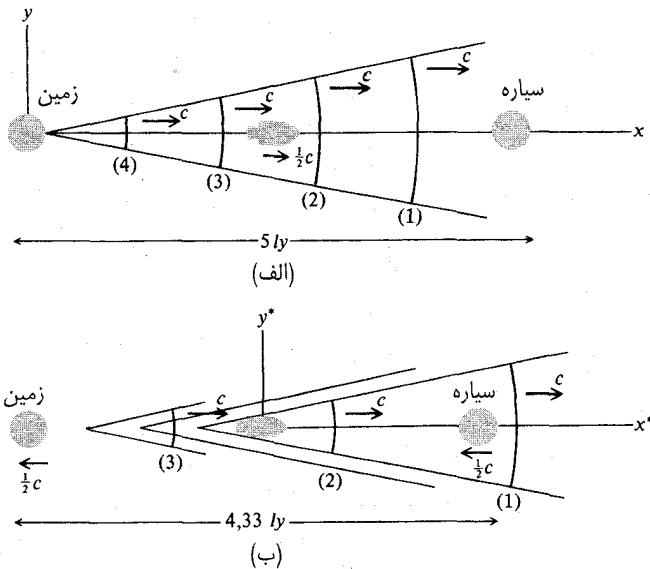
$$\begin{aligned} x^* &= \frac{u_x - v}{1 - (v u_x / c^2)} t^*, \\ y^* &= \frac{u_y}{\gamma [1 - (v u_x / c^2)]} t^*, \\ z^* &= \frac{u_z}{\gamma [1 - (v u_x / c^2)]} t^*, \end{aligned} \quad (13-55)$$

که از آنها می‌توانیم مؤلفه‌های سرعت در دستگاه مختصات ستاره‌دار را بخوانیم:

$$\begin{aligned} u_x^* &= \frac{(u_x - v)}{[1 - (v u_x / c^2)]}, \\ u_y^* &= \frac{u_y}{\gamma [1 - (v u_x / c^2)]}, \\ u_z^* &= \frac{u_z}{\gamma [1 - (v u_x / c^2)]}. \end{aligned} \quad (13-56)$$

در حد نانسبتی، این معادلات به فرمولهای کلاسیک تبدیل می‌شوند. می‌توان نشان داد (مسئله ۱۷) که برای سرعت معین u کمتر از c ، سرعت u^* حداکثر است وقتی u در امتداد محور x در خلاف جهت v توجیه می‌شود، و u^* همواره از c کمتر است.

در بخش ۱۳-۴ گفتیم که اگر از ساعتی ساکن در یک دستگاه مختصات لخت ساعتی متحرک دوبار عبور کند، فاصله زمانی ثبت شده روی ساعت متحرک بین دو عبور کمتر خواهد بود از آن ساعت ساکن. این نتیجه را گاهی پارادوکس دوقلوها می‌گویند و می‌توان آن را به‌طور تصویری به‌صورت زیر تدوین و بیان کرد. فضانوردی سوار بر موشکی با سرعت زیاد به سفر فضایی می‌رود و همزادش را در یک دستگاه مختصات لخت در حال سکون جا می‌گذارد. این فضانورد پس از حرکت کردن با سرعت زیاد و به مدتی طولانی، به سیاره دوری می‌رسد، مسیرش را معکوس می‌کند و دوباره با سرعت زیادی به جای اولش باز می‌گردد. بنابر نظریه نسبیت، او می‌خواهد بداند همزادش که در جای اول مانده است در طول مدت زمانی که فضانورد در سفر بسر برده است، از او پیرتر شده است. هیچ ناسازگاری منطقی در اینجا وجود ندارد، زیرا دوقلوها دیگر یک جور نیستند، چون گذشته یک جوری نداشته‌اند. به فضانورد در طول سفرش شتاب داده شده و در دستگاه مختصاتی لخت در حال سکون باقی نمانده است. با همه این احوال، مطالعه این وضعیت با جزئیات بیشتر، هم از دیدگاه فضانورد و هم از دیدگاه همزادش که بر جای می‌ماند، آموزنده است (شکل ۱۳-۷).



شکل ۱۳-۷ (الف) سفری به سیاره‌ای دور، در دستگاه مختصات زمین، در لحظه‌ای که موشک به نیمه راه رسیده است. (ب) همان سفر، در دستگاه مختصات موشک، در لحظه‌ای که نیمی از سفر طی شده است. در هر دو حالت، سیگنالهای نوری که یک بار در سال از زمین ارسال می‌شوند؛ با سال گسیل آنها در داخل پراتنز مشخص شده است. (موشک و سیاره‌ها با مقیاس واقعی ترسیم نشده‌اند).

فرض می‌کنیم که همزاد غیرمهاجر در مبدأ یک دستگاه مختصات بی‌ستاره در حال سکون است. سیاره دور نیز در این دستگاه مختصات در حال سکون است. برای آسان کردن محاسبات، فرض می‌کنیم که فضاورد با سرعت $c(1/2)$ در امتداد محور x برای مدت زمانی ۱۰ ساله مسافرت کرده و به سیاره‌ای که در فاصله $5 = x_1$ سال نوری قرار دارد، می‌رسد. او سپس ترمز می‌کند و در مدت زمانی به حال سکون در می‌آید که ما فرض خواهیم کرد در مقایسه با ۱۰ سال کوتاه است، و به سرعت زیاد با سرعت $c(1/2)$ در جهت مخالف شتاب می‌گیرد و طبق ساعت ساکن در مبدأ ۲۰ سال بعد از ترک کردن به جای اولش برمی‌گردد. به ازای $\beta = 1/2$ ، داریم $\gamma = 2/\sqrt{3}$. ساعت فضاورد وقتی برمی‌گردد $20\sqrt{3}/2$ سال را نشان خواهد داد، با این فرض که ساعت در مراحل ترمز کردن موشک صدمه ندیده است، و با این فرض که ترمز کردن موشک در مدت زمانی چندان کوتاه رخ داده است که لزومی ندارد درباره تغییر در ساعت فضاورد در طول این فاصله زمانی نگران باشیم. اگر سیگنالهای رادیویی هر سال از مبدأ طبق زمان نشان داده شده توسط ساعت مبدأ گسیل شود، سیگنالهای ارسالی از جانب فضاورد در طول سفرش، با سرعت $c(1/2)$ نسبت به فضاورد، اندازه‌گیری شده از دستگاه بی‌ستاره، جلو خواهند زد. این سیگنالهای سالیانه در فواصل دو ساله در دستگاه مختصات بی‌ستاره اندازه‌گیری می‌شوند و توسط فضاورد دریافت خواهند شد، و او پنجمین سیگنال را در نقطه‌ای دریافت خواهد کرد که برمی‌گردد. در سفر برگشت، پانزده سیگنال باقیمانده را در فواصل منظم دریافت خواهد کرد.

اکنون این رشته رویدادها را از دیدگاه فضاورد توصیف می‌کنیم. یک دستگاه مختصات ستاره‌دار معرفی می‌کنیم که مبدأ آن با فضاورد به‌هنگام بالا رفتن او منطبق باشد. در این دستگاه مختصات، به علت انقباض لورنتس، فاصله بین زمین و سیاره فقط $5\sqrt{3}/2$ سال نوری است. زمین و سیاره با سرعت $c(1/2)$ حرکت می‌کنند، به طوری که اگر زمین فضاورد را در $t^* = 0$ ترک کند، سیاره در مدت $t^* = 10\sqrt{3}/2$ سال فرا خواهد رسید، که با بحث قبلی ما در مورد زمان نشان داده شده توسط ساعت فضاورد، از دیدگاه دستگاه بی‌ستاره، موافق است. ساعت بی‌ستاره که روی زمین گذاشته شده از دیدگاه دستگاه ستاره‌دار آهسته‌تر کار خواهد کرد و وقتی سیاره دور به فضاورد می‌رسد، زمان $7/5 = (\sqrt{3}/2)(10\sqrt{3}/2)$ سال را نشان خواهد داد. سیگنالی که از ساعت زمین به سیاره می‌رسد پنج سال را نشان می‌دهد؛ اگر فضاورد با در نظر گرفتن این واقعیت تصحیح لازم را انجام دهد که ساعت زمین آهسته‌تر کار می‌کند، نتیجه می‌گیرد که این سیگنال در مدت $t^* = 5(2/\sqrt{3})$ سال گسیل شده بود. چون زمین با نصف سرعت نور حرکت می‌کند، سیگنال ۵ ساله را موقعی فرستاده که $5/\sqrt{3}$ سال نوری با موشک فضاورد فاصله داشت. اگر مدت زمان $5/\sqrt{3}$ سال برای رسیدن سیگنال به فضاورد را با مدت زمان $10/\sqrt{3}$ سال که در آن مدت زمان سیگنال فرستاده شده، جمع کنیم به زمان حاضر $5/\sqrt{3}$ خواهیم رسید که توسط ساعت فضاورد نشان داده می‌شود. بنابراین، جملگی سازگارند. پس از انجام این محاسبات، فضاورد سریعاً شتاب خود را کاهش می‌دهد و روی سیاره می‌نشیند. در مکان فضاورد روی سیاره، هیچ چیزی تغییر نکرده است، جز اینکه او اکنون در دستگاه مختصات بی‌ستاره در حال سکون است. ساعتش هنوز $5/\sqrt{3}$ سال را نشان می‌دهد (به اضافه زمان سپری شده در خلال آهسته کردن موشک). ساعت‌های بی‌ستاره محلی روی سیاره ۱۰ سال را نشان می‌دهند، درست مانند آنکه قبل از توقف فضاورد برای نشستن، نشان می‌دادند. سیگنال رادیویی ۵ ساله

از زمین هم اکنون گذشته است. اما اگر فضاانورد اکنون زمان حال را محاسبه کند که باید توسط ساعت روی زمین نشان داده شود، تعریف همزمانی‌اش تغییر کرده است. او حالا پنج سال نوری زمان مسافرت از زمین به سیگنال پنج ساله را که دریافت می‌کند، اضافه خواهد کرد و نتیجه‌گیری می‌کند که ساعت زمین، مانند ساعت بی‌ستاره روی سیاره، اکنون ۱۰ سال را نشان می‌دهد. منظور این نیست که او نتیجه می‌گیرد که ساعت زمین به ناگاه از $7/5$ به ۱۰ سال پرید. هر چیزی روی زمین به آهستگی کار کرده است. فقط این معنی را می‌دهد که تعریف همزمانی‌اش تغییر کرده است، به طوری که او اکنون لحظه‌ای متفاوت از گذشته هم‌زادش روی زمین را به عنوان لحظه هم‌زمان با ورودش به سیاره می‌پندارد. به عهده خواننده است که بحثی مشابه برای سفر به زمین و نمایاندن اینکه در طول سفر به زمین، در دستگاه مختصات دو ستاره‌دار که مبدأش با فضاانورد منطبق است ساعت زمین نیز با ضریب $\sqrt{3}/2$ آهسته‌تر کار می‌کند، اما دوباره به خاطر یک تعریف همزمانی عوض شده، ساعت زمین، از دیدگاه دستگاه مختصات دو ستاره‌دار وقتی فضاانورد سیاره را ترک می‌کند، از ساعت او جلوتر است، به طوری که با وجود اینکه آهسته‌تر کار می‌کند، هنوز ۲۰ سال را نشان می‌دهد وقتی که فضاانورد به جای اولش می‌رسد و ساعتش $20/\sqrt{3}$ سال را نشان می‌دهد.

مسائل

۱. یک زوج ستاره A و B در مدارهای مدور با دوره تناوب T یکدیگر را دور می‌زنند. زمین در صفحه مدار به فاصله x از این دو ستاره قرار دارد، به طوری که مدارهایشان از لبه زمین دیده می‌شوند. فرض کنید که نور با سرعت c نسبت به منبعی که نور می‌گسیلد، حرکت می‌کند. نشان دهید که در چنین حالتی، هر ستاره، به طوری که از زمین دیده می‌شود، به نظر می‌آید که نیم‌دایره طرف دور مدارش را سریع‌تر از نیم‌دایره نزدیک می‌پیماید. نشان دهید که هرگاه

$$\frac{4vx}{T} = c^2 - v^2,$$

که در آن v سرعت ستاره A در مدارش است، A به‌طور هم‌زمان از دو سر قطر مدارش دیده خواهد شد. آیا می‌توانید مقادیر موجهی برای v ، T ، و x اختیار کنید که به‌ازای آنها این شرط برقرار باشد؟ چنین اثری هرگز دیده نشده است.

۲. فرض کنید نور با سرعت c نسبت به دستگاه مختصات ثابتی که در آن سرعت حرکت زمین v است، حرکت می‌کند. نشان دهید یک پالس نوری که در امتداد خطی موازی v پس و پیش می‌رود، دارای سرعتی میانگین نسبت به زمین است، که از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\langle v_{\parallel} \rangle = c \left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right],$$

به این معنی که زمان لازم برای رفت و برگشت بین دو نقطه روی زمین که به فاصله l از یکدیگر قرار دارند، $2l/\langle v_{\parallel} \rangle$ است. مطلوب است سرعت متوسط $\langle v_{\perp} \rangle$ نسبت به زمین برای یک رفت و برگشت در امتداد خطی عمود بر v . اگر $v = 30$ کیلومتر در ثانیه (سرعت زمین در مدارش) باشد، نسبت $\langle v_{\parallel} \rangle / \langle v_{\perp} \rangle$ را پیدا کنید. این مفهوم اساس آزمایش مایکلسون - مورلی است، که نشان داد $\langle v_{\parallel} \rangle / \langle v_{\perp} \rangle = 1$ ، با خطای یک در 10^9 .

۳. سه سفینه موشکی A ، C ، و B به شکل خطی مستقیم با سرعت ۴۵ کیلومتر در ثانیه نسبت به زمین پرواز می‌کنند. سفینه‌های A و B به فاصله ۲۰۰۰۰ کیلومتر از یکدیگر واقع‌اند (اندازه‌گیری شده در دستگاه مختصاتی که در آن زمین ساکن است)، و C حد واسط بین آنهاست. آنها همگی در جهت خط واصل بین B به A پرواز می‌کنند. سفینه‌های A و B ، برای همزمان کردن ساعت‌هایشان، سیگنال‌های رادیویی می‌فرستند که C آنها را دریافت می‌کند. سیگنال خاص a از A به‌طور همزمان با سیگنال گسیلی b از B توسط C دریافت می‌شود. نسبت به دستگاه مختصات ستاره‌داری که در آن سفینه‌های موشکی در حال سکون‌اند، سیگنال‌های a ، b ، و در نتیجه، به‌طور همزمان از A و B گسیل شدند. (بنابر تقارن، C به فاصله مساوی از A و B در دستگاه ستاره‌دار قرار دارد.)

نشان دهید که نسبت به دستگاه مختصاتی که در آن زمین ساکن است، سیگنال‌های a ، b به‌طور همزمان از A و B گسیل نشدند، اگرچه یک شاهد زمینی موافقت خواهد کرد که آنها به‌طور همزمان به C رسیدند. کدام سیگنال اول گسیل شد؟ بعد از چه مدتی سیگنال دیگر گسیل شد؟ (توجه کنید که برای حل این مسئله لازم نیست بدانید چگونه از یک دستگاه مختصات به دیگری تبدیل تحقق می‌پذیرد، زیرا تمام محاسبات را می‌توان نسبت به زمین انجام داد.)

۴. یک میلهٔ سنج به دو سر O^* ، و P^* با سرعت v موازی طولش حرکت می‌کند. شاهده‌ی که با میله حرکت می‌کند طول، l^* ، آن را به طریق زیر اندازه می‌گیرد. وقتی انتهای O^* از مبدأ O یک دستگاه مختصات ثابت می‌گذرد، یک پالس نوری از O^* فرستاده می‌شود که به سر دیگر P^* می‌رود و در آنجا از آینه‌ای منعکس می‌شود. پالس در مدت زمان t^* ، ثبت شده توسط ساعتی متحرک، به سر O^* برمی‌گردد، به طوری که $t^* = 2ct^*$. اگر همان پالس نوری برای اندازه‌گیری طول چوب، l ، نسبت به دستگاه مختصات ثابت به کار رود، فرمولی برای l بر حسب زمان t بازگشت پالس به O^* ، بنویسید. با استفاده از رابطه (۱۳-۲۱)، نشان دهید که این روش اندازه‌گیری همان رابطه (۱۳-۲۲) بین l و l^* را به دست خواهد داد.

۵. معادله (۱۳-۲۱) براساس استدلالی به دست آمده که دربارهٔ دستگاه مختصات ستاره‌دار ارائه شد تا بحث و استدلال را آسان کند. نشان دهید که همین معادله را می‌توان براساس استدلالی به دست آورد که نسبت به دستگاه مختصات بی‌ستاره انجام می‌پذیرد. از این حقیقت که ساعت‌های ستاره‌دار با ضریب $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ نسبت به ساعت‌های بی‌ستاره آهسته‌تر کار می‌کنند، استفاده کنید، و روشی را در نظر بگیرید که شاهد ستاره‌دار ساعت‌هایش را همزمان می‌کند، اما تمام محاسبات را نسبت به دستگاه مختصات بی‌ستاره انجام دهید.

۶. شیء A در دستگاه مختصات بی‌ستاره‌ای در حال سکون و طول آن در این دستگاه l_A است. شیء B در دستگاه ستاره‌داری که نسبت به A با سرعت v موازی طول l_A حرکت می‌کند، ساکن است. طول B در دستگاه ستاره‌دار عبارت است از $l_B^* = l_A$. طول اندازه‌گیری شده B در دستگاه بی‌ستاره $l_B = l_B^* / \gamma$ ، و همچنین $l_A^* = l_B / \gamma$ به تفصیل نشان دهید چگونه می‌توان این پارادوکس آشکار را سازگار کرد که هر شیء، در دستگاه مختصاتی که در آن شیء دیگری در حال سکون است، از دیگری کوتاه‌تر است. فرض کنید که هر طول با روش توجّه به مکان‌های همزمان دو سرش در یک زمان مشخص و

اندازه‌گیری فاصله بین نقاط موردنظر، اندازه‌گیری می‌شود. [راهنمایی. نشان دهید که اختلاف در همزمانی بین دو دستگاه مختصات درست برابر است با اختلاف بین طولهای اندازه‌گیری شده.]

۷. در جعبه کوچکی به حجم dV که با سرعت v حرکت می‌کند، ساعتی قرار دارد که با آن حرکت می‌کند. ساعت یک فاصله زمانی dt بین دو رویداد متوالی را نشان می‌دهد که درون جعبه رخ می‌دهند. فرض کنید که dV حجم جعبه باشد که به وسیله ابزارهای ساکن درون جعبه اندازه‌گیری شده است. با استفاده از خواص ساعتها و میله‌های سنج‌متحرک، نشان دهید که

$$dV \cdot dt = dV dt,$$

که در آن dt فاصله زمانی (در دستگاه مختصات مان) بین همان دو رویداد است.

۸. معادلات تبدیل لورنتس (۱۳-۳۵) را به روش زیر به دست آورید:

(الف) فرض کنید که رابطه بین متغیرهای ستاره‌دار و بی‌ستاره، خطی است:

$$x^* = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10}t,$$

$$y^* = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20}t,$$

$$z^* = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30}t,$$

$$t^* = a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00}t.$$

نشان دهید که این فرض معادل آن است که فرض کنیم فضا و زمان همگن‌اند، یعنی نشان دهید که یک رابطه غیرخطی حاکی از آن خواهد بود که نواحی مختلف در فضا - زمان باید به‌طور متفاوتی تبدیل شوند. (ب) مطلوب است ضرایب a_{ij} : با فرض اینکه (۱) محورهای دو دستگاه موازی‌اند (و بنابراین در $t = 0$ متطبق‌اند)، (۲) مبدأ O^* با سرعت v در امتداد محور x حرکت می‌کند، (۳) یک موج نوری با سرعت c در هر دو دستگاه حرکت می‌کند، یعنی معادله (۱۳-۱۵) پس از جایگذاری‌های بالا به معادله (۱۳-۱۴) تبدیل می‌شود، (۴) افزایش t سبب افزایش t^* می‌شود (یعنی $a_{00} > 0$)، (۵) ضرایب در تبدیل معکوس، از x^* به x ، باید از a_{ij} با قرار دادن v به جای $-v$ به دست آیند، و (۶) هر کمیت اسکالر که در معادلات تبدیل ظاهر می‌شود فقط به بزرگی و نه به علامت v بستگی دارد. [راهنمایها و گوشزدها. اگر سریعترین راه جبری را دنبال کنید، پی خواهید برد که به فرضهایی، به ترتیبی که داده شده‌اند، نیاز دارید. توجه کنید که فرض (۱) این معنی را نمی‌دهد که در $t = 0$ نقطه‌ای روی محور y مختصات یکسان y و y^* دارد، بلکه فقط روی محور y^* قرار دارد و افزایش y سبب افزایش y^* می‌شود. اگر به این نتیجه برسید که به فرضهای (۵) و (۶) نیاز ندارید، فرض غیرمجاز دیگری را اختیار کرده‌اید.]

۹. معادلات (۱۳-۳۵) را برای x, y, z ، و t حل کنید و نشان دهید که معادلات حاصل، با جایگذاری v به جای $-v$ ، همان شکل را دارند.

۱۰. دو رویداد E و E' را در نظر بگیرید که برای آنها کمیت K داده شده به وسیله معادله (۱۳-۱۶) مثبت است. مطلوب است یک تبدیل لورنتس به دستگاه مختصات ستاره‌داری که در آن E و E' به‌طور همزمان رخ می‌دهند. برای آسانی محاسبات جبری، دستگاه مختصات اصلی را چنان اختیار کنید که E در مبدأ و E' در نقطه $(x', 0, 0, t')$ واقع باشند. سرعت βc دستگاه مختصات ستاره‌دار را پیدا کنید، و تأیید کنید که K مجذور فاصله بین دو رویداد در دستگاه ستاره‌دار است.

۱۱. دو رویداد E و E' با مختصات (x, y, z, t) و (x', y', z', t') را در نظر بگیرید. یک تبدیل لورنتس طبق معادلات (۱۳-۳۵) تشکیل دهید و تأیید کنید که کمیت K داده شده توسط معادله (۱۳-۱۶) به وسیله همین فرمول در دستگاه مختصات ستاره‌دار ارائه می‌شود. [می‌توانید از نتیجه مسئله ۹ بهره‌گیرید.]

۱۲. نشان دهید که بیش از یک سرعت نمی‌تواند وجود داشته باشد که در تمام دستگاه‌های مختصات یکسان باشد، یعنی نشان دهید که اگر تلاش کردیم لازم بداریم پدیده‌ای با سرعت ثابت عمومی v ، متفاوت با c ، حرکت کند، نمی‌توانستیم تبدیل معقولی بیابیم که v و c هر دو را در تمام دستگاه‌های مختصات همانند سازد. [روشهای زیادی برای اثبات این موضوع وجود دارد، بعضی خیلی آسان بعضی پیچیده‌تر. سعی کنید به استدلالی روی آورید که شما را قانع می‌کند.]

۱۳. با گرفتن ω^* به عنوان بسامد یک منبع نور متحرک، نشان داده شده توسط ساعتی که همراه بد منبع حرکت می‌کند، فرمول (۱۳-۵۲) را برای اثر دوپلر نسبیتی به دست آورید. فرض کنید که طبق معادله (۱۳-۱۸) ساعت متحرک نسبت به دستگاه مختصات ثابت، آهسته‌تر کار می‌کند، و امواج نوری گسیلیده با سرعت c در دستگاه ثابت حرکت می‌کنند. بسامد ω را که با آن این امواج از نقطه‌ای مشخص می‌گذرند، محاسبه کنید.

۱۴. یک میله سنج به راست ساکن در یک دستگاه مختصات بی‌ستاره با محور x زاویه α می‌سازد. دستگاه مختصات ستاره‌داری با محورهای موازی با سرعت v در امتداد محور x حرکت می‌کند. نشان دهید که میله سنج در دستگاه ستاره‌دار نیز راست است و زاویه α^* را بیابید که با محور x^* می‌سازد.

۱۵. با در دست داشتن معادلات تبدیل لورنتس (۱۳-۳۵)، فرمول (۱۳-۲۶) را برای انقباض لورنتس به دست آورید. [پیشنهاد. مختصات دو سر میله‌ای به طول l را در یک دستگاه مختصات بنویسید که در آن میله ساکن است، و سپس آن را به یک دستگاه مختصات متحرک تبدیل کنید.]

۱۶. یک تبدیل لورنتس دوّمی از نوع (۱۳-۳۵) به دستگاه دو ستاره‌داری را انجام دهید که در امتداد محور x^* با سرعت v^* نسبت به دستگاه ستاره‌دار حرکت می‌کند. متغیرهای x^{**} ، y^{**} ، z^{**} ، و t^{**} را بر حسب x ، y ، z ، و t بیان کنید و نشان دهید که نتیجه به شکل (۱۳-۳۵) خواهد بود، که سرعت نسبی آن از معادله (۱۳-۵۶) به دست می‌آید.

۱۷. نشان دهید که سرعت یک ذره، u^* ، نسبت به دستگاه مختصات ستاره‌دار بر حسب سرعت دستگاه مختصات، v ، و سرعت ذره نسبت به یک دستگاه مختصات بی‌ستاره، u ، از این معادله به دست می‌آید:

$$(u^*)^2 = c^2 \left\{ 1 - \frac{[1 - (v^2/c^2)][1 - (u^2/c^2)]}{[1 - (u \cdot v)/c^2]^2} \right\}$$

نشان دهید که به ازای مقادیر u و v مشخص، u^* حداقل است وقتی u در جهت v باشد، و $u^* < c$ اگر $u < c$.

۱۸. در باره سفر برگشت به زمین فضا‌نورد که در انتهای بخش ۱۳-۶ توصیف شده، بحث کنید. نسبت به دستگاه مختصاتی که با فضا‌نورد در سفر برگشت حرکت می‌کند، زمان قرائت شده روی ساعت زمین را

وقتی که فضا نورد سفر برگشت را آغاز می‌کند، پیدا کنید. فاصله زمانی ثبت شده توسط ساعت زمین در طول سفر برگشت را، که برای حرکت زمین تصحیح شده، اضافه کنید و نشان دهید که نتیجه ۲۰ سال است. نشان دهید که پنج سیگنال دریافتی سالیانه که در سفر بیرونی و پانزده سیگنال دریافتی در سفر برگشت از زمین، با فرمول (۱۳-۵۲) در مورد جابه‌جایی دوپلری نسبیتی برای یک فراوانی سیگنالی یکی در سال نسبت به زمین، سازگارند.

۱۹. جعبه کوچک مستطیل شکلی با ابعاد dx ، dy ، و dz با سرعت u در یک طول زمان dt حرکت می‌کند. با استفاده از معادلات (۱۳-۳۵) نشان دهید که

$$dx^* dy^* dz^* dt^* = dx \, dy \, dz \, dt$$

که در آن dx^* ، dy^* ، و dz^* ابعاد همان جعبه و dt^* فاصله زمانی مربوطه، در دستگاه مختصات ستاره‌دار هستند. ابعاد را چندان کوچک اختیار کنید که از جملات مرتبه بالاتر در دیرفرانسبلها چشم‌پوشی شود. می‌توانید فرض کنید که یک جعبه مستطیل شکل به صورت جعبه‌ای مستطیل شکل باقی می‌ماند اگر یکی از لبه‌های موازی جهت حرکت باشد. [این مسئله باید با دقت زیاد حل شود. یک گوشه جعبه را در $t = 0$ در مبدأ بگیرید، و E_1 را رویدادی قلمداد کنید که بعد از مدت زمان dt در همان گوشه رخ می‌دهد. زمان dt^* رویداد E_1 را در دستگاه ستاره‌دار پیدا کنید. (فراموش نکنید که جعبه در حال حرکت است.) (اگر dx ، dy ، و dz کوچک باشند، در هر گوشه جعبه همان نتیجه را برای dt^*/dt تا مرتبه اول، به دست خواهید آورد.) برای پیدا کردن dx^* به خاطر بیاورید که برابر فاصله بین دو رویداد $(0, 0, 0, 0)$ و $(dx^*, 0, 0, 0)$ است که در دستگاه مختصات ستاره‌دار همزمان هستند.]

آیا می‌توانید نتیجه بالا را با استفاده از نتیجه مسئله ۷ و به کمک بحثی ساده ثابت کنید؟

۲۰. یک روش دیگر برای همزمان‌سازی ساعتها از این قرار خواهد بود که همه را به نقطه‌ای مشترک بیاوریم که در آنجا بدون هیچ ابهامی بتوانند همزمان شوند، و سپس آنها را خیلی آهسته (به طوری که اتساع زمان چشم‌پوشیدنی باشد) به مکانهای دائمی‌شان در دستگاه مختصات ببریم. نشان دهید که این روش از طریق تحلیل کردن کاربرد این روش، در یک دستگاه مختصات بدون ستاره، برای همزمان‌سازی ساعتها در دستگاه مختصات ستاره‌دار متحرک در جهت α با سرعت v ، کارساز است. ساعتی به مبدأ O^* آورده می‌شود و با ساعت ستاره‌دار معیاری چنان همزمان می‌شود که در $t^* = 0$ صفر را نشان می‌دهد. در این صورت، با یک سرعت کم u^* به مکان جدیدی در دستگاه مختصات ستاره‌دار برده می‌شود. فاصله زمانی عادی dt برای ساعت متحرک را برحسب زمان بی‌ستاره dt ، سرعت v دستگاه ستاره‌دار، و سرعت u^* ساعت نسبت به دستگاه ستاره‌دار، بیان کنید. dt را به صورت سری توانی بسط دهید. فرض کنید که u^* (ولی نه v) کوچک ولی تابعی دلخواه به صورت $u^*(t)$ است. نشان دهید که اگر جملات شامل توانهای بالاتر از اول u^* چشم‌پوشیدنی باشند، در این صورت ساعت متحرک در هر زمان t ، زمان ستاره‌دار صحیح، t^* ، مربوط به مکانش در آن زمان را نشان می‌دهد. توجه کنید که جمله خطی بر حسب u^* ، انتقال فاز عادی (نسبت به دستگاه بی‌ستاره) بین ساعت‌های ستاره‌دار در مکانهای مختلف را به دست می‌دهد. اثر نگره داشتن جملات درجه دوم بر حسب u^* چه خواهد بود؟ نشان دهید که جملات خطی باید حفظ شوند حتی در حد $u^* \rightarrow 0$ اگر قرار باشد ساعت به فاصله‌ای متناهی دور از O^* حرکت داده شود، اما جملات بالاتر در حد صفر می‌شوند.

۱۴-۱ جبر برداری فضا - زمان

در فصل ۳ جبر بردارها در فضای سه بعدی را به عنوان ابزار ریاضی مفیدی برای نوشتن معادلات فیزیکی و انجام محاسبات در شکلی مستقل از هر دستگاه مختصات سه بعدی خاص، تشریح کردیم. اکنون می‌خواهیم جبری مشابه در فضا - زمان چهاربعدی را تدوین کنیم که «نقاط» اش رویدادهایی اند که به وسیله مختصات (x, y, z, t) برچسب زده شده‌اند، و این متغیرها، وقتی به دستگاه مختصات متحرکی می‌رویم، طبق فرمولهای تبدیل لورنتس تغییر شکل می‌دهند. یک چهار-اسکالر یا اسکالر جهانی را به عنوان کمیتی تعریف خواهیم کرد که مقدارش، وقتی مختصات را طبق معادلات تبدیل لورنتس انتقال می‌دهیم، تغییر نمی‌کند. به همین ترتیب، یک چهار بردار را به عنوان مجموعه‌ای از چهار کمیت تعریف خواهیم کرد که مانند اختلاف در چهار مختصه دو رویداد تحت یک تبدیل لورنتس تغییر شکل می‌دهند. این جبر چهار برداری مسئله کشف شکل مناسب برای قوانین فیزیکی را که در تمام دستگاههای مختصات شکل یکسانی دارند، بسیار آسان می‌کند. پس، مثلاً، اگر قانونی را تدوین کنیم که بیانگر تساوی دو چهار اسکالر، یا تساوی دو چهار بردار باشد، از شکل معادله آشکار خواهد شد که در تمام دستگاههای مختصات همین شکل را دارد.

بهتر است یک متغیر زمانی تعریف کنیم که برحسب همان یکاهایی اندازه‌گیری شود که متغیرهای فضا اندازه‌گیری می‌شوند. بنابراین، چهار مختصه یک رویداد در فضا - زمان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}x_0 &= ct, \\x_1 &= x, \\x_2 &= y, \\x_3 &= z.\end{aligned}\tag{1-14}$$

یک حرف یونانی برای نشان دادن هر یک از چهار اندیس پایین ۰، ۱، ۲، ۳ به کار خواهیم برد. پس 'x_μ' هر یک از چهار متغیر x₀، x₁، x₂، x₃ و μ را معرفی می‌کند؛ همچنین، گاهی می‌توان 'x_μ' را برای بیان کردن مجموعه چهار متغیر به کار بریم. یک حرف لاتین هر یک از مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را معرفی می‌کند. بنابراین 'x_μ' هر یک از سه مختصه فضایی را معرفی خواهد کرد. برای هر دو رویداد^۱ پیش آمده E^۱ و E^۲، در بخش ۱۳-۳، مشاهده کردیم که کمیت به دست

۱. وقتی درباره چندین رویداد بحث می‌شود، از اندیسه‌های بالا برای معرفی یک رویداد خاص استفاده خواهیم کرد، تا اندیسه‌های پایین را برای معرفی یکی از چهار مختصه نگه داریم.

آمده‌اند معادله (۱۳-۱۶)، به قرار زیر:

$$S'^2 = (x_1^2 - x_1'^2) + (x_2^2 - x_2'^2) + (x_3^2 - x_3'^2) - (x_4^2 - x_4'^2), \quad (2-14)$$

که روی مخروط نوری صفر است، وقتی منفی است که یکی از رویدادها از دیگری از طریق جسمی که با سرعتی کمتر از سرعت نور حرکت می‌کند قابل دسترسی باشد، و مثبت است وقتی این کار ممکن نباشد. اگر کمیت S'^2 در یک دستگاه لختی صفر (یا منفی یا مثبت) باشد، در هر دستگاه لختی دیگری نیز صفر (یا منفی یا مثبت) است. با یک محاسبه جبری ساده می‌توان تأیید کرد که اگر از معادلات تبدیل لورنتس (۱۳-۳۵) جایگذاری کنیم، کمیت S'^2 در دستگاه مختصات جدید در تمام حالتها مقدار یکسانی خواهد داشت. (ر.ک. مسئله ۱۱ از فصل ۱۳) از معادله (۲-۱۴) می‌توان پی برد که با تغییر مبدأ فضا یا زمان دستگاه مختصات، مقدار S'^2 تغییر نمی‌کند. همچنین، آشکار است که اگر مختصات فضایی را به سمتگیری جدیدی بچرخانیم به طوری که مبدأ ثابت باشد، S'^2 مقدارش را ننگه می‌دارد. در واقع، اگر صرفاً به مجموعه جدیدی از محورهای فضایی نقل مکان کنیم، جمله آخر جداگانه ثابت می‌ماند، و به همین ترتیب هم حاصل جمع سه جمله اول ثابت می‌ماند. وقتی به دستگاه مختصات متحرکی می‌رویم، امکان تغییر هر چهار جمله وجود دارد، ولی حاصل جمع چهار جمله ثابت می‌ماند. نتیجه می‌گیریم که کمیت S'^2 در هر دستگاه مختصات لخت مقداری یکسان دارد. کمیتی با این ویژگی یک چهاراسکالر یا گاهی یک اسکالر جهانی نامیده می‌شود. برای راحتی بحث، اختصارات زیر را معرفی می‌کنیم:

$$g_0 = -1, \quad g_1 = g_2 = g_3 = 1. \quad (3-14)$$

اکنون می‌توانیم معادله (۲-۱۴) را به شکل اختصاری زیر بنویسیم:

$$S'^2 = \sum_{\mu} g_{\mu} (x_{\mu}^2 - x_{\mu}'^2). \quad (4-14)$$

خواننده به شباهت بین کمیت (۲-۱۴)، که در تمام دستگاههای مختصات لختی مقداری یکسان دارد، و کمیت زیر که در تمام دستگاههای مختصات راست گوشه سه بعدی ساکن نسبت به یکدیگر مقدار یکسانی دارد، توجه خواهد کرد:

$$(x_1^2 - x_1'^2) + (x_2^2 - x_2'^2) + (x_3^2 - x_3'^2),$$

ما تدوین جبر فضا-زمان خود را بر شالوده این تشابه پایه خواهیم نهاد.

بعضی مؤلفان یک متغیر زمان را، از قرار زیر، به جای متغیر ما، x ، تعریف می‌کنند:

$$x_p = ict, \quad (5-14)$$

نظر به اینکه $(x_p)^2 = -(x_4)^2$ ، نتیجه می‌گیریم که کمیت S'^2 صراحتاً درست مانند کمیت مربوطه در فضای سه بعدی به نظر آید. اما، این اتحاد صوری، گرایش به پنهان کردن تفاوت فیزیکی بین مختصه زمان و سه مختصه فضایی دارد، که در وضعیت تعریف (۵-۱۴)، از طریق این استلزام که مختصه چهارم باید همواره مجازی محض و سه مختصه دیگر حقیقی باشند، حفظ می‌شود. ما در اینجا ترجیح می‌دهیم به تعریف (۱-۱۴) بچسبیم که دارای این مزیت است که هر چهار مختصه حقیقی‌اند و اینکه اختلاف بین مختصات فضا و زمان به‌طور واضح با علامت منها به‌صورت

معادله (۱۴-۲) پیش روی ما قرار داده می شود. اگرچه مختصات فضا و زمان به طور فیزیکی یکسان نیستند، بین آنها رابطه برقرار است و تحت یک تبدیل لورنتس (۱۳-۳۵) در هم آمیخته شده اند. تغییر متغیرها از هر دستگاه مختصات لخت بی ستاره به هر دستگاه مختصات لخت ستاره دار دیگر را می توان از این قرار نوشت:

$$x_{\mu}^* = x_{\mu}^{*O} + \sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_{\nu}, \quad (۶-۱۴)$$

که در آن چهار کمیت x_{μ}^{*O} مختصات مبدأ بی ستاره O در دستگاه مختصات ستاره دارند و ضرایب $a_{\mu\nu}$ به سمتگیری محورهای ستاره دار نسبت به محورهای بی ستاره و به حرکت نسبی دو دستگاه مختصات، بستگی دارد. اگر محورهای ستاره دار و بی ستاره موازی باشند و اگر مبدأ O^* در امتداد محور x با سرعت v حرکت کند، این ضرایب به کمک معادلات (۱۳-۳۵) به دست می آیند:

$$a_{\mu\nu} = \begin{matrix} \mu \setminus \nu \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}. \quad (۷-۱۴)$$

اگر دستگاه مختصات ستاره دار نسبت به دستگاه مختصات بی ستاره در حال سکون باشد ولی محورهای ستاره دار با محورهای بی ستاره موازی نباشند، در این صورت ضرایب $a_{\mu\nu}$ به کمک معادلات (۷-۱۳) داده می شوند:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_3 \\ 0 & \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3 \\ 0 & \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (۸-۱۴)$$

اکنون اگر تبدیلی به یک دستگاه مختصات (پریم دار) سومی طبق معادلات زیر تشکیل دهیم،

$$x'_{\lambda} = x'_{\lambda} O^* + \sum_{\mu} a'_{\lambda\mu} x_{\mu}^*, \quad (۹-۱۴)$$

در این صورت به آسانی می توان تأیید کرد که اگر از معادلات (۶-۱۴) جایگذاری کنیم، رابطه بین دستگاههای مختصات پریم دار و بی ستاره عبارت خواهد بود از

$$x'_{\lambda} = x'_{\lambda} O + \sum_{\nu} a'_{\lambda\nu} x_{\nu}, \quad (۱۰-۱۴)$$

که در آن

$$x'_{\lambda} O = x'_{\lambda} O^* + \sum_{\mu} a_{\lambda\mu}^* x_{\mu}^{*O}, \quad (۱۱-۱۴)$$

و

$$a'_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} a_{\lambda\mu}^* a_{\nu\nu}. \quad (۱۲-۱۴)$$

خواننده توجه می کند که معادله (۱۲-۱۴) دقیقاً قانون ضرب دو ماتریس 4×4 است. با توالی تبدیلهای شکلهای ویژه (۷-۱۴) و (۸-۱۴) می توانیم رابطه (۶-۱۴) بین هر دو دستگاه مختصات لخت را، مستقل از مکان مبدأها یا سمتگیری محورهایشان، یا سرعتهای نسبی شان نسبت به یکدیگر، به دست آوریم. بهتر است تبدیل (۶-۱۴) را یک «تبدیل لورنتس» تلقی کنیم و

در نتیجه یک تبدیل لورنتس را به عنوان هر تبدیلی بین هر دو دستگاه مختصات فضایی، تعریف کنیم.^۱ با همه این احوال، توجه خود را به دستگاههای مختصات فضایی راست گوشه، دست کم وقتی با تبدیلهای بین دستگاههای مرجع متحرک سروکار داریم، معطوف می کنیم. برای حل کردن مسئله ای خاص در یک دستگاه مرجع مجرد، البته آزادیم دستگاههای مختصات فضایی خمیده خط را در صورتی که راحت تر باشد، معرفی کنیم و به کار گیریم.

ضرایب $a_{\mu\nu}$ به سرعت دستگاه مختصات ستاره دار نسبت به دستگاه بی ستاره (که ممکن است با دادن سه مؤلفه اش مشخص شود) و به توجیه محورهای مختصه ستاره دار نسبت به محورهای بی ستاره (که سه زاویه برای تشخیص آن لازم دارد)، بستگی دارد. چون این کمیتها به شش پارامتر وابسته اند، شانزده ضریب $a_{\mu\nu}$ نمی توانند مستقل باشند، و انتظار داریم که ده رابطه بین آنها برقرار باشد. نشان دادن این موضوع دشوار نیست، (مسئله ۲) که اگر برای هر دو رویداد E^1 ، E^2 قرار است اسکالر S^2 (معادله ۱۴-۴) مقدار یکسانی در دستگاههای مختصات ستاره دار و بی ستاره داشته باشد، باید ده رابطه زیر برقرار باشند:

$$\sum_{\mu} g_{\mu} a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = g_{\nu} \delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} g_{\nu} & \text{اگر } \nu = \lambda \\ 0 & \text{اگر } \nu \neq \lambda \end{cases} \quad (13-14)$$

خواننده ای که فصل ۱۰ را مطالعه کرده باشد، به شباهت بین معادلات (۱۳-۱۴) و (۱۰-۷۸)، که بین ضرایب a_{ij} در تبدیل (۱۰-۶۹) بین دو دستگاه مختصات سه بعدی برقرار است، توجه خواهد کرد. ضرایب $a_{\mu\nu}^{-1}$ برای تبدیل معکوس تبدیل (۱۴-۶)

$$x_{\nu} = x_{\nu}^{O*} + \sum_{\mu} a_{\nu\mu}^{-1} x_{\mu}^*, \quad (14-14)$$

از طریق این رابطه به دست می آیند:

$$a_{\mu\nu}^{-1} = g_{\mu} g_{\nu} a_{\mu\nu}. \quad (15-14)$$

برای پی بردن به این نکته، توجه کنید که چون $(g_{\nu})^2 = 1$ ، از معادلات (۱۳-۱۴) نتیجه می شود که

$$\sum_{\lambda} a_{\mu\lambda}^{-1} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

از مقایسه این معادله با معادله (۱۴-۱۲)، مشاهده می کنیم که ضرایب $a_{\mu\nu}^{-1}$ واقعاً ضرایب تبدیل معکوس (۱۴-۱۴) هستند.

۱. نام تبدیل لورنتس اغلب به تبدیلهایی که در آنها میداهای O و O^* منطبق اند، منحصر می شود. گروه بزرگتری از تبدیلهای که انتخاب جدیدی از مبدأ را مجاز می دارند گروه پوانکاره نام دارند. اگرچه برای گزاره های کلی می خواهیم هر دو دستگاه مختصات لخت دلخواه را در نظر بگیریم، در مثالهای مشخص معمولاً فقط حالت ویژه (۱۳-۳۵) را به کار خواهیم برد که تبدیلی است که به طور صریح، اگرچه به صورتی تا اندازه ای کمتر آشکار، توسط لورنتس داده شده است.

(H. A. Lorentz, "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light", *Proc. Acad. Sci., Amsterdam*, 6, 1904.)

جبر چهار برداری را پوانکاره در سال ۱۹۰۵ میلادی معرفی کرد و بعداً در سال ۱۹۰۸ میلادی مینکوفسکی آن را تممیم بخشید.

یک چهاراسکالر را هر کمیتی فیزیکی تعریف کرده‌ایم که مقدارش تحت تبدیل لورنتس تغییر نمی‌کند. نمونه‌ای از چهاراسکالر عبارت است از کمیت تعریف شده از طریق معادله (۱۴-۴). اکنون یک چهار بردار را به‌عنوان هر مجموعه‌ای از چهار کمیت A_μ تعریف می‌کنیم که تحت یک تبدیل لورنتس (۱۴-۶)، بنا به قانون زیر، تبدیل شود.

$$A'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu. \quad (14-16)$$

نمونه‌ای از چهار بردار، مجموعه اختلافهای مختصه‌ای $(x'_\mu - x_\mu)$ بین دو رویداد E^1 و E^2 است. از معادله (۱۴-۶) آشکار است که این چهار بردار، که آن را تغییر مکان چهار برداری بین دو رویداد می‌نامیم، طبق معادله (۱۴-۱۶) تبدیل می‌شود. در حالت خاصی که محورهای ستاره‌دار و بی‌ستاره موازی و سرعت در امتداد محور x است، قانون تبدیل برای مؤلفه‌های یک چهار بردار عبارت است از

$$\begin{aligned} A_0^* &= \gamma(A_0 - \beta A_1), \\ A_1^* &= \gamma(A_1 - \beta A_0), \\ A_2^* &= A_2, \\ A_3^* &= A_3. \end{aligned} \quad (14-17)$$

در تبدیلی بین دو دستگاه مختصاتی که نسبت به یکدیگر ساکن‌اند، مؤلفه A_0 تغییر نمی‌کند (یک سه اسکالر است) و مؤلفه‌های A_1, A_2, A_3 مانند یک سه بردار معمولی تبدیل می‌شود. بنابراین، مشاهده می‌کنیم مادام که به یک چارچوب مرجع متحرک تغییر وضعیت ندهیم، یک چهار بردار متشکل است از یک اسکالر و سه مؤلفه یک بردار در فضای سه‌بعدی معمولی. اما، وقتی به دستگاه مختصات متحرکی تغییر وضعیت دهیم، جزء سه اسکالر A_0 با جزء سه بردار آن در هم می‌آمیزند و در نتیجه باید چهار کمیت A_μ را مؤلفه‌های یک تک موجود، چهار بردار، پنداریم. خواننده مشاهده می‌کند که اگر A_μ و B_μ ، در حکم چهار بردار باشند، مجموعه‌های چهار کمیت حاصل از ضرب مؤلفه‌های یک بردار در یک اسکالر، یا جمع این مؤلفه با مؤلفه آنها نیز چهار بردار خواهند بود:

$$cA_\mu \quad (14-18) \quad \text{یک چهار بردار است اگر } A_\mu \text{ چهار بردار باشد، و اگر } c \text{ چهار اسکالر باشد،}$$

$$A_\mu + B_\mu \quad (14-19) \quad \text{یک چهار بردار است اگر } A_\mu, B_\mu \text{ چهار بردار باشند.}$$

اگر A_μ و B_μ دو چهار بردار باشند، از معادلات تبدیل (۱۴-۱۶) و (۱۴-۱۳) نتیجه می‌شود که کمیت

$$\begin{aligned} (A_\mu, B_\mu) &= \sum_\mu g_{\mu\mu} A_\mu B_\mu, \\ &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 - A_0 B_0, \end{aligned} \quad (14-20)$$

یک چهار بردار است. مقدار آن تحت تبدیل لورنتس تغییر نمی‌کند. اثبات این موضوع را برعهده خواننده می‌گذاریم (مسئله ۳). بیان معکوس این معنا نیز درست است (مسئله ۴).

فرض کنید چهار کمیت A_μ مطابق با قاعده‌ای در خصوص تغییر در دستگاه مختصات تبدیل شوند. اگر برای هر چهار بردار B_μ که به‌طور دلخواه اختیار شده‌اند، حاصل ضرب (A_μ, B_μ) یک چهار بردار باشد؛ در این صورت A_μ یک چهار بردار است. (۱۴-۲۱)

کمیت (۱۴-۲۰) آشکارا نقشی مشابه حاصل ضرب اسکالر دو بردار در جبر برداری در فضای سه بعدی ایفا خواهد کرد. آن را حاصل ضرب چهار اسکالری دو چهار بردار می نامیم. ولی توجه داشته باشید که حاصل ضرب کمیت در خودش $(A_{\mu\nu}, A_{\mu\nu})$ مثبت معین نیست زیرا عبارت است از ضرب متناظر جبر برداری سه بعدی.

تعیین چهار برداری مشابه حاصل ضرب برداری، چنان که خواننده به آسانی آن را با آزمایشی کوچک اثبات کند، ناممکن است. در واقع، مشابه حاصل ضرب برداری (۳-۳۲) حتی تعداد درستی مؤلفه ندارد که یک چهار بردار باشد.^۱

معمول نیست برای چهار بردار قلم خاصی را، مانند مورد بردارها در فضای سه بعدی، معرفی کنیم. هر چهار بردار را صرفاً با نوشتن مؤلفه کلی اش به صورت 'A_μ' مشخص خواهیم کرد. اگر برای دو رویداد مشخص E^1 و E^2 ، یعنی اسکالر S^{21} تعریف شده توسط معادله (۱۴-۲)، مثبت باشد، می گوییم که فاصله بین این دو رویداد فضاگونه است، و یک فاصله عادی بین دو رویداد را به کمک معادله زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma^{21} = (S^{21})^{1/2}. \quad (14-22)$$

فاصله عادی σ^{21} در این حالت آشکارا یک چهار اسکالر است، و می تواند به روشی مطلق به عنوان فاصله بین دو رویداد تعریف شود که به کمک میله سنجی ای ساکن در یک دستگاه مختصات که چنان حرکت می کند که در آن دستگاه دو رویداد به طور همزمان رخ می دهند، اندازه گیری می شود. اگر برای دو رویداد E^1 و E^2 ، اسکالر S^{21} منفی باشد، می گوییم که فاصله بین دو رویداد زمان گونه است. در این حالت می توانیم یک چهار اسکالر را از این قرار تعریف کنیم:

$$\tau^{21} = (-S^{21})^{1/2}/c. \quad (14-23)$$

کمیت τ^{21} را بازه ویژه زمان بین دو رویداد می نامیم، و آن را مثبت می گیریم اگر رویداد ۲ رویداد ۱ را دنبال کند، و منفی می گیریم اگر رویداد ۲ زودتر از رویداد ۱ بیاید. ممکن است اسکالر τ^{21} را به صورتی مستقل از دستگاه مختصات به عنوان بازه زمانی قرائت شده روی ساعتی که با سرعت ثابت عادی حرکت می کند، از لحظه ای که رویداد E^1 را ترک می کند تا به رویداد E^2 می رسد (یا برعکس)، تعریف کنیم.

همان طوری که در فصل قبل مشاهده کردیم، مؤلفه های سرعت ذره ای متحرک تحت یک تبدیل لورنتس طبق معادلات نسبتاً پیچیده (۱۳-۵۶) تغییر شکل می دهند. از این معادلات برمی آید که روشی وجود ندارد که به وسیله آن بتوان یک سه اسکالر u را به سه سرعت u اضافه کرد تا یک چهار بردار تشکیل شود. ولی می توان یک چهار بردار تشکیل داد که از قرار زیر بین آن و سرعت رابطه ای تنگاتنگ برقرار شود. فرض کنید که مختصات دو رویداد نزدیک بهم در گذشته ذره ای

۱. خواننده ای که بخش ۱۰-۲ را مطالعه کرده باشد، تشخیص خواهد داد که مشابه درست حاصل ضرب برداری، چهار-تانسور پادمتقارن $A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu}$ است. چون شش مؤلفه مستقل دارد نمی تواند با یک چهار بردار توأماً مربوط شود. این یک تصادف عددی است که در فضای سه بعدی، تانسور پادمتقارن و بردار هر یک درست سه مؤلفه دارند.

متحرک، عبارت‌اند از $x_\mu + dx_\mu$ و x_μ . اختلاف مختصات dx_μ آشکارا مؤلفه‌های یک چهاربردار (بی‌نهایت کوچک) هستند. بازهٔ ویژهٔ زمان بین دو رویداد

$$d\tau = [-(dx_\mu, dx_\mu)]^{1/2} / c. \quad (14-24)$$

یک چهاراسکالر است. بنابراین [طبق قانون (۱۴-۱۸)] می‌توانیم یک چهاربردار تشکیل دهیم، که آن را چهارسرعت می‌نامیم:

$$U_\mu = dx_\mu / d\tau. \quad (14-25)$$

از آنجا که چهارسرعت U_μ یک چهاربردار است، وقتی آن را مفید می‌یابیم که تلاش کنیم معادلات حرکت را به صورتی بنویسیم که تحت تبدیل لورنتس ناورد باشند. بین چهارسرعت و سه سرعت آشکارا، از طریق معادلات زیر، رابطه برقرار می‌شود:

$$U_0 = c dt / d\tau = \gamma c, \quad (14-26)$$

$$U_i = dx_i / d\tau = \gamma u_i,$$

که در آن

$$\gamma = [1 - (u^2 / c^2)]^{-1/2}.$$

به آسانی می‌توانیم حاصل ضرب چهاراسکالر را محاسبه کنیم

$$\sum_\mu g_\mu (U_\mu)^2 = -c^2. \quad (14-27)$$

چهاربردار U_μ مثالی است از چهاربرداری که در واقع تنها سه مؤلفهٔ مستقل دارد، زیرا حاصل ضرب اسکالر در خودش باید در شرط (۱۴-۲۷) صدق کند. اگر سه مؤلفهٔ سرعت u_i داده شوند، چهار مؤلفهٔ چهارسرعت U_μ از طریق معادلات (۱۴-۲۶) داده می‌شوند. البته برعکس، اگر چهارسرعت U_μ یا حتی بخش فضایی‌اش U_i را بدانیم، می‌توانیم سه سرعت u_i را پیدا کنیم. همچنین توجه کنید که در حد غیرنسبیتی $U_0 \doteq c, U_i \doteq u_i, u \ll c$.

اگر قانونی فیزیکی به صورتی تدوین شود که ادعا کند دو چهاراسکالر مساوی‌اند، یا دو چهاربردار مؤلفه‌های مساوی دارند، در این صورت این معادلات به‌طور روشن در تمام دستگاههای مختصات لخت شکل یکسانی خواهند داشت. می‌توان گفت که آنها آشکارا هموردا/بند. ضروری نیست که قوانین فیزیکی بر حسب چهاراسکالرها یا چهاربردارها نوشته شوند. در واقع از آنجا که جبر چهاربرداری هنوز ابداع نشده بود، اینشتین در مقالهٔ اولش به این ابزار دسترسی نداشت. او روشی هموردا برای نوشتن معادلات مکانیک و الکترودینامیک یافت، یعنی شکلی که در تمام دستگاههای مختصات لخت یکسان بود. اما برای اثبات این امر، لازم بود قوانین تبدیل ویژه برای هر یک از کمیتهای فیزیکی کشف کند که در معادلات ظاهر می‌شوند (برای مثال، قانون به نسبت پیچیده (۱۳-۵۶) برای سرعت)، و سپس با محاسبهٔ صریح نشان دهد که وقتی تبدیل لورنتس مناسب روی تمام کمیتهای موجود در معادلات انجام داده می‌شود، معادلات همین شکل را در دستگاه مختصات ستاره‌دار جدید به‌خود می‌گیرند.

فرض کنید مجموعه‌ای از چهار کمیت A_0, A_1, A_2, A_3 و A_4 داده شده باشد؛ هر یک شاید توسط نوعی از یک اندازه‌گیری با رجوع به دستگاه مختصات بی‌ستاره‌ای تعیین می‌شود. همواره می‌توان به

روشی رسمی یک چهاربردار را با مشخص کردن اینکه مؤلفه‌هایش در آن دستگاه مختصات باید چهار کمیت A_μ باشند، و اینکه مؤلفه‌هایش در هر دستگاه مختصات دیگری باید از معادلات تبدیل (۱۴-۱۶) محاسبه شوند، تعریف کرد. لکن چنین چهاربردار رسمی عموماً یک چهاربردار فیزیکی نخواهد بود. یعنی، تعریف عملی مشخص‌کننده روشی که به وسیله آن کمیت‌های A_ν^* در دستگاه مختصات ستاره‌دار قرار است اندازه‌گیری شوند عموماً همان تعریف عملی نخواهد بود که مشخص می‌کند چگونه کمیت‌های A_μ در دستگاه مختصات بی‌ستاره اندازه‌گیری می‌شود. برای اینکه یک چهاربردار فیزیکی را تعریف کنیم، باید چهار کمیت A_μ را با مشخص کردن اینکه چگونه آنها در هر دستگاه مختصات خاصی قرار است اندازه‌گیری شوند، تعریف کنیم، و همین تعریف را در هر یک از دستگاه‌های مختصات به کار بریم. سپس باید نشان دهیم که رابطه بین چهار کمیت در هر دو دستگاه مختصات به وسیله معادلات (۱۴-۱۶) داده می‌شود. به روشی دیگر، ممکن است یک تعریف عملی برای کمیت‌های A_μ در یک دستگاه مختصات بدهیم، مؤلفه‌های A_ν^* را در دستگاه مختصات دیگری طبق معادلات (۱۴-۱۶) تعریف کنیم، و سپس باید ثابت کنیم که کمیت‌های A_ν^* را می‌توان واقعاً در دستگاه مختصات ستاره‌دار با استفاده از همان تعریف عملی پیدا کرد که در دستگاه مختصات بی‌ستاره به کار رفته است. به عنوان یک مثال، چهار سرعت U_μ در بالا به طریقی ساخته شد که از ابتدا روشن شود که یک چهاربردار بوده است. پس معادلات (۱۴-۲۶) روشن می‌کند که چهار سرعت U_μ از تعریف عملیاتی یکسانی در هر دستگاه مختصات برخوردار است؛ سه سرعت U_μ در هر دستگاه مختصات به روش معمول اندازه‌گیری می‌گیریم و سپس مؤلفه‌های U_μ را از معادلات (۱۴-۲۶) محاسبه می‌کنیم. برعکس، می‌توانستیم با تعریف عملیاتی (۱۴-۲۶) شروع و به اثبات این امر مبادرت ورزیم که چهار کمیت U_μ به راستی مانند یک چهاربردار تبدیل می‌شوند. آشکار است که اگر یک قانون فیزیکی که بر تساوی دو چهاربردار تأکید می‌ورزد، قرار باشد در اصل موضوع (۱۳-۱) [یا (۱۳-۴۲)] صدق کند، در این صورت چهار بردارها که در این معادله ظاهر می‌شوند باید چهار بردارهای فیزیکی در مفهوم بالا باشند. بنابراین اصل موضوع (۱۳-۱)، لازم است شکل و معنی قوانین فیزیکی در هر دستگاه مختصات لغت یکسان باشند. گوشزدهایی از این دست به طور آشکار برای چهار اسکالر‌ها نیز کاربرد دارد.

در تشابه با اصطلاحات متناظر در مورد بازه چهاربردار بین دو رویداد، گاهی می‌گوییم که یک چهاربردار A_μ فضاگونه است اگر برای خوداسکالر داشته باشیم: $(A_\mu, A_\mu) > 0$ ، و زمان‌گونه است اگر $(A_\mu, A_\mu) < 0$. بنابر معادله (۱۴-۲۷)، چهار سرعت یک چهاربردار زمان‌گونه است. در یک دستگاه مختصات خاص، می‌توان حاصل ضرب خوداسکالر یک چهاربردار را بر حسب مؤلفه زمانش، A_0 ، و جزء فضایی‌اش، $A = (A_1, A_2, A_3)$ ، از این قرار نوشت:

$$(A_\mu, A_\mu) = A \cdot A - (A_0)^2. \quad (14-28)$$

هر یک از دو جمله $(A_0)^2$ و $A \cdot A$ یک سه اسکالر است؛ فقط ترکیب (۱۴-۲۸) یک چهار اسکالر است. در حکم کاربرد جبر چهار بردارها، یک موج تخت را در نظر می‌گیریم که با بسامد زاویه‌ای ω و عدد موج k به کمک معادله زیر بیان می‌شود:

$$W = Ae^{i(k \cdot r - \omega t)}. \quad (14-29)$$

اگر چهار کمیت زیر را تعریف کنیم

$$k_0 = \omega/c, \quad k_1 = k_x, \quad k_2 = k_y, \quad k_3 = k_z, \quad (30-14)$$

می توانیم موج W را به این صورت بنویسیم:

$$W = Ae^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - k_0 x_0)} \quad (31-14)$$

چون فاز $(k \cdot r - \omega t) = (k_\mu, x_\mu)$ در هر نقطه خاص روی موج به وسیله مکانش یا در فضا یا زمان نسبت به یک قله یا یک فرورفتگی موج تعیین می شود، و چون قله یا فرورفتگی در هر دستگاه مختصاتی بدون ابهام شناخته می شود، فاز باید اسکالر باشد و مقدار یکسان (تا یک مضرب جمعی π) در تمام دستگاههای مختصات داشته باشد. با استفاده از قضیه (۱۴-۲۱) نتیجه می گیریم که چهار کمیت k_μ مؤلفه های یک چهار بردار هستند، زیرا حاصل ضرب شان با x_μ یک اسکالر است. چهار بردار k_μ را بردار موج می نامیم. این حقیقت که مؤلفه هایش مانند یک چهار بردار تغییر شکل می دهد ما را مجاز می دارد رابطه بین بسامد ω و عدد موج k در یک دستگاه مختصات را با بسامد ω^* و عدد موج k^* در هر دستگاه مختصات دیگری بیابیم. به خصوص، اکنون می توانیم اشتقاق زیباتری از معادله (۱۳-۵۲) برای اثر دوپلر نسبیتی به دست دهیم (مسئله ۵). از بردار موج k_μ می توانیم اسکالر ناوردای زیر را تشکیل دهیم

$$S = c^2 (k_\mu, k_\mu) = c^2 k^2 - \omega^2. \quad (32-14)$$

برای هر موج نوری، $S = 0$. برای موجی که سرعت فاز آن، (ω/k) ، کمتر از c است، S مثبت است. برای مقدار داده شده S ، معادله (۱۴-۳۲)، که رابطه بین ω و k برای هر موج خاصی است، غالباً رابطه پاشندگی برای آن موج نامیده می شود. خود کمیت S را می توان به صورت تابعی از ω یا k به دست داد. چون ω و k خودشان چهار اسکالر نیستند، اگر S تابعی از ω یا k باشد، در دستگاههای مختصات مختلف تابعی متفاوت خواهد بود. مثلاً، یک موج صوتی که با سرعت v در هوا حرکت می کند، دارای رابطه پاشندگی از این قرار است: $\omega = kv$. اگر در معادله (۱۴-۳۲) جایگذاری کنیم، می رسیم به

$$S = k^2 (v^2 - c^2), \quad \omega = kv \quad \text{اگر} \quad (33-14)$$

البته فرمول (۱۴-۳۳) تنها در دستگاه مختصاتی برقرار است که نسبت به هوایی که صوت در آن منتشر می شود، ساکن باشد. در هر دستگاه مختصاتی اسکالر S داده شده بر حسب بردار موج k_μ به کمک معادله (۱۴-۳۲)، مقدار یکسانی خواهد داشت، اما در دستگاه مختصاتی که در آن هوا حرکت می کند، بیان تابعی اش بر حسب k با معادله (۱۴-۳۳) فرق خواهد کرد. قانون $\omega = kv$ ، که معادل این ادعاست که امواج صوتی با سرعت فازی v منتشر می شوند، تنها در دستگاه مختصاتی صادق است که در آن هوا ساکن باشد. فرمول بندی نسبیتی صحیح قانون انتشار موج صوتی از این قرار خواهد بود که بگوییم با سرعت v نسبت به هوا منتشر می شود. وقتی این قانون به این طریق بیان شود، از هر انتخاب دلخواه دستگاه مختصات مستقل است؛ البته، به شیوه حرکت هوا وابسته است. وضعیت متضاد با این وضعیت با حالت یک موج نوری که در آن $v = c$ و رابطه پاشندگی عبارت است از $S = 0$ ، با همین شکل در تمام دستگاههای لخت صادق است.

اکنون سعی می‌کنیم یک چهار بردار عملگر دیفرانسیلی را تعریف کنیم که مشابه عملگر ∇ ، که در بخش ۳-۶ تعریف شد، خواهد بود. ابتدا تحقیق می‌کنیم که آیا نمادهای مشتق‌گیری $\partial/\partial x_\mu$ مانند مؤلفه‌های یک چهار بردار تغییر شکل می‌دهند یا خیر. برای این منظور، یک تابع اسکالر $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که f یک چهار اسکالر است، یعنی در نقطه‌ی زمان یکسان مقداری یکسان دارد، مستقل از این که چه دستگاه مختصات لختی به کار برده می‌شود. پس اگر f را به صورت تابعی از مجموعه‌ای جدید از مختصات x_μ^* بیان کنیم، مشتقاتش نسبت به متغیرهای جدید طبق قوانین معمول حساب دیفرانسیل و انتگرال از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\mu^*} = \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu^*}.$$

از معادلات (۱۴-۱۴) و (۱۴-۱۵) می‌رسیم به:

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu^*} = a_{\nu\mu}^{-1} = g_{\mu\nu} g_{\nu\sigma} a_{\sigma\mu}. \quad (۱۴-۳۴)$$

از معادلات بالا مشاهده می‌کنیم که قانون تبدیل برای مشتقات مختصه‌ای عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^*} = \sum_\nu g_{\mu\nu} g_{\nu\sigma} a_{\sigma\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \quad (۱۴-۳۵)$$

دیده می‌شود که مشتقات مختصه‌ای کاملاً مطابق با قانون (۱۴-۱۶) برای مؤلفه‌های یک چهار بردار تغییر شکل نمی‌دهند، زیرا بعضی جملات سمت راست معادله (۱۴-۳۵) شامل علامت منفی‌اند.^۱ با توجه به $(g_{\mu\mu})^2 = 1$ ، می‌توانیم مجموعه‌ای از عملگرهای دیفرانسیل به دست آوریم که مانند مؤلفه‌های یک چهار بردار تغییر شکل می‌دهند. برای این کار، $g_{\mu\mu}$ را در معادله (۱۴-۳۵) ضرب می‌کنیم:

$$g_{\mu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu^*} = \sum_\nu a_{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \quad (۱۴-۳۶)$$

عملگر دیفرانسیل چهار برداری \square_μ را، به نام چهارگردان، از قرار زیر تعریف می‌کنیم

$$\square_\mu = g_{\mu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu^*},$$

یعنی،

$$\square_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \square_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \square_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \square_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (۱۴-۳۷)$$

۱. خواننده‌ای که با تعمیم جبر برداری به دستگاههای غیرمتعامد آشناست، تمایز بین قوانین تبدیل (۱۴-۳۵) و (۱۴-۱۶) را مطابق تمایز بین بردارهای هموردا و پادوردا تلقی خواهد کرد. این امر، به علت اختلافات علامتی در حاصل ضرب اسکالر ناوردای (۱۴-۲۰) پدیدار می‌شود. نظر به اینکه حالت کنونی فقط مستلزم یک اختلاف علامتی است، تصمیم گرفته‌ایم که از وارد کردن صورتگرایی قدری پیچیده‌تر، که برای بررسی دستگاههای مختصات غیرمتعامد کلی ضروری است، اجتناب کنیم. در اینجا تنها یک نوع چهار بردار را معرفی می‌کنیم که طبق قانون تبدیل (پادوردا) (۱۴-۱۶) تغییر شکل می‌دهد.

مؤلفه‌های فضایی چهار بردار \square_μ دقیقاً مؤلفه‌های عملگر گرادیان در فضای عادی هستند، در حالی که مؤلفه‌ی زمان شامل مشتق‌گیری نسبت به t است.

با تشکیل حاصل ضرب اسکالر در خودش، به یک عملگر دیفرانسیل چهار اسکالر می‌رسیم که به اعتبار نظریه‌ی امواج (مثلاً، معادله‌ی (۸-۱۸۶)) با آن آشنا می‌شویم،

$$(\square_\mu, \square_\mu) = \square^\nu = \nabla^\nu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (۱۴-۳۸)$$

عملگر \square_μ نقشی مهم در نظریه‌ی امواج ایفا می‌کند. مثلاً، اگر فرض کنیم که کمیت W در موج (۱۴-۲۹) یک اسکالر است، در این صورت می‌توانیم عملگر \square_μ را اعمال و چهار بردار را به دست آوریم

$$\square_\mu W = i k_\mu W. \quad (۱۴-۳۹)$$

برای موج نوری ($\omega = kc$)، هر کمیت W که شاخص مؤلفه‌ای از موج است، معادله‌ی زیر را (در فضای تهی) برقرار می‌کند

$$\square^\nu W = 0. \quad (۱۴-۴۰)$$

با این شرط که مجموعه‌ی کمیت‌های W به‌طور مناسب تبدیل می‌شوند، ناوردایی در شکل این معادله تحت یک تبدیل لورنتس را این واقعیت تضمین می‌کند که \square^ν یک چهار اسکالر است. می‌توانیم از ابزار ریاضی خود بهره‌گیریم و یک معادله‌ی هموردای لورنتس برای موجی که با سرعتی غیر از سرعت نور حرکت می‌کند، از این قرار تشکیل دهیم:

$$\square^\nu W - \kappa^\nu W = 0, \quad (۱۴-۴۱)$$

که در آن κ ثابتی عمومی دارای ابعاد یک طول معکوس است. چون \square^ν و κ^ν هر دو اسکالرنند، هموردایی صوری است. اگر از معادله‌ی (۱۴-۲۹) جایگذاری کنیم رابطه‌ی پاشندگی

$$-k^2 + (\omega^2/c^2) - \kappa^2 = 0, \quad \text{یا در قالب نمادگذاری معادله‌ی (۱۴-۳۲),}$$

$$S = c^2 k^2 - \omega^2 = -c^2 \kappa^2. \quad (۱۴-۴۲)$$

را به دست می‌آوریم. خواننده‌ای که فصل ۸ را مطالعه کرده باشد، تشخیص خواهد داد که این یک موج با سرعت فازی

$$v_p = \omega/k = (\pm)c(1 + \kappa^2 k^{-2})^{1/2}, \quad (۱۴-۴۳)$$

است که از c بزرگتر (!) و یک سرعت گروهی

$$v_g = d\omega/dk = (\pm)c(1 + \kappa^2 k^{-2})^{-1/2}, \quad (۱۴-۴۴)$$

که از c کمتر است. سرعت فازی عبارت است از سرعتی که با آن یک الگوی سینوسی خالص متحرک به نظر می‌آید؛ اگر هیچ شیء فیزیکی با آن سرعت حرکت نکند، و از آنجا که یک الگوی سینوسی کامل اطلاعاتی حمل نمی‌کند، سرعت فازی یک موج می‌تواند از c درگذرد بی‌آنکه اصول نسبیت را نقض کند. مدوله‌سازی کم‌پسامد الگوی سینوسی با تقریباً سرعت گروهی حرکت می‌کند. بنابراین چون موج می‌تواند سیگنالها را حمل و در قالب سرعت گروهی انرژی را منتقل کند، v_g باید از c کمتر باشد تا در اصل موضوع نسبیت صدق کند.

۱۴-۲ قوانین بقا (پایستگی) نسبیتی

اکنون درصدد فرمول‌بندی چنان قوانین مکانیکی برمی‌آییم که در اصل نسبیت (۱۳-۴۲) صدق کند. اصل همخوانی ما را در این راه هدایت خواهد کرد؛ قوانین نسبیتی صحیح مکانیک نه تنها باید در اصل موضوع (۱۳-۴۲) صدق کنند، بلکه هرگاه تمامی سرعت‌های درگیر در آن در مقایسه با c چشم‌پوشیدنی باشند، باید به قوانین نیوتن کاهیده شوند. از یک دیدگاه مؤکداً منطقی، اصل موضوع نسبیت و اصل همخوانی برای تعریف نظریه جدید به نحوی منحصر به فرد کافی نیستند. ولی قوانین مکانیک نسبیتی که در نخستین مقاله^۱ اینشتین ارائه شد، و پوانکاره هم آن را مستقلاً پیشنهاد کرد،^۲ تنها مجموعه موجه قوانینی به‌شمار می‌آیند که در این شرایط که تاکنون پیشنهاد شده‌اند، صدق می‌کنند.

ساده‌ترین رویکرد از این قرار است که ابتدا در جستجوی یک تعمیم نسبیتی از قانون پایستگی تکانه (اندازه حرکت) بگردیم. بنابراین فرضیه‌ای را ارائه می‌کنیم که نظریه جدید شامل قانون بقایی شود که در حد سرعت‌های کم به قانون کلاسیک پایستگی (بقای) تکانه تبدیل خواهد شد. بنابر قانون پایستگی هر کمیت فیزیکی خاص ثابت می‌ماند، یا اینکه در هر دو زمان متفاوتی مقدار یکسان دارد. در مفهوم کلاسیکی، تکانه سیستم ذرات کمیتی برداری است که از حاصل جمع تکانه برداری تک‌تک ذرات، مطابق تعریف معادله (۴-۴)، تشکیل می‌شود. کاملاً روشن است که تعمیم قانون بقای تکانه شامل یک چهار بردار P_μ خواهد بود که بخش فضایی‌اش، P_i ، در حد سرعت‌های کم به بردار تکانه کلاسیک تبدیل می‌شود. با بهره‌گیری از معادله چهار سرعت (۱۴-۲۵) می‌توان به تعریفی مناسب دست یافت. بنابراین، یک چهار بردار، که آن را اندازه حرکت (تکانه) (چهار بردار) یک تک ذره می‌نامیم، بنابر تعریف، عبارت است از:

$$P_\mu = m U_\mu, \quad (14-45)$$

که در آن m جرم سکون ذره است که اغلب آن را مطلقاً جرم می‌گویند. m به‌عنوان جرمی تعریف می‌شود که معمولاً در دستگاه مختصاتی اندازه‌گیری می‌شود که در آن ذره ساکن یا تقریباً ساکن است. جرم m که به این روش تعریف شده آشکاراً کمیتی اسکالر است، یعنی در تمام دستگاه‌های مختصات مقدار یکسانی دارد. در هر دستگاه مختصات باید مقدار یکسانی m را به کار ببریم، یعنی جرم اندازه‌گیری شده توسط ابزارهای متحرکی که با همان سرعت ذره حرکت می‌کنند؛ این ابزارها مستقل از اینکه در چه دستگاه مختصاتی معادلات را می‌نویسیم، یکسان هستند. چون جرم سکون کمیتی اسکالر است، تکانه، P_μ ، هر ذره یک چهار بردار است. اجزای زمانی و فضایی تکانه از این

1. A. Einstein, *Annalen der Physik*, 17 (1905).

تعریف نیرو که اینشتین انتخاب کرد کمی سخت‌تر از آن بود که بعداً اختیار شد و ما آن را در بخش بعدی ارائه خواهیم کرد.

2. H. Poincaré, *Compt. Rend.*, 140, 1504 (1905).

قرار بیان می‌شوند:

$$p_x = \gamma mc, \\ p_\mu = \gamma mu. \quad (۱۴-۴۶)$$

چون $\gamma = 1$ ، اگر $c \ll u$ ، جزء فضایی چهار بردار P_μ برای سرعت‌های کم به بردار تکانه کلاسیک تبدیل می‌شود.^۱

اکنون تکانه کل دستگاهی از ذرات را به‌عنوان چهار برداری تعریف می‌کنیم که با جمع کردن تکانه‌های تک تک ذرات به دست می‌آوریم:

$$P_\mu = \sum_j p_{j\mu} = \sum_j m_j U_{j\mu}. \quad (۱۴-۴۷)$$

جزء فضایی بردار P_μ به تکانه کل کلاسیک تبدیل خواهد شد، اگر سرعت‌های تمام ذرات در مقایسه با c کوچک باشند.

اکنون پیشنهاد می‌کنیم که بنا بر قانون پایستگی نسبیتی، چهار تکانه کل ثابت می‌ماند،

$$(P_\mu)_{t=t_1} = (P_\mu)_{t=t_2}, \quad (۱۴-۴۸)$$

در مورد هر دو زمان t_1 و t_2 ، در مورد هر سیستمی از ذرات که چهار تکانه کلش P_μ است، و با اجسام دیگری خارج از سیستم برهم کنش نداشته باشد. قانون (۱۴-۴۸) شامل چهار معادله مربوط به چهار مقدار اندیس پایین μ است. بنا بر سه معادله به‌ازای $\mu = 1, 2, 3$ ، مقدار سه تکانه:

$$P = (P_1, P_2, P_3) = \sum_j m_j \gamma_j u_j, \quad (۱۴-۴۹)$$

ثابت می‌ماند. در حالت حدی سرعت‌های کم، این رابطه دقیقاً قانون پایستگی تکانه کلاسیک است. بنابراین، سه بردار P تعریف شده به وسیله (۱۴-۴۹) را می‌توان به‌طور کلی، مستقل از سرعت‌ها، سه تکانه نامید. معادله دیگری به‌ازای $\mu = 0$ در معادلات (۱۴-۴۸) یافت می‌شود که بنا بر آن کمیت

$$P_0 = \sum_j m_j c \gamma_j. \quad (۱۴-۵۰)$$

ثابت است، که در آن

$$\gamma_j = [1 - (u_j^2/c^2)]^{-1/2}. \quad (۱۴-۵۱)$$

برای اینکه به اهمیت این معادله پی ببریم، P_0 را به صورت یک سری توانی بر حسب u^2/c^2 بسط می‌دهیم:

$$P_0 = c \sum_j m_j + c^{-1} \sum_j \frac{1}{2} m_j u_j^2 + c^{-3} \sum_j \frac{3}{8} m_j u_j^4 + \dots \quad (۱۴-۵۲)$$

نخستین جمله دقیقاً مجموع جرم‌های سکون ذرات است که در c ضرب شده است، و بنا بر قوانین فیزیک کلاسیک ثابت خواهد بود. جمله دوم، عبارت کلاسیک انرژی جنبشی است که بر c

۱. در نسبیت، تعریف دقیق سه تکانه p هر ذره، صرفاً جزء فضایی p_i از چهار تکانه P_μ از کار در می‌آید. بنابراین، همان نماد (p) را برای هر دو به کار می‌بریم. توجه کنید که سه سرعت u جزء فضایی چهار سرعت U_μ نیست، بنابراین نمادهای مختلف (u, U) را برای تمایز قائل شدن بین آنها به کار برده‌ایم.

تقسیم شده است. اگر فرض کنیم این سرعتها چندان کم هستند که جملات مرتبه بالاتر چشم پوشیدنی باشند، در این صورت به نظر می رسد که بنا بر مؤلفه $\mu = 0$ مربوط به قانون پایستگی، انرژی جنبشی ثابت است. این نتیجه ای نامنتظره و اندکی نامطلوب و نگران کننده است، زیرا فقط به نوشتن یک قانون پایستگی تکانه اقدام کردیم. روشن است که در نظریه نسبیت، قانون پایستگی تکانه قانون پایستگی اضافی ای را ایجاد می کند، زیرا پایستگی یک چهار بردار با چهار مؤلفه را خواهد طلبید. بنابراین، در نظریه نسبیت، پایستگی انرژی و تکانه لازم و ملزوم یکدیگرند؛ وجود یکی بدون دیگری امکان ندارد. این امر در ابتدا کمی شگفت آور است، زیرا در مکانیک کلاسیک قوانین بقای تکانه و انرژی در جایگاه نسبتاً متفاوتی اند. قانون بقای تکانه تنها به قانون سوم نیوتن یا جنبه معادل دیگری از نظریه، بستگی دارد؛ به طور کلی برای تمام برهم کنشهای بین ذرات صادق است، دست کم به این شرط که تمامی تکانه مورد نظر را به حساب بیاوریم. بقای انرژی جنبشی که با جمله دوم در P متناظر است، فقط در مورد ردهای محدود از برهم کنشهای کاملاً کشسان در میان ذرات، در مکانیک کلاسیک، برقرار است. یک قانون کلی بقای انرژی برقرار است، اما ما را ملزم می کند تمام شکلهای انرژی، از جمله انرژی گرمایی و انرژیهای پتانسیل مرتبط با میدانهای نیروی متفاوت را به حساب بیاوریم. بنابراین در مکانیک کلاسیک انرژی کل را نمی توان برحسب مفاهیم صرفاً مکانیکی، یعنی، برحسب جرمها و سرعتهای ذرات درگیر، بیان کرد. نظر به اینکه می خواهیم بقای تکانه P_i ، بیان شده از طریق معادله (۱۴-۴۹)، به طور کلی تا زمانی برقرار باشد که هیچ مبادله تکانه ای بین سیستم مورد نظر و جهان خارج انجام نشود، به این نتیجه گیری ناگزیر می شویم که کمیت P_i به دست آمده از معادله (۱۴-۵۰) نیز تحت همان شرایط حفظ می شود، یعنی به این شرط که هیچ مبادله انرژی با جهان خارج برقرار نباشد. چون می دانیم که در حالت برخورد های ناکشسان، و در حوزه سرعتهای نانبیتی که جملات مرتبه بالاتر در معادله (۱۴-۵۲) چشم پوشیدنی اند، جمله دوم ثابت باقی نمی ماند، مجبور به این نتیجه گیری هستیم که جمله اول باید تغییرات در جمله دوم را جبران کند. بنابراین، تمام تغییرات در انرژی داخلی یک جسم به هر شکلی باید در قالب جرم سکونش منعکس شود.

انرژی نسبیتی یک جسم را برحسب جرم و سرعت به کمک فرمول زیر تعریف می کنیم:

$$E = cp_0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2} \mu u^2 + \frac{3}{4} \mu u^4 / c^2 + \dots \quad (53-14)$$

نخستین جمله این بسط، mc^2 ، انرژی سکون نامیده می شود؛ حتی وقتی سرعت جسم صفر باشد، این جمله وجود دارد. همان طور که در آخرین پاراگراف مشاهده کردیم، این جمله باید شامل تمام انواع انرژی داخلی جسم، از جمله انرژی گرمایی، انواع گوناگون انرژی پتانسیل داخلی، و نیز انرژی چرخشی در صورت وجود، باشد. در برخوردی ناکشسان، انرژی جنبشی می تواند به شکلی دیگر از انرژی درونی یا به عکس، برگردانده شود به طوری که انرژی سکون جسم و در نتیجه جرم آن تغییر کند. در فیزیک کلاسیک، جرم و انرژی به طور جداگانه پایسته اند. در مکانیک نسبیتی این دو قانون پایستگی به یک تک قانون پایستگی، یعنی پایستگی انرژی نسبیتی کل، E ، تبدیل می شوند. دومین

جمله بسط در معادله (۱۴-۵۳) عبارت کلاسیک مربوط به انرژی جنبشی است. جملات بعدی تصحیحات مرتبه بالاترند که در حد $u \ll c$ به صفر می‌رسند. می‌توان انرژی جنبشی نسبیتی را به‌عنوان انرژی حرکت جسم، بنابر تعریف، از این قرار بیان کرد:

$$T = E - mc^2 = \frac{1}{\gamma} mu^2 + \frac{3}{4} \frac{mu^4}{c^2} + \dots \quad (14-54)$$

محاسبه تغییرات در جرم مربوط به تغییرات در انرژی داخلی، جالب است. انرژی سکون کل یک گرم آب عبارت است از $mc^2 = 9 \times 10^{13} \text{ J}$. اگر آب را گرم کنند و دمایش را از 0°C به 100°C برسانند، انرژی گرمایی کل اضافه شده 418 J است. افزایش متناظر جرم عبارت است از $4.64 \times 10^{-12} \text{ g}$. این افزایش چندان اندک است که حتی با حساس‌ترین ترازو قابل اندازه‌گیری نیست. حال یک واکنش شیمیایی عادی را در نظر می‌گیریم. اگر یک گرم ذغال با $2/7$ گرم اکسیژن بسوزد تا $3/7$ گرم CO_2 تولید کند، انرژی رها شده 34000 J است. جرم کل CO_2 تولید شده در این واکنش به اندازه $3/8 \times 10^{-10} \text{ g}$ از کل جرم ذغال و اکسیژن کمتر است. این کمیت تا اندازه‌ای فراتر از دقتی است که در حال حاضر (1970) با بهترین ترازوهای شیمیایی می‌توان آن را سنجید. به‌ازای هر گرم از فرآورده‌های واکنشی، انرژی‌ای که در واکنشهای هسته‌ای می‌تواند رها شود خیلی زیادتر از انرژی‌ای است که در واکنشهای شیمیایی می‌تواند رها شود. مثلاً، اگر یک گرم اورانیم دستخوش شکافت قرار گیرد، انرژی رها شده عبارت است از $1.7/6 \times 10^{10} \text{ J}$. اگر این کمیت را بر c^2 تقسیم کنیم، نتیجه می‌گیریم که حاصل جمع جرمهای تمام فرآورده‌های شکافت در حدود $0.8 \times 10^{-6} \text{ g}$ از یک گرم اورانیم اولیه کمتر است. این کمیت جزء کوچکی از یک گرم، اما به آسانی قابل اندازه‌گیری است. پس انرژی رها شده در هر واکنش هسته‌ای فرضی می‌تواند از طریق توزین اجزای ترکیب‌کننده و فرآورده‌های واکنش و ضرب کردن اختلاف جرم در c^2 ، به‌دست آید. اگر P_μ عبارت باشد از چهار تکانه حرکت ذره‌ای به جرم m ، با ضرب کردن این کمیت در خودش می‌توان اسکالری به‌صورت زیر تشکیل داد:

$$(P_\mu, P_\mu) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2 = -m^2 c^2. \quad (14-55)$$

این واقعیت را که مقدار این کمیت اسکالر $-m^2 c^2$ است، می‌توان در هر دستگاه مختصاتی با محاسبه مستقیم تأیید کرد، یا به‌نحوی ساده‌تر با توجه به این نکته که چون کمیتی اسکالر است، می‌توانیم آن را در دستگاه مختصاتی ارزشیابی کنیم که در آن $u = 0$ ، و $\gamma = 1$. چهار تکانه ذره‌ای به جرم m ، مانند چهار سرعت، یک چهار بردار زمان‌گونه است.

اینستین خاطر نشان کرد که نظریه نسبیت این امکان را پیش می‌آورد که حرکت ذره‌ای با سرعت نور و جرم سکون صفر مجاز است. اگر در معادله (۱۴-۴۶) بگیریم: $u \rightarrow c$ و $m \rightarrow 0$ ، به‌طوری که حاصل ضرب $\gamma mc^2 = E$ ثابت بماند، می‌رسیم به:

$$p_0 = E/c, \quad p = cE/c^2, \quad (14-56)$$

که در آن c سرعت ذره و بزرگی آن c است. چنین ذره‌ای فوتون مرتبط با امواج الکترومغناطیسی است. این ذره، جرم سکون ندارد و انرژی‌اش را سرعت آن، که همواره c است، تعیین نمی‌کند، بلکه بنا به فرضیه اینشتین از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad (\hbar = h/2\pi), \quad (14-57)$$

که در آن h ثابت پلانک و $v = \omega / 2\pi$ بسامد موج الکترومغناطیسی است. حاصل ضرب اسکالری چهار بردار تکانه - انرژی هر فوتون در خودش صفر است؛ می توانیم آن را به نحوی مناسب چهار بردار نورگونه بنامیم.

در نظریه کوانتومی، یک هم‌ارزی بین امواج و ذرات برقرار است. هر پدیده موجی می تواند به طور متناوب بر حسب ذرات یا کوانتومها توصیف شود. برعکس، پدیده‌های متضمن ذرات می توانند متناوباً بر حسب امواج مربوطه توصیف شوند. موج وابسته به ذره‌ای که چهار تکانه‌اش P_μ است، دارای چهار بردار موج k_μ است که از فرمول زیر به دست می آید

$$P_\mu = \hbar k_\mu. \quad (58-14)$$

این رابطه در تمام دستگاههای مختصات لخت یکسان است، به طوری که فرض کوانتوم با اصل نسبیت سازگار است. اگر معادله (۵۸-۱۴) را در معادله (۵۵-۱۴) بنشانیم و از معادله (۳۰-۱۴) بهره گیریم، رابطه پاشندگی بین بسامد و عدد موج، موج وابسته به ذره‌ای به جرم m را به دست می آوریم:

$$\omega^2 - k^2 c^2 = m^2 c^4 / \hbar^2. \quad (59-14)$$

این روابط شالوده تشکیل و تدوین مکانیک موجی به شمار می آیند.

۱۴-۳ نظریه برخورد

عبارتهای نسبیتی مربوط به تکانه و انرژی یک ذره به صورتی که به کمک معادلات (۱۴-۴۶)، (۱۴-۵۳)، و (۱۴-۵۴) بیان شدند، قبلاً در فصل ۴ به دست آمدند (معادلات (۴-۷۳)، (۴-۷۴)، و (۴-۷۵)). این عبارتها به منظور بهره‌گیری از قوانین پایستگی انرژی و تکانه در جهت دستیابی به روابط بین تکانه‌های اولیه و نهایی، انرژیها، و زوایای پراکندگی در برخوردهای بین ذرات پراثری، معرفی شدند. همان طوری که در فصل ۴ اشاره شد، معادلات پایستگی (۴-۷۶)، (۴-۷۷)، و (۴-۷۸) را می توان برای ذرات پراثری به کار برد، اگر عبارتهای نسبیتی مربوط به تکانه و انرژی به کار برده شوند. اکنون به این سه معادله، معادله زیر را در مورد انرژی Q ، که در مرحله برخورد دو ذره ابتدایی با جرمهای m_1 و m_2 رها شد، و دو ذره نهایی با جرمهای m_3 و m_4 اضافه می کنیم:

$$Q = (m_1 + m_2 - m_3 - m_4) c^2. \quad (60-14)$$

اکنون مجموعه‌ای از N ذره، شاید شامل تعدادی فوتون، را در نظر بگیرید که تکانه - انرژی کل آن عبارت است از

$$P_\mu = \sum_{j=1}^N P_{j\mu}, \quad (61-14)$$

چون چهار بردارهای $P_{j\mu}$ جملگی زمان‌گونه یا نورگونه‌اند، می توان نشان داد (مسئله ۹) که چهار تکانه کل، P_μ ، زمان‌گونه است. تنها استثنا در این مورد، حالتی است که تمام N ذره فوتون باشند، جملگی در یک جهت حرکت کنند، که در این حالت P_μ نیز نورگونه است. بنابراین، می توان یک کمیت اسکالر M را به کمک معادله زیر تعریف کرد:

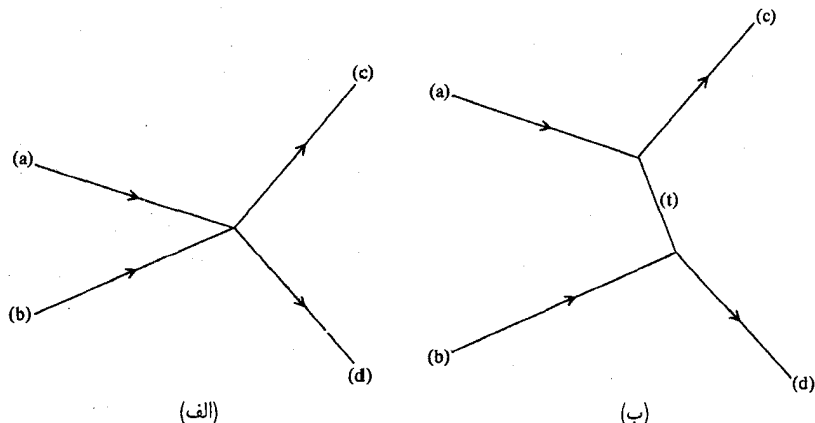
$$(P_\mu, P_\mu) = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - P_4^2 = -M^2 c^2. \quad (62-14)$$

کمیت اسکالر M را جرم ناوردای دستگاه می نامند. «ناوردا» به این واقعیت که عبارت (۱۴-۶۲) تحت یک تبدیل لورنتس ناورداست، اشاره می کند. اگر سیستمی از ذرات تحت تأثیر نیروهای خارجی قرار نگیرد، بنابر قانون پایستگی، تکانه P_μ و در نتیجه M نیز ثابت باقی خواهند ماند.

جرم ناوردا غالباً در مطالعه واکنشهای بین ذرات پرنورزی مفید است. مثلاً، فرض کنید که یک واکنش خاص که ممکن است در یک اتاقک حباب مشاهده شود، تعداد زیادی پیون تولید کند که دیده می شود و واکنش را ترک می کنند. جرم پیون معلوم است و اندازه حرکت هر پیون (باردار) با مشاهده جهت حرکت و شعاع انحنای مسیرش در میدان مغناطیسی، می تواند اندازه گیری شود؛ بنابراین، چهار تکانه p_μ هر پیون را که مشاهده می شود ناشی از واکنش است، می توان اندازه گرفت. فرض کنید گمان می رود که ذره ای با طول عمری چندان کوتاه که مشاهده شود، وجود دارد که به مثلاً سه پیون فرو می پاشد. جرم چنین ذره ای جرم ناوردای M خواهد بود که از حاصل جمع چهار تکانه سه پیونی محاسبه می شود که به آنها فرو می پاشد. بنابراین، برای بررسی فرضمان پیونهای مشهود از هر واکنش را به گروه های سه تایی به تمام روشهای ممکن، گروه بندی و برای هر گروه جرم ناوردای M را محاسبه می کنیم. این کار را برای تعداد زیادی از واکنشهای مشهود انجام می دهیم و توزیع مقادیر محاسبه شده M را مطالعه می کنیم. اگر فرضیه ما درست باشد، بسیاری از مقادیر M به صورت خوشه ای در پیرامون مقدار خاصی یافت خواهند شد که در این صورت جرم ذره فرضی است که آن را می جوئیم. اگر فرضیه ما نادرست باشد، انتظار خواهیم داشت که کم و بیش توزیعی تصادفی از مقادیر M به دست آوریم.

اکنون واکنشی ناشی از برخورد دو ذره تابشی (a) و (b) را در نظر می گیریم که دو ذره نهایی (c) و (d) را، مطابق آنچه در شکل ۱-۱۴ (الف) نشان داده شده، تولید می کند.

می توانیم این واکنش را از طریق دادن چهار تکانه $p_{a\mu}$ و $p_{b\mu}$ ذرات تابشی و $p_{c\mu}$ و $p_{d\mu}$ ذرات نهایی، به طور اختصاصی توصیف کنیم. پس این واکنش از طریق شانزده مؤلفه این چهار چهار بردار تعیین می شود. اگر همین واکنش در دستگاه مختصات ستاره دار توصیف شود، چهار تکانه ها طبق معادله تبدیل لورنتس (۱۴-۱۶) تغییر شکل خواهند داد. ضرایب تبدیل لورنتس، $a_{\mu\nu}$ ، به شش پارامتر وابسته اند: سه مؤلفه که سرعت دستگاه مختصات ستاره دار نسبت به دستگاه مختصات بی ستاره را



شکل ۱-۱۴ یک واکنش دو ذره ای که دو ذره نهایی تولید می کند.

تعیین می‌کنند، و سه زاویه که سمتگیری محورهای ستاره‌دار نسبت به محورهای بی‌ستاره را معین می‌کنند. بنابراین، انتظار داریم که شانزده مؤلفهٔ چهار، چهار تکانه بتوانند به وسیلهٔ ده پارامتر ناوردایی تعیین شوند که واکنش را به صورتی مستقل از دستگاه مختصات و شش پارامتر دیگری (به‌طور اختصاصی) توصیف می‌کنند، که به دستگاه مختصات خاصی که در آن چهار تکانه‌ها محاسبه می‌شوند، بستگی دارند. در واقع به آسانی می‌توانیم ده کمیت اسکالر از چهار، چهار تکانه را از طریق تشکیل دادن چهار حاصل ضرب در خودش $(p_{a\mu}, p_{a\mu})$ و مانند آنها، و شش زوج حاصل ضرب مانند $(p_{a\mu}, p_{b\mu})$ و غیره، بسازیم. قانون پایستگی تکانه - انرژی

$$p_{a\mu} + p_{b\mu} = p_{c\mu} + p_{d\mu} \quad (۱۴-۶۳)$$

چهار معادله بین مؤلفه‌های تکانه به دست می‌دهد، به طوری که از ده ناوردای اسکالر، تنها شش مؤلفه می‌توانند مستقل باشند. چهار مؤلفه از اینها را می‌توان جرمهای چهار ذره درگیر در واکنش در نظر گرفت، که به وسیلهٔ چهار حاصل ضرب اسکالر در خودش، به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} m_a^2 c^2 &= (E_a^2 / c^2) - |p_a|^2, \\ m_b^2 c^2 &= (E_b^2 / c^2) - |p_b|^2, \\ m_c^2 c^2 &= (E_c^2 / c^2) - |p_c|^2, \\ m_d^2 c^2 &= (E_d^2 / c^2) - |p_d|^2. \end{aligned} \quad (۱۴-۶۴)$$

پنجمین پارامتر مناسب، جرم ناوردای ذرات زوج ابتدایی M است که بنابر قانون پایستگی عبارت است از جرم ناوردای ذرات زوج نهایی که به کمک این معادله به دست داده می‌شود:

$$\begin{aligned} M^2 c^2 &= -(p_{a\mu} + p_{b\mu}, p_{a\mu} + p_{b\mu}) = -(p_{c\mu} + p_{d\mu}, p_{c\mu} + p_{d\mu}) \\ &= (E_a + E_b)^2 / c^2 - |p_a + p_b|^2. \end{aligned} \quad (۱۴-۶۵)$$

ششمین پارامتر ناوردا را برای راحتی می‌توان حاصل ضرب کمیت اسکالر در خودش گرفت

$$S = (p_{a\mu} - p_{c\mu}, p_{a\mu} - p_{c\mu}) = (p_{d\mu} - p_{b\mu}, p_{d\mu} - p_{b\mu}), \quad (۱۴-۶۶)$$

که در آن تساوی دوم از قانون پایستگی نتیجه می‌شود. حاصل ضرب اسکالر مشابه هفتمی نیز وجود دارد

$$T = (p_{a\mu} - p_{d\mu}, p_{a\mu} - p_{d\mu}) = (p_{c\mu} - p_{b\mu}, p_{c\mu} - p_{b\mu}), \quad (۱۴-۶۷)$$

که، بنابر بحثهای بالا، نمی‌تواند مستقل از شش حاصل ضرب قبلی باشد (مسئله ۱۲).

اگر کمیت اسکالر S (یا T) منفی یا صفر باشد، می‌توانیم تفسیر جالب زیر را برای S به دست دهیم. فرض کنید که واکنش موردنظر در دو گام، مطابق شکل ۱۴-۱ (ب)، انجام می‌شود. ذره (a) ابتدا به دو ذره (c) و (t) وامی‌باشد. سپس بین ذره (t) و ذره (b) واکنش انجام می‌گیرد که ذره نهایی (d) را تشکیل دهد. در این صورت، از قانون پایستگی آشکار است که کمیت $p_{a\mu} - p_{c\mu} = p_{t\mu}$ چهار تکانهٔ ذره (t) است. در این صورت ناوردای $S = -M_t^2 c^2$ جرم ذره (t) را به دست می‌دهد.

چهار بردار $P_{\alpha\mu} - P_{c\mu}$ را غالباً انتقال تکانه در واکنش می‌نامند. کمیت اسکالر S را گاهی انتقال تکانه ناوردای مجذوری می‌گویند.

دیدیم که علاوه بر جرم چهار ذره، فقط دو ناوردای M و S مرتبط به واکنش وجود دارد. بنابراین، هر کمیت ناوردای وابسته به واکنش، مثلاً سطح مقطع که در زیر تعریف می‌شود، باید به صورت تابعی از M و S قابل بیان باشد.

در فصل ۴ مشاهده کردیم که در مکانیک کلاسیک برای تجزیه و تحلیل‌های نظری راحت‌تر است دستگاه مختصات مرکز جرم را به کار ببریم. در مطالعه قوانین‌های نسبیتی، که در آنجا دستگاه مختصات مرکز جرم را به عنوان دستگاهی تعریف می‌کنیم که در آن سه تکانه کل P صفر است، نیز این امر صادق است. چون P_{μ} زمان‌گونه است، یافتن دستگاه مختصاتی که در آن P به صفر برسد، همواره امکان‌پذیر است (مسئله ۱۳). در دستگاه مرکز جرم، مؤلفه زمان P_0 برابر Mc خواهد بود که M جرم ناورداست. خواننده تشخیص خواهد داد که چون ضرایب یکسان $a_{\mu\nu}$ در معادلات تبدیل (۱۴-۱۶) برای چهار بردارها و معادله (۱۴-۶) برای مختصات ظاهر می‌شوند، مسئله یافتن دستگاه مرکز جرم به طور جبری همان مسئله یافتن دستگاه مختصاتی است که در آن دو رویداد E^1, E^2 (که فاصله‌های زمان‌گونه آنها را جدا کرده‌اند) در نقطه فضایی یکسان در زمانهای مختلف رخ می‌دهند. آزمایشها معمولاً در دستگاه مختصاتی انجام داده می‌شوند که در آنها یکی از ذرات ابتدایی، مثلاً (b) ، در حال سکون باشد. چنین دستگاه مختصاتی، دستگاه مختصات آزمایشگاهی نامیده می‌شود.

کمیت Mc^2 ، که در آن M جرم ناوردای گروهی از ذرات است، انرژی کل در دستگاه مختصات مرکز جرم است، و بنابراین انرژی مرکز جرم نامیده می‌شود. اگر گروهی از ذرات در یک واکنش تولید شود، حاصل جمع انرژیهای سکونشان ($\sum_i m_i c^2$) همواره کمتر از Mc^2 است، جز وقتی که تمام ذرات در حال سکون باشند، و در این حالت حاصل جمع انرژیهای سکونشان درست برابر انرژی مرکز جرم است. با محاسبه Mc^2 برای ذرات ابتدایی در دستگاه مختصات آزمایشگاهی، می‌توان آستانه‌ای را برای هر واکنش خاص در هنگامی تعیین کرد که انرژی ذره تابشی چندان بزرگ باشد که انرژی مرکز جرم با حاصل جمع انرژی سکون ذراتی که تولید می‌شوند، برابر باشد (مسئله ۱۴). به‌ازای انرژیهای ذره تابشی کمتر از آستانه، آن واکنش خاص انجام‌پذیر نخواهد بود.

اکنون تلاش می‌کنیم یک سطح مقطع را برای یک واکنش به روشی به‌طور نسبیتی ناوردا، تعریف کنیم. فرض می‌کنیم در ابتدا دو گروه از ذرات (a) و (b) با تکانه‌های $P_{\alpha\mu}$ ، $P_{b\mu}$ یافت می‌شوند که با هم واکنشی انجام می‌دهند که علاقمندیم سطح مقطع آن را تعریف کنیم. در این لحظه چیزی درباره ماهیت واکنش فرض نمی‌کنیم، جز اینکه واکنشی یا مجموعه‌ای از واکنشهای قابل شناخت است و اینکه اگر تبدیلهای مختصات را در نظر بگیریم، به واکنش همسانی در هر دستگاه مختصات اشاره می‌کنیم. واکنش یکسان در حالت کلی در دستگاههای مختصات مختلف، گوناگون به نظر می‌آیند. مثلاً، وقتی مختصات را تبدیل می‌کنیم، ممکن است زوایای پراکندگی تغییر کنند. به‌طوری که پارامترهای لازم به‌منظور تعیین کردن واکنش خاصی که در نظر داریم باید به‌هنگام تغییر دستگاههای مختصات، به‌طور مناسب تبدیل شوند. برای آسانی کار فقط دستگاههای مختصاتی را در نظر خواهیم گرفت که در آنها سرعت ذرات (a) و (b) موازی باشند یا اینکه یکی از دو سرعت صفر باشد. پس

فرض می‌کنیم که ذرات (a) با سرعت u_a و ذرات (b) با سرعت u_b به موازات محور x حرکت می‌کنند. ذرات (b) را ذرات هدف می‌نامیم و مطابق مطالب بخش ۳-۱۶، فرض می‌کنیم که هر یک از ذرات هدف، همراه خودش سطح مقطعی، σ ، عمود بر جهت حرکتش را حمل می‌کند. ما سطح مقطع σ را با این استلزام که احتمال وقوع واکنش برابر است با احتمال آنکه یک ذره نقطه‌ای (a) از سطح مقطع σ مربوط به ذره هدف (b) گذر کند، تعریف می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که چون سطح σ عمود بر جهت حرکت ذره (b) است، از سرعت ذره (b) مستقل خواهد بود و در نتیجه در تمام دستگاه‌های مختصات از نوعی که ما در نظر می‌گیریم، یکسان خواهد بود. فرض کنید که چگالیهای ذرات از هر نوع بر حسب واحد حجم، به ترتیب، n_a و n_b باشند. اگر صفحه‌ای موازی صفحه yz فرض کنیم که با سرعت u_b (علامت u_b نمایانگر جهت در امتداد محور x است) حرکت می‌کند، تعداد ذرات (a) در واحد سطح در واحد زمان که از این سطح می‌گذرند آشکارا $|u_a - u_b| n_a$ است. پس تعداد واکنشها، dN ، که در یک زمان dt در یک حجم dV رخ می‌دهند، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$dN/dt dV = |u_a - u_b| n_a n_b \sigma. \quad (14-68)$$

چگالی، n_a ، از این رابطه یافت می‌شود:

$$n_a = dN_a / dV, \quad (14-69)$$

که در آن dN_a تعداد ذرات در حجم dV است. حال اگر به دستگاه مختصات دیگری منتقل شویم، ضمن اینکه توجه خود را به گروهی ثابت از ذرات نوع (a) معطوف می‌کنیم، عدد dN_a در دستگاه مختصات جدید یکسان خواهد ماند اما حجم dV تغییر خواهد کرد. اگر دستگاه مختصاتی را در نظر بگیریم که در آن ذرات از نوع (a) ساکن باشند، و اگر حجم اشغال شده توسط dN_a از این ذرات در این دستگاه مختصات ساکن dV_a باشد، در این صورت حجمی که در هر دستگاه مختصات دیگری اشغال می‌کنند از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$dV = dV_a / \gamma_a, \quad (14-70)$$

چنان که می‌بینیم، اگر توجه کنیم که ابعاد dV در جهت حرکت ذرات (a) به اندازه عامل γ_a کاهش می‌یابند در حالی که ابعاد عمود بر این جهت را حرکت متأثر نمی‌کند. بنابراین، می‌توانیم چگالی n_a را بر حسب چگالی $n_{.a}$ در دستگاه مختصاتی که در آن ذرات (a) ساکن‌اند، بنویسیم:

$$n_a = \gamma_a n_{.a}. \quad (14-71)$$

چگالی مناسب $n_{.a}$ آشکارا یک اسکالر است، زیرا (در هر دستگاه مختصاتی) به مثابه چگالی‌ای تعریف می‌شود که در دستگاه مختصاتی که در آن ذرات (a) در حال سکون‌اند، محاسبه می‌شود.

اکنون می‌توانیم معادله (۱۴-۶۸) را به صورت زیر بنویسیم

$$dN/dt dV = \gamma_a \gamma_b |u_a - u_b| n_{.a} n_{.b} \sigma. \quad (14-72)$$

می‌توان نشان داد (مسئله ۲۰) که عنصر چهار حجمی $dV dt$ تحت تبدیلیهای لورنتس ناورد است. چون dN تعداد واکنشهایی است که در آن عنصر چهار حجمی رخ می‌دهند، dN نیز یک کمیت

اسکالر است، و بنابراین سمت چپ معادله (۱۴-۷۲) یک اسکالر است. چون، مطابق بحثهای بالا، سه عامل آخر معادله (۱۴-۷۲) اسکالرند، کمیت $\gamma_a \gamma_b |u_a - u_b|$ تحت تبدیلهای ویژه لورنتس از نوع (۱۴-۷) باید ناورد باشد. تأیید وجود چنین حالتی از طریق محاسبه مستقیم برعهده خواننده نهاده می شود (مسئله ۲۱). معادله (۱۴-۷۲) تعریفی از سطح مقطع ناوردای σ در هر دستگاه مختصاتی را به دست می دهد که در آن u_a و u_b موازی (یا پاد موازی) اند. تعریف را می توان به دستگاههای مختصات دلخواه تعمیم داد اما در اینجا این کار را نمی کنیم (مسئله ۲۲).

حال می خواهیم ببینیم که چقدر می توانیم درباره سطح مقطع فقط از خواص تبدیل فرا بگیریم. اغلب واکنشی را می خواهیم که در آن ذره ای نهایی، مثلاً (c) ، با تکانه p_c و انرژی E_c ظاهر می شود. ذرات نهایی دیگر (d) ، (e) و غیره، می توانند هر انرژی مجاز لخت قوانین پایستگی را داشته باشند. (اگر تنها دو ذره نهایی (c) و (d) موجود باشند، $p_{d\mu}$ بنابر قوانین پایستگی، وقتی $p_{c\mu}$ داده شده است، تعیین می شود.) چون معمولاً p_a و E_a می توانند در یک گستره هر مقداری را داشته باشند، ما به سطح مقطع دیفرانسیل $d\sigma$ برای تولید ذره (c) با انرژی و تکانه ای در گستره کوچکی از مقادیر، علاقمندیم. اگر جرم m_c نیز بتواند در یک گستره تغییر کند، می توانیم یک حالت نامعمول، ^۱ بنویسیم

$$d\sigma = F(M, \text{غیره}) dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} dE_c, \quad (۱۴-۷۳)$$

چون سطح مقطع مربوط به تولید ذره (c) با تکانه p_c در داخل گستره کوچکی، $dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz}$ قرار می گیرد و انرژی بین E_c و $E_c + dE_c$ است. اکنون می توانیم نشان دهیم (مسئله ۲۰) که عنصر حجمی $dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} dE_c$ در فضای انرژی - تکانه یک چهاراسکالر است. چون $d\sigma$ نیز یک اسکالر است، نتیجه می شود که تابع F نیز اسکالر است، و بنابراین تنها می تواند به ناورداهای وابسته به فرایند M و S در حالت نهایی دو جسم بستگی داشته باشد. برای یافتن تابع $F(M, S, \dots)$ لازم است نظریه واکنش ویژه را استنتاج کنیم. در اکثر مثالهای موردنظر، این کار مستلزم استفاده از قوانین مکانیک کوانتومی خواهد بود.

در حالت معمولی که جرم m_c ثابت است، بین انرژی و تکانه معادله (۱۴-۵۵) رابطه برقرار می کند:

$$p_c^2 c^2 + m_c^2 c^4 = E_c^2. \quad (۱۴-۷۴)$$

در این صورت می توانیم فقط تکانه نهایی p_c را مشخص کنیم، زیرا در این حالت E_c تعیین می شود. سطح مقطع $d\sigma$ را به منظور تولید p_c در یک گستره $dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz}$ لازم داریم. عنصر فضا-تکانه $dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz}$ ناورد نیست. برای یافتن خواص تبدیل آن، به جای E_c جرم m_c مرتبط به آن از طریق معادله (۱۴-۷۴) را، می نشانیم، و فعلاً این امکان را برای در اختیار داشتن گستره ای از مقادیر برای m_c فراهم می آوریم. سپس یا با مشتق گیری از معادله (۱۴-۷۴) با ثابت نگه داشتن p_{cx} ، p_{cy} ، p_{cz} ، یا با تشکیل دترمینان ژاکوبی مناسب، می رسیم به:

$$dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} dE = dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} c^2 m_c dm_c / E_c. \quad (۱۴-۷۵)$$

۱. جز برای ذراتی که، بنابر قوانین مکانیک کوانتومی، طول عمر خیلی کوتاه دارند.

حال جرم ساکن m_c و نیز dm_c ، یک چهاراسکالر است، که عضو سمت چپ معادله (۱۴-۷۵)، است، بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$(۱۴-۷۶) \quad \text{تحت تبدیل لورنتس ناورداست.} \quad dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} / E_c$$

اگر چه با در نظر گرفتن گستره‌ای از مقادیر برای m_c به این نتیجه رسیده‌ایم، نتیجه نهایی مستقل از dm_c است، و بی‌توجه به اینکه گستره این مقادیر مجاز چقدر کوچک باشد، برقرار است. از اینجا، نتیجه می‌گیریم که برای ثابت m_c نیز برقرار است. بنابراین می‌نویسیم

$$(۱۴-۷۷) \quad d\sigma = F(M, \text{ و غیره}) dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} / E_c,$$

که در اینجا نیز F باید کمیتی اسکالر باشد. از آنجا که

$$(۱۴-۷۸) \quad dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} = p_c^\nu dp_c d\Omega_c = [E_c^2 - m_c^2 c^4]^{1/2} E_c dE_c d\Omega_c / c^2,$$

می‌توانیم سطح مقطع را برای گسیل ذره (c) به داخل زاویه فضایی $d\Omega_c$ با تکانه p_c به $p_c + dp_c$ یا با انرژی E_c به $E_c + dE_c$ ، را نیز بنویسیم.

شاید خواننده تیزهوش پی ببرد که در حالتی که فقط دو ذره نهایی با جرمهای ثابت m_d و m_c یافت می‌شوند، و تنها هشت مؤلفه چهار تکانه‌های $P_{d\mu}$ و $P_{c\mu}$ وجود دارند، قوانین پایستگی چهار رابطه بین آنها را به دست می‌دهد، و ما دو معادله مانند معادله (۱۴-۷۴) داریم، به طوری که فقط دو متغیر باقی می‌ماند که دیفرانسیل آنها می‌تواند در قالب $d\sigma$ ظاهر شوند. اگر گستره زاویه‌ای $d\Omega_c$ را در نظر بگیریم که ذره (c) در داخل آن جای دارد، تکانه، p_c ، و انرژی اش، E_c باید تعیین شوند. علی‌الاصول می‌توانستیم این حالت را با روشی مشابه با روش پاراگراف قبلی، با یافتن خواص تبدیلی $d\Omega_c$ تحت این شرایط، بررسی کنیم. عملیات جبری نسبتاً پیچیده‌اند و به انجام آنها مبادرت نخواهیم ورزید.

۱۴-۴ معادلات نسبیتی حرکت

(۳-۲) نیرو در مکانیک نسبیتی را به صورت آهنگ زمانی تغییر تکانه نسبیتی تعریف می‌کنیم به گونه‌ای که معادله حرکت عبارت می‌شود از

$$(۱۴-۷۹) \quad dp / dt = F.$$

اگر معادله (۱۴-۷۹) را به عنوان تعریف نیروی F بگیریم، در این صورت باید معادلات تبدیل دقیق و مناسب برای نیرو را چنان بیابیم که معادله (۱۴-۷۹) در تمام دستگاههای مختصات برقرار باشد. برای این کار، ابتدا معادله‌ای هم‌ارز برحسب چهار بردارها می‌نویسیم. اگر زمان عادی τ را به عنوان متغیر مستقل بگیریم که ساعتی آن را اندازه‌گیری می‌کند که با ذره در حرکت است، معادله حرکت را می‌توان برحسب چهار بردار از این قرار نوشت:

$$(۱۴-۸۰) \quad dp_\mu / d\tau = \mathcal{F}_\mu,$$

که در آن چهار کمیت \mathcal{F}_μ ، باید یک چهار بردار باشد اگر قرار است این معادله در تمام دستگاهها از شکلی یکسان برخوردار باشد. \mathcal{F}_μ را چهار نیرو می‌نامیم. با توجه به معادلات (۱۴-۴۶)،

(۱۳-۲۷)، (۱۴-۵۳)، و (۱۳-۲۵) پی می‌بریم که معادلات (۱۴-۷۹) و (۱۴-۸۰) روابط زیر را

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{\gamma}{c} \cdot \frac{dE}{dt} = \frac{\gamma}{c} u \cdot \dot{F}, \quad (۱۴-۸۱)$$

$$\mathcal{F}_1 = \gamma F_x, \quad \mathcal{F}_2 = \gamma F_y, \quad \mathcal{F}_3 = \gamma F_z,$$

اگر از معادله (۱۴-۵۵) نسبت به τ مشتق بگیریم، مشاهده می‌کنیم که \mathcal{F}_μ باید در معادله زیر صدق کند:

$$(p_\mu, \mathcal{F}_\mu) = (U_\mu, \mathcal{F}_\mu) = 0. \quad (۱۴-۸۲)$$

برای به دست آوردن معادله (۱۴-۸۲) فرض کرده‌ایم که جرم سکون m ثابت است؛ این فرض را در روند دستیابی به اولین معادله از معادلات (۱۴-۸۱) نیز بجا آوردیم. در برخوردهای ناکشسان، همان‌طوری که مشاهده کرده‌ایم، جرم سکون ثابت نمی‌ماند. در چنین حالت‌هایی، وقتی نیروها انرژی داخلی و در نتیجه جرم یک جسم را تغییر می‌دهند، معادله (۱۴-۸۲) دیگر برقرار نیست، $dE/dt \neq u \cdot F$ ، و نخستین معادله از معادلات (۱۴-۸۰) می‌تواند از سه معادله دیگر مستقل باشد. در این صورت، معادلات (۱۴-۷۹) باید با معادله‌ای مکمل شوند که dE/dt یا dm/dt را می‌دهد. هر نیرویی، و به‌ویژه نیروی الکترومغناطیسی، که جرم سکون ذره‌ای را تغییر ندهد که بر آن وارد می‌آید در معادله (۱۴-۸۲) صدق خواهد کرد. ما فرض خواهیم کرد معادله (۱۴-۸۲)، جز در طول برخورد ناکشسان، برقرار است.

خواننده می‌تواند تحقیق کند که مؤلفه‌های \mathcal{F}_μ به دست آمده از معادلات (۱۴-۸۱) واقعاً در معادله (۱۴-۸۲) صدق می‌کنند. ملاحظه می‌کنیم که شکل چهار برداری (۱۴-۸۰) معادلات حرکت شامل چهار معادله است که از میان آنها چهارمی (معمولاً) زاید است زیرا با استفاده از معادله (۱۴-۸۲) می‌توان آن را از سه معادله اول نتیجه گرفت. اگر چه شکل (۱۴-۸۰) برای معادلات حرکت راحت‌تر است، وقتی که مقصودمان بررسی ناوردای نسبیتی است، اگر بخواهیم معادلات حرکت در یک دستگاه مختصات را بنویسیم و حل کنیم، زیرا برحسب مختصه زمان t بیان می‌شوند، در این صورت راحت‌ترین شکل معادله (۱۴-۷۹) است. ویژه زمان τ متغیر خیلی راحتی نیست، به خصوص اگر با بیش از یک ذره سروکار داشته باشیم، زیرا هر یک از ذرات ویژه زمان خاص خودش را حمل می‌کند.

نظر به اینکه می‌دانیم چگونه چهار بردار \mathcal{F}_μ را از یک دستگاه مختصات لخت به دیگری انتقال دهیم، می‌توانیم نیروی F را با محاسبه مؤلفه‌های \mathcal{F}_μ از معادلات (۱۴-۸۱)، محاسبه \mathcal{F}_μ^* در دستگاه مختصات جدید، و سپس استفاده از معادلات (۱۴-۸۱)، انتقال دهیم تا F^* در دستگاه مختصات جدید به دست آید. اگر این روش را برای حالت ویژه‌ای انجام دهیم که محورهای موازی‌اند و حرکت نسبی در امتداد محور x است، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} F_x^* &= F_x - \beta(1 - \beta u_x/c)^{-1} (u_y F_y + u_z F_z) / c, \\ F_y^* &= \gamma^{-1} (1 - \beta u_x/c)^{-1} F_y, \\ F_z^* &= \gamma^{-1} (1 - \beta u_x/c)^{-1} F_z, \end{aligned} \quad (۱۴-۸۳)$$

که در آن βc سرعت دستگاه مختصات ستاره‌دار نسبت به دستگاه بی‌ستاره است، $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ، و u_x, u_y, u_z مؤلفه‌های سرعت ذره یا نقطه‌ای است که بر آن نیروی F وارد می‌آید. توجه کنید که معادلات تبدیل برای سه نیرو نه تنها شامل سرعت دستگاه مختصات، بلکه حاوی سرعت ذره‌ای که بر آن نیرو وارد می‌آید، نیز هستند.

۱۴-۵ جوابهای معادلات حرکت

مسئله نسبتاً دشوار یافتن قوانین نیرو را که طبق معادلات (۱۴-۸۳) تبدیل می‌شوند، تا بخش بعدی به تعویق می‌اندازیم. فرض می‌کنیم نیروی F وارد بر یک ذره تابعی از مختصات است، این پرسش را مطرح کنیم که تحت چه شرایطی می‌توانیم مسئله را حل کنیم و حرکت ذره را به دست آوریم. اگر نیرو به صورت فقط تابعی از t داده شده باشد، $F(t)$ ، در این صورت از معادلات (۱۴-۷۹) می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت و تکانه $p(t)$ را به دست آورد. همین که p دانسته شود، می‌توان معادلات (۱۴-۴۶) را بر حسب سرعت u حل کرد. این کار معمولاً به آسان‌ترین صورتی به این ترتیب انجام می‌شود که ابتدا آن را به ازای عامل γ ، با استفاده از رابطه زیر که از معادله (۱۴-۴۶) نتیجه می‌شود، حل می‌کنیم:

$$p^2/m^2c^2 = \beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1. \quad (14-84)$$

وقتی $\gamma(t)$ معلوم باشد، سرعت u بلافاصله به کمک معادله زیر به دست می‌آید:

$$u = dr/dt = p/m\gamma. \quad (14-85)$$

اکنون می‌توانیم انتگرال بگیریم تا مکان $r(t)$ را به دست آوریم. مثلاً، ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که نیروی ثابت F بر آن وارد می‌آید و آن را موازی جهت x می‌پنداریم. اگر ذره از حالت سکون در $t = 0$ شروع به حرکت کند، تکانه‌اش در هر زمان بعدی به کمک معادله زیر داده خواهد شد.

$$p = Ft. \quad (14-86)$$

در معادله (۱۴-۸۴) می‌نشانیم و به ازای γ حل می‌کنیم

$$\gamma = [1 + (Ft/mc)^2]^{1/2}. \quad (14-87)$$

حال باید از معادله زیر انتگرال بگیریم

$$dx/dt = c(Ft/mc)[1 + (Ft/mc)^2]^{-1/2}, \quad (14-88)$$

تا برسیم به

$$x = x_0 + (mc^2/F)[1 + (Ft/mc)^2]^{1/2} - mc^2/F. \quad (14-89)$$

مشاهده می‌کنیم که به ازای $t \rightarrow \infty$ داریم $c \rightarrow u$ ، همان طوری که انتظار داشتیم.

اگر بتوان نیروی F را از یک تابع انرژی پتانسیل $V(r)$ به دست آورد، در این صورت اولین معادله از معادلات (۱۴-۸۱)، که آن نیز از معادلات (۱۴-۷۹) قابل دستیابی است، می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{d}{dt}(mc^2\gamma) = -u \cdot \nabla V, \quad (14-90)$$

که در آن $mc^2\gamma$ را به جای E نوشته‌ایم که علامت بعدی را برای انرژی کل نگه داریم. چون $u = dr/dt$ ، با در نظر گرفتن تعریف (۳-۱۰۷) گرادیان، معادله (۱۴-۹۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d}{dt}(mc^2\gamma + V) = 0, \quad (14-91)$$

یا

$$mc^2\gamma + V = E, \quad (14-92)$$

که در آن E کمیتی ثابت است که می‌توان آن را انرژی کل نامید.

معادله (۱۴-۹۲) را بر حسب بزرگی سرعت حل می‌کنیم

$$u = c[1 - m^2 c^4 (E - V)^{-2}]^{1/2}. \quad (14-93)$$

این معادله، سرعت را به صورت تابعی از مکان به دست می‌دهد. اگر حرکت یک بعدی باشد که در نتیجه $u = dx/dt$ ، در این صورت می‌توانیم در اصل از معادله (۱۴-۹۳) انتگرال بگیریم تا حرکت $x(t)$ را به دست آوریم. متأسفانه، به سختی می‌توان تابع پتانسیلی $V(x)$ را یافت که برای آن عملیات جبری لازم را بتوان به آسانی انجام داد. به هر حال، معادله (۱۴-۹۲) یا (۱۴-۹۳) را می‌توان برای ارائه توصیف کیفیتی از حرکت به کار برد.

وقتی حرکت سه بعدی است، می‌توان مانند فصل ۳، تکانه زاویه‌ای حول مبدأ را به صورت بردار

$$L = r \times p, \quad (14-94)$$

و گشتاور - نیرو را به صورت

$$N = r \times F. \quad (14-95)$$

تعریف کنیم. اکنون به آسانی از معادله (۱۴-۷۹) می‌رسیم به:

$$\frac{dL}{dt} = N. \quad (14-96)$$

در مورد نیروی مرکزی، در اینجا نیز می‌توانیم ثابت کنیم که تکانه زاویه‌ای، L ، یک ثابت حرکت است. در این صورت، مسئله نیروی مرکزی می‌تواند در اینجا نیز علی‌الاصول به همان ترتیب مطرح شده در بخش ۳-۱۳ برای حالت کلاسیک، حل شود. دوباره بگوییم که جواب واقعی در اکثر موارد، به علت شکل پیچیده‌تر معادله (۱۴-۹۱)، به دشواریهای جبری بازدارنده‌ای برمی‌خورد.

اکنون ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که دستخوش نیروی F قرار می‌گیرد که از انرژی پتانسیل $V(r)$ مشتق می‌شود، و به عنوان متغیر مستقل زمان τ را به کار می‌بریم که به وسیله ساعتی اندازه‌گیری می‌شود که همراه ذره حرکت می‌کند. با این متغیر مستقل، «سرعت» دقیقاً جزء فضایی چهار سرعت است

$$\frac{dx_i}{d\tau} = U_i. \quad (14-97)$$

«شتاب» بنابر معادلات (۱۴-۴۵) و (۱۴-۷۹) به کمک این عبارت به دست می‌آید:

$$m \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = \gamma F_i = -\gamma \frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (14-98)$$

اگر به جای γ از معادله (۹۲-۱۴) جایگذاری کنیم، مشاهده می‌کنیم که می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر نوشت:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \nabla \frac{(E - V)^2}{2mc^2}. \quad (۹۹-۱۴)$$

این عبارت همان شکل معادله حرکت نیوتن برای ذره‌ای را دارد که تحت تأثیر یک انرژی پتانسیل $(E - V)^2 / (2mc^2) -$ است. با تشکیل رابطه زیر، می‌توان ارتباط با قانون کلاسیک را روشن‌تر توضیح داد

$$E = E_c + mc^2, \quad (۱۰۰-۱۴)$$

به طوری که E_c انرژی جنبشی کل به علاوه انرژی پتانسیل کل است، و انرژی سکون ثابت حذف شده است. اکنون توجه می‌کنیم که

$$\nabla \frac{(E - V)^2}{2mc^2} = -\nabla \left[V - \frac{(E_c - V)^2}{2mc^2} \right],$$

به گونه‌ای که اگر قرار دهیم

$$V_{\text{rel}} = V - \frac{(E_c - V)^2}{2mc^2}, \quad (۱۰۱-۱۴)$$

معادله (۹۹-۱۴) شکل کلاسیکی را به خود می‌گیرد

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla V_{\text{rel}}. \quad (۱۰۲-۱۴)$$

این رابطه ثابت می‌کند که قضیه نقل شده در مسئله ۵۷ از فصل ۳، که مدار به دست آمده از نظریه نسبیت خاص برای ذره‌ای متحرک تحت انرژی پتانسیل $V(\mathbf{r})$ همان مداری است که ذره طبق قوانین مکانیک نیوتن طی می‌کند اگر انرژی پتانسیل V_{rel} می‌بود. اما، زمان در مسئله کلاسیکی هم‌ارز مختصه زمان نیست، بلکه ویژه زمان نسبت به ذره است. همچنین توجه کنید که انرژی پتانسیل هم‌ارز V_{rel} به انرژی E_c بستگی دارد.

همان طوری که بعداً خواهیم دید، نتیجه گرفته خواهد شد که نیروی الکترومغناطیس وارد بر ذره‌ای باردار در نظریه نسبیت به کمک فرمول آشنای لورنتس کلاسیک برای نیرو (۳-۲۸۳) نیز به دست می‌آید. بنابراین، معادله حرکت نسبیتی برای ذره‌ای باردار در میدان الکترومغناطیسی عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (۱۰۳-۱۴)$$

چون نیروی مغناطیسی بر سرعت \mathbf{u} عمود است، در اینجا نیز کارساز نیست، و آهنگ تغییر انرژی مکانیکی ذره بار دیگر از این قرار به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dt} (\gamma mc^2) = \mathbf{gu} \cdot \mathbf{E}. \quad (۱۰۴-۱۴)$$

در مورد میدان الکترومغناطیس استاتیکی، میدان الکتریکی را می‌توان، مانند معادله (۳-۲۸۶)، از پتانسیل استخراج کرد:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (۱۰۵-۱۴)$$

در این حالت، انرژی به قرار زیر ثابت است:

$$\gamma m c^2 + q\phi = E \quad (106-14)$$

اگر میدان الکتریکی صفر باشد، در این صورت بنابر معادله (۱۰۴-۱۴) انرژی مکانیکی ثابت است و می‌توان عامل $m\gamma$ در p را از مشتق‌گیری در معادله (۱۰۳-۴) حذف کرد، که در این صورت

$$m\gamma \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (107-14)$$

این همان معادله حرکت کلاسیک برای ذره‌ای در میدان مغناطیسی است، با این تفاوت که به جای جرم سکون m به وسیله ثابت $m\gamma$ را می‌نشانند که گاهی «جرم عرضی» نامیده می‌شود. به این ترتیب، حرکت نسبیتی ذره‌ای باردار در میدان مغناطیسی همان حرکت کلاسیکی آن است، با این تفاوت که جرمش به اندازه ضریب γ افزایش یافته است. به خصوص، طبق نتایج به دست آمده در بخش ۳-۱۷، ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی ثابت یکنواخت روی دایره‌ای به شعاع

$$r = \frac{cm\gamma u}{qB} = \frac{cp}{qB}, \quad (108-14)$$

با بسامد

$$\nu = \frac{qB}{2\pi m\gamma c}, \quad (109-14)$$

طبق معادلات (۳-۲۹۵) و (۳-۲۹۹)، حرکت می‌کند.

به‌عنوان آخرین مثال، اشتقاق در بخش ۴-۵ را چنان تعمیم می‌دهیم که معادله حرکت را برای موشکی به دست آوریم که یا موشک یا گازهای خروجی، و یا هر دو، بتوانند با سرعت‌های نسبیتی حرکت کنند. مانند بخش ۴-۵ عمل می‌کنیم و معادله‌ای می‌نویسیم که بیانگر پایداری تکانه دستگاهی باشد که از یک موشک به علاوه گازها که در طول یک زمان کوتاه dt خارج می‌شوند تشکیل شده باشد. تکانه موشک عبارت است از

$$\mathbf{p} = M\gamma \mathbf{u}, \quad (110-14)$$

که در آن u سرعت، $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ ، و M جرم سکون موشک است که با زمان، حین خروج گازها از موتور موشک، تغییر می‌کند. اگر در طی مدت زمان dt ، جرم سکون مواد خارج شده dM_e و سرعت آن نسبت به هر دستگاه مختصاتی u_e باشد که به کار می‌بریم، تکانه این گازهای خروجی عبارت است از $dM_e \gamma_e u_e$. به علاوه، اگر بر این نیروی خارجی F بر موشک وارد آید، در این صورت معادله توازن تکانه در خلال زمان dt عبارت است از

$$d\mathbf{p} + dM_e \gamma_e u_e = \mathbf{F} dt.$$

پس، آهنگ تغییر زمانی تکانه موشک با معادله زیر بیان می‌شود

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{dM_e}{dt} \gamma_e u_e \quad (111-14)$$

چون سرعت خروج و آهنگ خروج جرم معمولاً نسبت به خود موشک تعیین می‌شوند، بهتر است جمله دوم را برحسب کمیت‌های اندازه‌گیری شده در دستگاه مختصاتی که در آن موشک برای یک لحظه در حال سکون است، بیان کنیم. این نوع بیان، احتمالاً با راحت‌ترین وجهی با نوشتن معادله در نمادگذاری چهاربرداری انجام می‌پذیرد. بنابراین، طرفین معادله را در γ ضرب می‌کنیم به طوری که اکنون به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \mathcal{F}_i - \frac{dM_e}{d\tau} U_{ei}, \quad (112-14)$$

که در آن $d\tau$ ویژه زمان نسبت به موشک است و \mathcal{F}_i به کمک معادله (۱۴-۸۱) به دست می‌آید. چون جرم سکون، dM_e ، کمیتی اسکالر است، معادله چهار بردار مربوطه آشکارا از این قرار خواهد بود:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu - \frac{dM_e}{d\tau} U_{e\mu}. \quad (113-14)$$

معادله اضافی به ازای $\mu = 0$ ، عبارت است از

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \mathcal{F}_0 - \frac{dM_e}{d\tau} \gamma_e c. \quad (114-14)$$

اگر طرفین این معادله را در c/γ ضرب کنیم، به معادله انرژی می‌رسیم:

$$\frac{dE}{dt} + \gamma_e \frac{dM_e}{dt} c^2 = u \cdot F, \quad (115-14)$$

که به درستی و دقت بیان می‌کند که آهنگ افزایش انرژی موشک به علاوه آهنگی که تحت آن انرژی در خروجی موشک ظاهر می‌شود، باید با آهنگ تأمین انرژی به وسیله نیروی خارجی، اگر چنین نیرویی وجود داشته باشد، برابر شود.

اگر جمله آخر طرف راست معادله (۱۴-۱۱۳) را نیرویی تلقی کنیم که بر موشک وارد می‌آید، پی می‌بریم که در معادله (۱۴-۸۲) صدق نمی‌کند، بلکه به جای آن،

$$\left(p_\mu, -\frac{dM_e}{d\tau} U_{e\mu} \right) = -M \frac{dM_e}{d\tau} (U_\mu, U_{e\mu}), \quad (116-14)$$

که به طور کلی صفر نیست. جرم سکون موشک ثابت نیست، و این معنی در این واقعیت منعکس می‌شود که عضو سمت راست معادله (۱۴-۱۱۳) در معادله (۱۴-۸۲) صدق نمی‌کند. اگر برای حالت حاضر از معادله (۱۴-۵۵) مشتق بگیریم، به رابطه مفید زیر می‌رسیم:

$$\left(p_\mu, \frac{dp_\mu}{d\tau} \right) = -M c^2 \frac{dM}{d\tau} = -M \frac{dM_e}{d\tau} (U_\mu, U_{e\mu}), \quad (117-14)$$

که در آن آخرین عضو از معادلات (۱۴-۱۱۳) و (۱۴-۱۱۶) نتیجه می‌شود، چنانچه فرض کنیم چهار نیروی خارجی \mathcal{F}_μ در معادله (۱۴-۸۲) صدق نمی‌کند. حاصل ضرب اسکالر $(U_\mu, U_{e\mu})$ در تمام دستگاه‌های مختصات مقداری یکسان دارد؛ این امر به آسان‌ترین وجه در دستگاه

مختصاتی ارزیابی می شود که در آن موشک برای لحظه ای در حال سکون باشد که به ازای $U_0 = c$ ، داشته باشیم $U_i = 0$. نتیجه عبارت است از

$$(U_\mu, U_{e\mu}) = -\Gamma c^2, \quad (118-14)$$

که در آن

$$\Gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (119-14)$$

و V سرعت خروجی نسبت به خود موشک است. در این صورت، به رابطه زیر می رسیم که بین آهنگ تغییر جرم سکون موشک و آهنگ ظاهر شدن جرم سکون در آگروز برقرار است:

$$\frac{dM}{d\tau} = -\Gamma \frac{dM_e}{d\tau}. \quad (120-14)$$

اگر طرفین این معادله را در c^2 ضرب کنیم، مشاهده می کنیم که این معادله صرفاً حاکی از آن است که در دستگاه مختصاتی که در آن موشک برای لحظه ای در حال سکون باشد، انرژی جنبشی کل به علاوه انرژی سکون که در آگروز ظاهر می شود برابر است با آهنگ کاهش انرژی سکون کل موشک.

در تشابه با رویه ای که در مورد موشک غیرنسبیتی به کار گرفتیم، $p_\mu = MU_\mu$ را در معادله (۱۱۳-۱۴) قرار می دهیم و جمله شامل $dM/d\tau$ را به طرف راست جابه جا می کنیم:

$$M \frac{dU_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu + \frac{dM}{d\tau} \left(\frac{U_{e\mu}}{\Gamma} - U_\mu \right), \quad (121-14)$$

که در آن از معادله (۱۲۰-۱۴) بهره گرفته ایم. اکنون جمله دوم در سمت راست را برحسب سرعتها نسبت به دستگاه مختصاتی بیان می کنیم که در آن موشک برای لحظه ای در حال سکون است. ما یک اندیس بالای «۰» برای مشخص کردن کمیتها در دستگاه مختصات سکون موشک را به کار می بریم، که در نتیجه $U_i^0 = 0$ ، $U_i^0 = c$ ، $U_{ei}^0 = \Gamma V_i$ ، $U_{e0}^0 = \Gamma c$ ، $U_{\mu\nu}^0$ اگر ضرایب تبدیل از دستگاه سکون به دستگاهی باشند که در آن چهار سرعت موشک U_μ است،

$$U_{e\mu} = \sum_\nu a_{\mu\nu} U_{e\nu}^0 = \Gamma a_{\mu 0} c + \Gamma \sum_i a_{\mu i} V_i. \quad (122-14)$$

ضرایب $a_{\mu 0}$ را می توان از معادله زیر محاسبه کرد

$$U_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} U_\nu^0 = a_{\mu 0} c. \quad (123-14)$$

در معادله بالا می نشانیم و می رسیم به:

$$U_{e\mu} = \Gamma U_\mu + \Gamma \sum_i a_{\mu i} V_i. \quad (124-14)$$

چون Γ کمیتی اسکالر است (مستقل از اختیار کردن دستگاه مختصات، ثابت است)، نخستین جمله سمت راست معادله (۱۲۴-۱۴) یک چهار بردار است، و در نتیجه دومین جمله نیز باید باشد، زیرا طرف چپ، چهار بردار است. نتیجه می گیریم که چهار کمیت $\sum_i a_{\mu i} V_i$ به ازای $\mu = 0, 1, 2, 3$

مؤلفه‌های یک چهار بردار هستند. در معادله (۱۴-۱۲۱) می‌نشانیم که معادله حرکت برای موشک را به صورت زیر به دست آوریم

$$M \frac{dU_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu + \mathcal{J}_\mu, \quad (14-125)$$

که در آن چهار بردار \mathcal{F}_μ ، که آن را چهار پیشران موتور موشک می‌نامیم، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{dM}{d\tau} \sum_i a_{\mu i} V_i. \quad (14-126)$$

اگر محور x را در جهت حرکت موشک بگیریم که در نتیجه ضرایب $a_{\mu i}$ به کمک معادله (۱۴-۷) داده می‌شوند، مؤلفه‌های چهار پیشران عبارت‌اند از

$$\mathcal{F}_x = \beta\gamma V_x \frac{dM}{d\tau}, \quad \mathcal{F}_1 = \gamma V_x \frac{dM}{d\tau}, \quad \mathcal{F}_y = V_y \frac{dM}{d\tau}, \quad \mathcal{F}_z = V_z \frac{dM}{d\tau}. \quad (14-127)$$

جالب است توجه کنید که چهار پیشران \mathcal{F}_μ در معادله (۱۴-۸۲) صدق می‌کند، همان طوری که به آسانی با محاسبه حاصل ضرب اسکالر (U_μ, \mathcal{F}_μ) در چارچوب سکون موشک مشاهده می‌کنیم. نظر به اینکه \mathcal{F}_μ در معادله (۱۴-۸۲) صدق می‌کند، می‌توانیم معادله (۱۴-۱۲۵) را نیز برحسب مختصه زمان به شکل زیر بنویسیم

$$M \frac{d(\gamma u)}{dt} = F + T, \quad (14-128)$$

که در آن سه پیشران T به کمک معادلات زیر به دست می‌آید

$$T_x = V_x \frac{dM}{d\tau}, \quad T_y = \frac{V_y}{\gamma} \frac{dM}{d\tau}, \quad T_z = \frac{V_z}{\gamma} \frac{dM}{d\tau}. \quad (14-129)$$

اگر سرعت موشک، u ، خیلی از c کمتر باشد، این معادله به عبارت غیرنسبیتی ناشی از اولین جمله سمت راست معادله (۴-۵۴) تبدیل می‌شود، وقتی توجه کنیم که u در معادله (۴-۵۴) متناظر است با V در معادله حاضر. اگر موتور موشک در یک موقعیت آزمایشی در حال سکون نگه داشته شود، سمت چپ معادله (۱۴-۱۲۸) صفر می‌شود، و مشاهده می‌کنیم که پیشران T درست منفی نیروی لازم برای نگهداری موتور موشک به حال سکون است. در این صورت، پیشران در دستگاه مختصاتی که در آن موتور موشک حرکت می‌کند صرفاً از طریق تبدیل کردن از دستگاه مختصاتی که در آن موتور در حال سکون است، با به کار بردن قانون نیرو - تبدیل معمولی (۱۴-۸۳) برای پیشران، به دست می‌آید. [توجه کنید که قانون تبدیل (۱۴-۸۳) برای نیرو بر مبنای رابطه (۱۴-۸۱) بین سه نیرو و چهار نیرو پایه‌گذاری می‌شود که دلالت می‌کند بر اینکه چهار بردار در معادله (۱۴-۸۲) صدق می‌کند.]

اکنون معادله (۱۴-۱۲۸) را برای حالت خاصی حل می‌کنیم که یک موشک از حال سکون شتاب‌دار می‌شود بی‌آنکه نیروی دیگری بر آن وارد آید ($F = 0$). در این صورت محور x را در جهت شتاب می‌گیریم که در نتیجه مؤلفه x معادله (۱۴-۱۲۸) از این قرار خواهد شد:

$$M \frac{d(\gamma u)}{dt} = -\gamma V \frac{dM}{dt},$$

که در آن قرار داده ایم $dM/dt = \gamma dM/dt$ و $V_x = -V$. با استفاده از رابطه (۱۴-۸۴) این معادله را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$M \frac{d(\beta\gamma)}{dt} = -[1 + (\beta\gamma)^2]^{1/2} B \frac{dM}{dt}, \quad (14-130)$$

که در آن

$$B = \frac{V}{c}.$$

از معادله (۱۴-۱۳۰) انتگرال می گیریم و به ازای $t = 0$ ، از $\beta = 0$ ، و $M = M_0$ شروع می کنیم تا برسیم به:

$$\beta\gamma + [1 + (\beta\gamma)^2]^{1/2} = \left(\frac{M_0}{M}\right)^B$$

که جوابش عبارت است از

$$\beta\gamma = \frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{M_0}{M}\right)^B - \left(\frac{M_0}{M}\right)^{-B} \right]. \quad (14-131)$$

در حد غیرنسبیتی، می توان نوشت

$$\left(\frac{M_0}{M}\right)^B = e^{B \ln(M_0/M)} \doteq 1 + B \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) + \dots,$$

به طوری که معادله (۱۴-۱۳۱) در حد به صورت زیر درمی آید

$$u \doteq V \ln\left(\frac{M_0}{M}\right), \quad V \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) \ll c, \quad u \ll c \quad \text{اگر} \quad (14-132)$$

که با نتیجه کلاسیک (۴-۵۶) می خواند. در نهایت حالت نسبیتی متقابل، $(M_0/M)^B \gg 1$ ، داریم

$$\gamma \doteq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{M_0}{M}\right)^{V/c}, \quad \left(\frac{M_0}{M}\right)^{V/c} \gg 1 \quad \text{اگر} \quad (14-133)$$

برای رسیدن به یک سرعت نسبیتی، مثلاً $\gamma = 5$ ، حتی با سرعت خروجی $V=c$ ، به خروج ۹۰ درصد جرم اولیه موشک به صورت فوتون یا ذرات پُرانرژی نیاز است.

۱۴-۶ قوانین نیروی نسبیتی. الکترودینامیک

وقتی در نظریه نسبیت می کوشیم قانون نیرویی را برای برهم کنش بین دو ذره فرمول بندی کنیم که به فاصله ای از یکدیگر قرار دارند، با دشواریهایی مواجه می شویم. مثلاً، اگر سعی کنیم قانون گرانش نیوتن را به شیوه ناوردای نسبیتی فرمول بندی کنیم، با این مسئله روبه رو می شویم که فاصله بین دو جسم برهم کنشی در دستگاههای مختصات مختلف، متفاوت است. اگر فاصله بین دو جسم تغییر کند، یک مشکل اساسی تر بروز می کند که زائیده نسبیت همزمانی است. فرض می شود که نیروی وارده به ذره (a) در زمان t به مکانهای نسبی ذرات (a) و (b) در همان زمان t بستگی دارد. اگر دو ذره به فاصله ای از هم قرار داده شده باشند، در این صورت لحظه یا رویداد در ذره (b) که همزمان

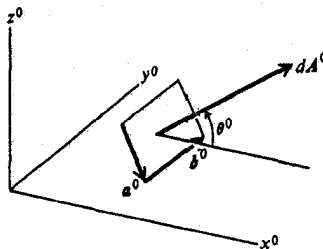
است با رویداد در ذره (a) در زمان t ، در دستگاههای مختصات مختلف متفاوت خواهد بود، با این وجود گمان می‌رود که نیرو به فاصله بین این دو رویداد بستگی دارد! حتی در مورد قانون سوم نیوتن هم دشواری پیش می‌آید که ادعا می‌کند نیروی $F_{a \rightarrow b}$ که ذره (a) به ذره (b) وارد می‌آورد برابر و مختلف‌الجهت نیروی $F_{b \rightarrow a}$ است که ذره (b) به ذره (a) وارد آورد. اگر نیروها با گذشت زمان تغییر کنند، قانون سوم احتمالاً حاکی از آن است که این نیروها مساوی و مختلف‌الجهت‌اند هرگاه آنها را همزمان اندازه بگیریم. ولی اگر دو جسم از هم دور باشند، زمان در ذره (b) که همزمان است با زمان مشخصی در ذره (a) ، به دستگاه مختصات برآیند بستگی دارد و قانون سوم در اصل موضوع نسبیت صدق نخواهد کرد.

این مشکل در مورد نیروهای تماسی، که در آنها دو ذره یا جسم برهم‌کنشی در نقطه یکسانی در فضا قرار داده می‌شوند، بروز نمی‌کند. در این حالت، کنش و واکنش نیروها در نقطه یکسانی روی می‌دهد و در مورد همزمانی‌شان مشکلی پیش نمی‌آید. قانون سوم نیوتن، که در مواردی به کار می‌رود که کنش و واکنش در نقطه یکسانی رخ می‌دهند، در اصل موضوع نسبیت صدق نمی‌کند. مثلاً فشار در سیال را در نظر می‌گیریم که در بخش ۵-۱۱ به صورت نیروی وارد بر واحد سطح در سیال تعریف کرده‌ایم. ابتدا یک دستگاه مختصات اختیار می‌کنیم، که آن را با اندیس بالای «۰» مشخص خواهیم کرد، که در آن سیال در نقطه خاصی در حال سکون است. حال عنصر سطحی کوچکی از سطح dA^0 در سیال را در نظر بگیرید، و عنصر سطحی برداری dA^* را تعریف کنید که بزرگی‌اش مساحت عنصر سطحی و جهتش عمود بر عنصر سطحی است (شکل ۱۴-۲). می‌توانیم، بدون وارد آمدن لطمه بر حالت کلی، با این فرض که بردار dA^* در صفحه $x^0 z^0$ قرار می‌گیرد و با محور x^0 زاویه θ^0 می‌سازد، بحث را ساده کنیم. نیروی وارد از جانب سیال در جزء پشت عنصر سطحی dA^* بر سیال در جزء جلو، بنا به تعریف فشار، p^0 ، عبارت است از

$$F^* = p^0 \cdot dA^*, \quad (14-134)$$

مؤلفه‌های نیرو در سه جهت عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} F_x^* &= p^0 \cos \theta^0 \cdot dA^* = p^0 \cdot dA_x^*, \\ F_y^* &= 0, \\ F_z^* &= p^0 \sin \theta^0 \cdot dA^* = p^0 \cdot dA_z^*. \end{aligned} \quad (14-135)$$



شکل ۱۴-۲ عنصری از سطح در یک سیال.

اکنون تبدیل به یک دستگاه مختصات آزمایشگاهی را انجام می‌دهیم که در آن سیال در امتداد محور x با سرعت $u = \beta c$ حرکت می‌کند. در این صورت، سرعت دستگاه مختصات آزمایشگاهی نسبت به دستگاه سکون در جهت x عبارت است از $-\beta c$. می‌توانیم از معادلات (۱۴-۸۳) برای یافتن مؤلفه‌های نیرو در دستگاه مختصات جدید بهره‌گیریم:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x^* = p^* dA_x^*, \\ F_y &= \gamma^{-1} F_y^* = 0, \\ F_z &= \gamma^{-1} F_z^* = p^* \gamma^{-1} dA_y^*, \end{aligned} \quad (14-136)$$

در اینجا از این نکته بهره‌گرفته‌ایم که سرعت سیالی که بر آن نیرو وارد می‌آید، در دستگاه سکون صفر است.

برای یافتن عبارتی مربوط به عنصر سطح dA در دستگاه آزمایشگاهی، فرض می‌کنیم که عنصر سطحی به شکل متوازی‌الاضلاعی است که بردار a در صفحه xz و بردار b در جهت y (شکل ۱۴-۲) آن را احاطه می‌کنند، به طوری که

$$dA = a \times b. \quad (14-137)$$

چون b بر جهت حرکت عمود است، در هر دو دستگاه مختصات طول یکسانی خواهد داشت:

$$b = b^* = b \cdot \hat{y}. \quad (14-138)$$

فرض کنید که بردار a از این قرار بیان شود

$$a = a_x \hat{x} + a_z \hat{z}. \quad (14-139)$$

در این صورت، به علت انقباض لورنتس در جهت x ، خواهیم داشت

$$a_x = \gamma^{-1} a_x^*, \quad a_z = a_z^*. \quad (14-140)$$

اکنون می‌توانیم بردار dA را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} dA &= (a_x \hat{x} + a_z \hat{z}) \times b \cdot \hat{y} \\ &= b \cdot a_x^* \gamma^{-1} \hat{z} - b \cdot a_z^* \hat{x} \\ &= dA_x^* \hat{x} + \gamma^{-1} dA_z^* \hat{z}. \end{aligned} \quad (14-141)$$

این عبارت، قانون تبدیل برای عنصر سطح را به دست می‌دهد:

$$dA_x = dA_x^*, \quad dA_y = \gamma^{-1} dA_y^*, \quad dA_z = \gamma^{-1} dA_z^*, \quad (14-142)$$

که در آن به منظور کامل شدن، مؤلفه y را گنجانده‌ایم، که در حالت حاضر صفر است. در دستگاه مختصات آزمایشگاهی، فشار بنابر معادله زیر تعریف خواهد شد

$$F = p dA. \quad (14-143)$$

با جایگذاری به جای سمت چپ رابطه بالا از معادله (۱۴-۱۳۶) و به جای طرف راست آن از

معادله (۱۴-۱۴۲)، مشاهده می‌کنیم که نیرو به دقت در دستگاه مختصات آزمایشگاهی داده می‌شود اگر قرار دهیم:

$$p = p^*, \quad (14-144)$$

که از آن نتیجه می‌گیریم که فشار در یک سیال یک چهاراسکالر است. البته، قانون سوم نیوتن خودبه‌خود برقرار است زیرا واکنش نیرو از طریق انتخاب عنصر سطحی مخالف، $-dA$ ، به دست می‌آید. قانون نیرو در این حالت، معادله حالت سیال خواهد بود که فشار p^* را برحسب متغیرهای مناسب، مثلاً چگالی و دمای سیال در دستگاه مختصاتی که در آن سیال در حال سکون است، بیان می‌کند.

در مورد نیروهایی که بین دو جسم دور از یکدیگر عمل می‌کنند، رضایت‌بخش‌ترین روش نوشتن یک قانون نیروست که اصول موضوع نسبیتی در آن صدق کند که به نظر می‌رسد درجه میدان نیرویی است که از یک جسم به دیگری انتقال پیدا می‌کند. در این روش از مشکلات تعیین نیرویی که مستقیماً بین اجسامی که به فاصله‌ای از یکدیگر قرار دارند، اجتناب می‌شود. قوانین بقا با مجاز داشتن اینکه میدان خودش انرژی و تکانه را حمل می‌کند، برقرار می‌شوند. قانون سوم نیوتن دیگر در این مورد ضروری نیست. همان طوری که در بخش ۴-۴ اشاره شد، این ملاحظات در فیزیک کلاسیک برای میدان نیرویی که بین اجسام با سرعتی متناهی انتقال پیدا می‌کند، نیز صدق می‌کنند. اگرچه قانون گرانش نیوتن ساده‌ترین قانون نیروی بنیادی در فیزیک کلاسیک به‌شمار می‌آید؛ تعمیم نسبیتی آن با دشواریهای جدی مواجه است (ر. ک. مثلاً مسئله ۴۰). نظریه نسبیت عام اینشتین نظریه نسبیتی گرانش است؛ اما تدوین و بیان ریاضی آن از حوصله این فصل ما خارج است. فرمول‌بندی قوانین الکترودینامیک به دست ماکسول تحت یک تبدیل لورنتس، همان طوری که اکنون نشان خواهیم داد، ناوردا از کار درمی‌آید.

بهتر خواهد بود که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را برحسب پتانسیلهای اسکالری و برداری بیان کنیم. ما در اینجا ادعا می‌کنیم (بدون اثبات) که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان به روش زیر برحسب یک پتانسیل اسکالری ϕ و یک پتانسیل برداری A نوشت:^۱

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \left[\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (14-145)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

۱. ادامه بحث بعدی مستلزم فهم و درکی از الکترودینامیک نیست. خواننده‌ای که علاقمند است موضوع را بیشتر دنبال کند، می‌تواند به یکی از کتابهای متعارف در الکتریسیته و مغناطیس مراجعه کند، مثلاً، Panofsky and Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1955. (در این کتاب یکاهای mks به کار رفته است)

ما در سراسر این بحث الکترودینامیک از یکاهای گاوسی استفاده خواهیم کرد، همانگونه که آنها به طور روشن تری ساختمان معادلات را از دیدگاه نظریه نسبیت بروز می دهند. وقتی یکاهای گاوسی را به کار می بریم، تنها ثابت بنیادی که در معادلات الکترودینامیک ظاهر می شود سرعت نور، c ، است. برای کمک به خواننده ای که بخواهد بحث ما را به یکاهای mks تبدیل کند، شکل mks هر معادله را در گروه همراه آن خواهیم آورد که در دو دستگاه یکاها متفاوت است. حدس می زنیم که سه بردار A و سه اسکالر ϕ توأمأ مؤلفه های یک چهار بردار را می سازند. برای اینکه این فرضیه را بررسی کنیم، از معادلات دینامیکی برای پتانسیلهای برداری و اسکالری بهره می گیریم، که در اینجا نیز آن را بدون اثبات نقل می کنیم:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho, \\ \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j, \end{aligned} \quad (14-146)$$

$$\left[\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu_0 j \end{aligned} \right],$$

که در آن ρ چگالی بار الکتریکی کل در واحد حجم و j چگالی جریان الکتریکی کل است که با این استلزام تعریف می شود که $\hat{n} \cdot j$ بار کل در ثانیه بر واحد مساحتی باشد که سطحی در جهت یک بردار یکه \hat{n} را قطع می کند. برای اینکه معادلات (۱۴-۱۴۶) برقرار باشند، به معادله زیر به نام شرط لورنتس، نیز نیاز داریم:

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

$$\left[\nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \right]. \quad (14-147)$$

اگرچه نتایج بالا را از الکترودینامیک بدون اثبات نقل کرده ایم، خواننده آشنا با معادلات ماکسول تشخیص خواهد داد که از معادلات (۱۴-۱۴۵) نتیجه می شود که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در دو معادله همگن ماکسول صدق می کنند

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (14-148)$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (14-149)$$

$$\left[\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \right],$$

و در این صورت معادلات (۱۴-۱۴۶) از معادله (۱۴-۱۴۷) و دو معادله ماکسول باقیمانده

استنتاج می‌شوند:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (14-150)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (14-151)$$

$$\left[\begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right].$$

با توجه به معادلات (۱۴-۱۴۶)، مشاهده می‌کنیم که برای تعیین روشی که به آن وسیله A و ϕ بین دستگاه‌های مختصات متحرک تبدیل شوند، باید تعیین کنیم که چگونه کمیت‌های ρ و \mathbf{j} تبدیل می‌شوند. برای انجام این کار، وضعیتی را فرض می‌کنیم که در آن در هر نقطه در فضا، تمام بارهای الکتریکی با سرعت یکسانی حرکت می‌کنند. در این صورت برای هر نقطه معین، یک دستگاه مختصات ساکن موضعی اختیار می‌کنیم که در آن بارها در آن نقطه خاص ساکن باشند. کمیتها در چارچوب سکون موضعی را با اندیس بالای «۰» مشخص می‌کنیم. چگالی بار ρ^0 به کمک معادله زیر به دست می‌آید:

$$\rho^0 = \frac{dQ^0}{dV^0}, \quad (14-152)$$

که در آن dQ^0 بار الکتریکی کل در یک عنصر حجمی کوچک dV^0 است. حال به دستگاه مختصات موردنظر برمی‌گردیم که در آن بارها در نقطه موردنظر با سرعت u حرکت می‌کنند. در این صورت، چگالی بار به کمک معادله زیر به دست می‌آید:

$$\rho = \frac{dQ}{dV}, \quad (14-153)$$

که در آن dQ بار الکتریکی کل در یک عنصر حجمی کوچک dV است. اکنون این امکان را فراهم می‌آوریم که عنصر حجمی dV با سرعت بارهایی حرکت کند که در آن حجم گنجیده‌اند، به طوری که کماکان حاوی بارهای یکسان باشد. چون بار الکتریکی به صورت مضاربی از یکای بنیادی e (بار الکترون $-e$) است، بار در عنصر حجمی dV را می‌توان در اصل به آسانی با شمارش تعداد کل بارهای گنجیده در آن، به دست آورد. چون عنصر حجمی dV به همراه بارها حرکت می‌کند و همواره شامل بارهای یکسان است، بارها را می‌توان به هر ترتیبی و در هر دوره زمانی که بخواهیم، بشماریم. هیچ‌گونه مشکل همزمانی در شمارش بارها بروز نمی‌کند و بنابراین نتیجه در هر دستگاه مختصات باید یکسان باشد:

$$dQ = dQ^0 \quad (14-154)$$

به طوری که بار الکتریکی کل در حجمی که همراه بار حرکت می‌کند، یک چهاراسکالر باشد. به علت وجود انقباض لورنتس در جهت حرکت، یکی از سه بُعد حجم dV با ضریب γ منقبض خواهد شد، و بنابراین،

$$dV = \gamma^{-1} dV^0 \quad (14-155)$$

از چهار معادله قبلی نتیجه می‌گیریم که

$$\rho = \gamma \rho^* \quad (14-156)$$

چگالی جریان در این حالت به کمک فرمول زیر به دست می‌آید:

$$j = \rho u = \gamma u \rho^* \quad (14-157)$$

خواننده باید بتواند خود را قانع کند که این عبارت از این جهت درست است که $\hat{n} \cdot j$ عبارت مناسب برای بار کل در ثانیه در واحد مساحت است که در سراسر سطحی عمود بر \hat{n} جریان دارد (مثلاً، ر.ک. بحث شکل ۸-۶). اکنون با متوسل شدن به فرمولهای (۱۴-۲۶) برای چهار سرعت، مشاهده می‌کنیم که می‌توانیم یک چهار بردار را به صورت چهار جریان تعریف کنیم

$$J_\mu = \rho^* U_\mu, \quad (14-158)$$

که اجزای فضا و زمانش عبارت‌اند از

$$J_i = j_i, \quad J_0 = \rho c. \quad (14-159)$$

بنابراین، چگالیهای ρc ، متعلق به j مانند مؤلفه‌های چهار بردار تبدیل می‌شوند. اگرچه استنتاج بالا برای حالتی به کار می‌رود که تمام بارها در هر نقطه و ویژه‌ای در فضا با سرعت یکسان حرکت می‌کنند، مشاهده می‌کنیم که در حقیقت باید در حالت کلی اعمال شود. چون حاصل جمع هر تعدادی از چهار بردارها خودش یک چهار بردار است، در حالتی که چند گروه از بارها در هر نقطه وجود داشته باشند که با سرعتهای مختلف حرکت می‌کنند، می‌توانیم سهم آنها را به چهار جریان کل اضافه کنیم و نتیجه بگیریم که چهار جریان کل وابسته به تمام بارها نیز یک چهار بردار است.

اکنون مشاهده می‌کنیم که اگر مجموعه‌ای از چهار کمیت A_μ را از طریق معادلات زیر تعریف کنیم،

$$A_i = A_i, \quad A_0 = \phi, \quad (14-160)$$

$$[A_i = A_i, \quad A_0 = \phi/c]^*,$$

در این صورت می‌توانیم معادلات (۱۴-۱۴۶) را از این قرار بنویسیم:

$$\square^2 A_\mu = -\frac{4\pi}{c} J_\mu, \quad (14-161)$$

$$[\square^2 A_\mu = -\mu \cdot J_\mu].$$

چون عملگر \square^2 (معادله ۱۴-۳۸) یک چهار اسکالر است، مشاهده می‌کنیم که کمیت‌های A_μ باید به صورت یک چهار بردار تبدیل شوند تا معادله (۱۴-۱۶۱) به طور نسبیتی هموردا باشد. در این صورت شرط لورنتس (۱۴-۱۴۷) نیز به طور مناسبی همورداست^۱، زیرا شکل آن از این قرار است:

$$(\square_\mu, A_\mu) = 0, \quad (14-162)$$

که خواننده هم می‌تواند درستی آن را تحقیق کند.

اکنون آماده‌ایم معادله (۱۴-۱۴۵) را در قانون نیروی لورنتس به دست آمده از عضو سمت راست معادله (۱۴-۱۰۳)، بنشانیم. نتیجه را در فرمولهای (۱۴-۸۱) برای چهار نیرو درج می‌کنیم

۱. بعضی مؤلفان Φ_μ تعریف شده در دستگاه یکاهای mks از طریق $\Phi_0 = \phi$ و $\Phi_i = cA_i$ را به کار می‌برند.

تا برسیم به:

$$\mathcal{F} = -\frac{q\gamma}{c} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \frac{q\gamma}{c} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathcal{F}_i = -q\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{q\gamma}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{q\gamma}{c} [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i.$$

با انجام عملیات جبری ساده می‌توان تحقیق کرد که تحت تعریف (۱۴-۱۶۰)، این معادلات را می‌توان از این قرار نوشت:

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{q}{c} \sum_\nu g_\nu U_\nu \left(g_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - g_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right), \quad (14-163)$$

یا، هم‌ارز آن

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{q}{c} \square_\mu (U_\nu, A_\nu) - \frac{q}{c} (U_\nu, \square_\nu) A_\mu. \quad (14-164)$$

[در دستگاه یکای mks، c را در فرمولهای (۱۴-۱۰۷)، (۱۴-۱۶۳)، و (۱۴-۱۶۴) حذف کنید.] این شکل روشن می‌کند که \mathcal{F}_μ در واقع چهار بردار است، و در نتیجه فرمول لورنتس (۱۴-۱۰۷) برای نیروی الکترومغناطیسی دارای خواص تبدیل مناسب نیست. خواننده به آسانی می‌تواند تحقیق کند که این فرمول برای نیرو در معادله (۱۴-۸۲) نیز صدق می‌کند، همانگونه که لزوماً هم باید چنین باشد، زیرا معادله (۱۴-۸۱) را برای استنتاج آن به کار بردیم.

۱۴-۷ جبر تانسوری در فضای چهاربعدی

خواننده‌ای که فصل ۱۰ را مطالعه کرده باشد ممکن است به امکان تعمیم دادن جبر تانسوری به فضای چهاربعدی علاقمند شود. در این بخش خلاصه‌ای کوتاه از این مبحث را ارائه خواهیم کرد. از اکثر انشعابهای آن که خیلی دشوار نیستند و خواننده باید بتواند خودش به آنها برسد، چشم خواهیم پوشید. در فصل ۱۰ فقط با تانسورهای مرتبهٔ دوم سروکار داشتیم؛ ما این مفهوم را به تانسوری از مرتبهٔ دلخواه در فضای چهاربعدی تعمیم خواهیم داد.

چهار تانسور مرتبهٔ n ، بنابر تعریف، عبارت است از مجموعه‌ای از 4^n کمیت $T_{\mu\nu\dots\lambda}$ با برچسبهای μ, ν, \dots, λ که هر یک مقادیر ۰، ۱، ۲، و ۳ را اختیار می‌کند، و مطابق قانون زیر تبدیل می‌شود:

$$T_{\mu\nu\dots\lambda}^* = \sum_{\alpha, \beta, \dots, \gamma} a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} \dots a_{\lambda\gamma} T_{\alpha\beta\dots\gamma}. \quad (14-165)$$

مثال خاصی از تانسور مرتبهٔ n ، تانسور تایی است که از گرفتن حاصل ضربهای $A_\mu B_\nu \dots C_\lambda$ مؤلفه‌های n بردار برحسب تمام ترکیبات ممکن، یک مؤلفه از هر بردار، تشکیل می‌شود. حاصل جمع

$$T_{\mu\nu\dots\lambda} + H_{\mu\nu\dots\lambda} \quad (14-166)$$

دو تانسور از یک مرتبه، که از جمع کردن مؤلفه‌های مربوطهٔ هر یک تشکیل می‌شود، خودش تانسوری از همان مرتبه است. حاصل ضرب $(m+n)$ تایی:

$$T_{\mu\nu\dots\lambda} H_{\alpha\beta\dots\gamma} \quad (14-167)$$

هر تانسور مرتبه m ام $T_{\mu\nu\dots\lambda}$ و تانسور مرتبه n ام $H_{\alpha\beta\dots\gamma}$ که از گرفتن تمام حاصل ضربهای ممکن از یک مؤلفه $T_{\mu\nu\dots\lambda}$ و یک مؤلفه $H_{\alpha\beta\dots\gamma}$ تشکیل می شود، تانسور $m+n$ تایی است. اگر $T_{\mu\nu\dots\nu}$ تانسوری از مرتبه ۲ یا بیشتر از ۲ باشد، می توانیم با منقبض کردن آن به این قرار:

$$\sum_{\alpha} g_{\alpha} T_{\mu\nu\dots\alpha\dots\alpha\dots\lambda} \quad (14-168)$$

تانسوری از مرتبه $n-2$ تشکیل دهیم، که در آن دو اندیس دلخواه از $T_{\mu\nu\dots\lambda}$ اختیار کرده ایم، و حاصل جمع هایی از چهار مؤلفه ای را تشکیل داده ایم که در آنها آن دو اندیس مقدار یکسانی دارند، و در مضرب g_{α} مربوط به هر مقدار خاص اندیس ضرب شده اند.

به عنوان مثالی از عملگرهای بالا، توجه می کنیم که حاصل ضرب اسکالر (۱۴-۲۰) دو چهار بردار، می تواند ابتدا با تشکیل حاصل ضرب دو تایی $A_{\mu}B_{\nu}$ طبق مجوز (۱۴-۱۶۷) و سپس انقباض دو اندیس طبق تجویز (۱۴-۱۶۸)، به دست آید. در این صورت چون اندیس دیگری باقی نمی ماند، نتیجه یک چهار اسکالر است.

ممکن است تانسوری از این خاصیت برخوردار باشد که مقدار مؤلفه هایش وقتی مقادیر دو اندیس خاص جابه جا می شوند، تغییر نکند:

$$T_{\mu\nu\dots\alpha\dots\beta\dots\lambda} = T_{\mu\nu\dots\beta\dots\alpha\dots\lambda} \quad (14-169)$$

چنین تانسوری را از لحاظ آن دو اندیس متقارن نامند. به همین ترتیب، تانسوری را پادمقارن از لحاظ دو اندیس خاص می گویند اگر مقدار مؤلفه هایش، در هنگام جابه جایی آن دو اندیس خاص، تغییر علامت دهد:

$$T_{\mu\nu\dots\alpha\dots\beta\dots\lambda} = -T_{\mu\nu\dots\beta\dots\alpha\dots\lambda} \quad (14-170)$$

خاصیت تقارنی یا پادتقارنی در زوج خاصی از اندیسها تحت یک تبدیل لورنتس (۱۴-۱۶۵) حفظ می شود. اگر تانسوری از لحاظ دو اندیس خاص پادمقارن باشد، آن مؤلفه هایی که برای آنها آن دو اندیس مقدار یکسانی دارند، آشکارا باید صفر باشند. بدیهی است که نتیجه انقباض (۱۴-۱۶۸) بر دو اندیس پادمقارن صفر خواهد بود، یعنی، تانسوری نتیجه می شود که تمام مؤلفه هایش صفرند. مشاهده کردیم که یک تانسور پادمقارن در سه بعد دارای سه مؤلفه مستقل است. خواننده می تواند تحقیق کند که یک تانسور مرتبه دوم پادمقارن در چهار بعد دارای ۶ مؤلفه مستقل است. در چهار بعد، تانسور پادمقارن را نمی توان در مطابقت با هر چهار بردار قرار داد، زیرا تعداد مؤلفه هایش نادرست است.

به عنوان کاربردی از جبر چهار تانسورها، تانسور میدان الکترومغناطیسی، از مرتبه دوم، را در نظر می گیریم که، بنا بر تعریف، عبارت است از:

$$F_{\mu\nu} = \square_{\mu}A_{\nu} - \square_{\nu}A_{\mu} \quad (14-171)$$

تانسور $F_{\mu\nu}$ به وضوح پادمقارن است، و بنابراین شش مؤلفه مستقل دارد که دقیقاً مؤلفه های بردارهای E و B هستند که میدان الکترومغناطیسی را توصیف می کنند. مؤلفه های $F_{\mu\nu}$ بنا بر

معادله (۱۴-۱۴۵) از طریق طرح زیر داده می شوند که خواننده می تواند درستی آن را تحقیق کند:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mu/\nu & \circ & 1 & 2 & 3 \\ \circ & \circ & E_x & E_y & E_z \\ 1 & -E_x & \circ & B_z & -B_y \\ 2 & -E_y & -B_z & \circ & B_x \\ 3 & -E_z & B_y & -B_x & \circ \end{pmatrix}. \quad (14-172)$$

[در دستگاه یکای mks، به جای E_x ، E_y ، و E_z کمیت‌های E_x/c ، E_y/c ، و E_z/c را بنشانید.] خواننده با توجه به این نتیجه توأم با قانون تبدیل (۱۴-۱۶۵)، می تواند قانون تبدیل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی از یک دستگاه مختصات به دیگری را به دست آورد (مسئله ۵۲). نیروی الکترومغناطیسی وارد بر ذره‌ای باردار از طریق فشرده سازی حاصل ضرب سه گانه چهار سرعت با تانسور میدان الکترومغناطیسی به دست می آید:

$$\mathcal{F}_\mu = \sum_\nu \frac{q}{c} g_\nu U_\nu F_{\mu\nu}. \quad (14-173)$$

مثالهای فراوان دیگری از کاربرد جبر چهار بردارها بروز می کند که اگر در اینجا مجالی داشتیم می توانستیم بحث فصل ۸ را به مکانیک نسبیتی یک محیط پیوسته تعمیم دهیم (مسائل ۵۳، ۵۴، و ۵۵).

۱۴-۸ نظریه نسبیت عام

این فصل را با چند ملاحظه کیفی درباره نظریه نسبیت عام خاتمه می دهیم. همان طوری که در بخش اول توجه کردیم، از لحاظ شهودی توجیه پذیر است که بکوشیم اصل موضوعی کاملاً عمومی را وضع کنیم که بنابر آن قوانین فیزیک باید از حرکت دستگاه مختصات مستقل باشند. اما، بلافاصله به نظر می آید که این اصل موضوع با تجربه ما در تناقض است. در حالی که آشکارسازی اینکه کسی در حالت یکنواخت باشد یا در حال سکون دشوار و یا حتی ناممکن است، کسی که در جاده‌ای ناهموار بر اتومبیلی نشسته است یا از پیچ تند می گذرد، می داند که شتاب دستگاه مختصات به کمک آزمایشی ساده قابل آشکارسازی است. راه گریزی از این معضل را ارنست ماخ، فیزیکدان و فیلسوف، پیشنهاد کرد، که اظهار داشت آثاری که مشاهده می کنیم نه ناشی از شتاب نسبت به فضای مطلق، مفهومی که آن را بی معنی دانست، بلکه منسوب به شتاب دستگاه مختصات محلی مان نسبت به بقیه ماده در جهان هستی است. بنابر نظر ماخ، دستگاه مختصات لخت عبارت است از دستگاهی که در آن به ماده در عالم شتاب میانگین داده می شود. اینشتین تلاش کرد ایده‌های ماخ را در نظریه نسبیت عام خودش بگنجانند.

در فصل ۷ مشاهده کردیم که می توانیم قانون حرکت نیوتن در یک دستگاه مختصات شتاب دار را به همان شکلی بنویسیم که در دستگاه لخت دارد، در صورتی که جملاتی را که از شتاب دستگاه مختصات پدید می آیند به طرف دیگر معادله ببریم، به طوری که به صورت نیروهای اضافی ظاهر شوند. این نیروهای «لخت» که بر هر جسمی در یک دستگاه مختصات شتاب دار وارد می آیند، با

۱. هرگاه $\Phi_\mu = cA_\mu$ به عنوان چهار پتانسیل به کار رود، $F_{\mu\nu}$ در معادله (۱۴-۱۷۲) نیز در c ضرب می شود. بانوشت بعد از معادله (۱۴-۱۶۰) را ملاحظه کنید.

جرم جسم متناسب‌اند. طبق قانون گرانش نیوتن، نیروی گرانشی وارد بر جسم نیز با جرمش متناسب است. اینشتین اظهار داشت که این امر یک انطباق نیست، بلکه نیروهای لخت باید در حکم نیروهای گرانشی، بر پایه همان شالوده‌ای تلقی شوند که قانون گرانش نیوتن فراهم می‌آورد. بنابراین، قانون گرانش باید چنان اصلاح شود که نیروهای گرانشی به مکانها و سرعتهای سایر اجسام چنان وابستگی یابند که نیروهای لخت از شتاب بقیه ماده جهان نسبت به دستگاه مختصات مان، ناشی شوند. با توجه به معادله (۷-۳۷) پی می‌بریم که نیروی کوریولیس وارد بر یک جسم به سرعتش بستگی دارد، بنابراین قانون تعمیم داده شده برای نیروی گرانشی وارد بر یک جسم باید شامل چنین جملاتی باشد؛ این جملات مشابه جملاتی خواهند بود که نیروی مغناطیسی وارد بر جسم باردار را به دست می‌دهد که به سرعتش نیز وابسته است.

در حالت خاص دستگاه مختصاتی که به‌طور یکنواخت شتاب دار می‌شود، بنا بر معادله (۷-۱۰) مشاهده می‌کنیم که معادله حرکت همان معادله حرکت در میدان گرانش یکنواخت است، که در آن شتاب گرانشی، g ، عبارت است از منفی شتاب دستگاه مختصات. اینشتین پیشنهاد کرد نظریه نسبیت عام‌اش بر این اصل پایه‌گذاری شود که نتیجه بالا نه تنها برای قانون حرکت بلکه برای تمام قوانین فیزیک صادق است. بنابراین او اصل هم‌ارزی را مسلم فرض کرد:

قوانین فیزیک در میدان گرانشی یکنواخت g همان‌ها هستند که در غیاب یک میدان گرانشی در دستگاه مختصاتی خواهند بود که با شتاب g - به‌طور یکنواخت شتاب داده می‌شود. (۱۴-۱۷۴)

در همسایگی جرمی گرانشی مانند زمین، شتاب گرانشی یکنواخت نیست، بلکه با تغییر فاصله از زمین تغییر می‌کند و بسته به مکان نسبت به زمین جهت آن نیز تغییر می‌کند. چنین میدانی گرانشی را نمی‌توان با معرفی یک دستگاه مختصات شتاب‌دار از بین برد. برای اینکه میدانهای گرانشی نایکنواخت را منظور کنیم، می‌توانیم اصل هم‌ارزی را به‌صورت رضایت‌بخش‌تر زیر فرمول‌بندی کنیم:

در آزمایشگاه کوچک با سقوط آزاد، قوانین فیزیک همان قوانین نظریه نسبیت خاص بدون هر میدان گرانشی هستند. (۱۴-۱۷۵)

منظور ما از آزمایشگاهی با سقوط آزاد، یک دستگاه فیزیکی است که تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی جز نیروهای گرانش، قرار نمی‌گیرد. مثالی در این مورد سفینه‌ای فضایی است که در خلأ، همراه با محتوایش، با دنده خلاص حرکت می‌کند. منظور از آزمایشگاه «کوچک» این است که چندان کوچک است که اختلاف در بزرگی و جهت میدان گرانشی برای آن آزمایشهایی که قرار است انجام شوند، نسبت به ابعاد آزمایشگاه چشم‌پوشیدنی باشند. از زاویه ریاضی، می‌توان این اصل را با این ادعا تدوین و فرمول‌بندی کرد که در همسایگی هر نقطه در فضا - زمان، همواره می‌توان دستگاه مختصاتی معرفی کرد که مبدأ آن در آن ناحیه سقوط آزاد می‌کند، و در همسایگی مبدأ قوانین نسبیت خاص بدون وجود هر میدان گرانش برقرارند.

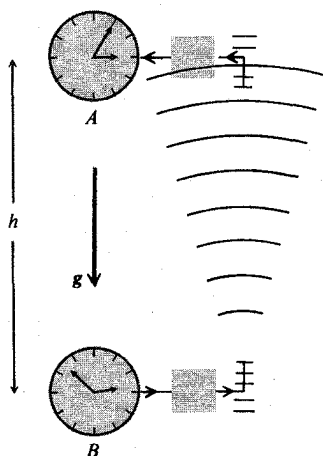
نتیجه بی‌درنگ از اصل هم‌ارزی از این قرار است که در یک میدان گرانشی تمام اجسام با آهنگ

یکسان سقوط می‌کنند، یا به بیان معادل، نیروی گرانشی دقیقاً متناسب با جرم است. این اثر جدیدی نیست. این اثر را نخستین بار گالیلو بیان کرد، و همین اثر بود که اصل هم‌ارزی را به اینشتین القا کرد. این اثر را در سال ۱۸۹۰ میلادی اتووش، اساساً با مقایسه نسبت نیروهای گرانشی و نیروهای مرکزگیز ناشی از دوران زمین، روی تعدادی از اجسام، آزمود. سنجه‌های او تناسب نیروی گرانشی و جرم را تا حدود یک قسمت در 10^8 برای تمام اجسامی که آزمود، نشان داد. این آزمایش به وسیله دایک در سال ۱۹۶۴ میلادی با دقت یک قسمت در 10^{11} تکرار شد. این دقت به مراتب دقیق‌ترین آزمایشی است که از آن طریق یکی از پیش‌بینیهای نظریه نسبیت عام آزموده شده است. کافی است نشان دهیم که جرم وابسته به انرژی هسته‌ای داخلی و شیمیایی نیز تحت تأثیر میدان گرانشی قرار می‌گیرد.

اصل هم‌ارزی ما را تنها با قوانین فیزیک در دستگاه مختصاتی محلی و با سقوط آزاد مجهز می‌کند. آشکار است که در حضور جرمهای گرانشی امکان ندارد یک تک دستگاه مختصات را چنان معرفی کنیم که در همه جا با سقوط آزاد همراه باشد. بنابراین، مسئله فرمول‌بندی و تدوین قوانین فیزیکی برای ما می‌ماند که نه تنها برای یک ناحیه بی‌نهایت کوچک محلی به کار می‌روند بلکه همه جایی (یا جهانی) است. بدون پرداختن به این مسئله، که اینشتین آن را حل کرد، بلافاصله به چند نتیجه از اصل هم‌ارزی می‌رسیم.

از اصل هم‌ارزی نتیجه می‌شود که میدان گرانشی بر انتشار نور تأثیر می‌گذارد. طبق نظریه نسبیت خاص، و بنابراین در دستگاه مختصات محلی با سقوط آزاد، نور با سرعت ثابت c روی خطی مستقیم حرکت می‌کند. نتیجه می‌شود که نور باید در حضور میدان گرانشی خود دستخوش شتاب گرانشی قرار گیرد. به خصوص، انتظار داریم نور ستاره‌ای که از نزدیکی خورشید می‌گذرد، در مداری حول خورشید خم شود، به طوری که مکان ظاهری ستاره‌ای واقع در پشت خورشید تحت زاویه کوچکی جابه‌جا شود. این جابه‌جایی را نخستین بار اینشتین پیش‌بینی کرد. در نبود فرمول عمومی مناسبی برای قانون انتشار نور، برای آن نمی‌توانیم به پیش‌بینی عددی دست بزنیم. اما، اگر انحراف را بر پایه این فرض ساده محاسبه کنیم که نور در فاصله‌ای از خورشید با سرعت c حرکت می‌کند و اینکه طبق قانون گرانش نیوتن در میدان گرانش خورشید شتاب پیدا می‌کند، می‌توانیم به فرمولی برای محاسبه انحراف برسیم (مسئله ۵۶)، که فقط نیمی از انحراف واقعی از کار درمی‌آید که بنا بر نظریه نسبیت عام پیش‌بینی می‌شود. انحراف پیش‌بینی شده چندان کوچک است که اندازه‌گیری بسیار دقیق را دشوار می‌کند، اما در حیطه دقت اندازه‌گیری‌هایی که به هنگام کسوف انجام می‌پذیرند، انحراف مشهود نور ستاره‌ای با مقدار پیش‌بینی شده توسط اینشتین توافق دارد.

اکنون یک زوج ساعت A و B در نظر می‌گیریم که در ارتفاعی به فاصله h در یک میدان گرانشی یکنواخت g از هم قرار گرفته‌اند (شکل ۱۴-۳). شتاب گرانشی را در جهت ساعت A به سمت ساعت B می‌گیریم. فرض می‌کنیم ساعتها از لحاظ فیزیکی و کالبدی یکسان‌اند و یک سیگنال نوری با بسامد f_B که ساعت B آن را اندازه‌گیری کرده، از B به خارج گسیل می‌شود. می‌خواهیم بسامد این سیگنال، f_A را اندازه‌گیری کنیم که به کمک ساعت A در هنگامی اندازه‌گیری شده که به مکان A می‌رسد. برای انجام این کار، یک دستگاه مختصات با سقوط آزاد را معرفی



شکل ۱۴-۳ دو ساعت در یک میدان گرانشی.

می‌کنیم که با شتاب g سقوط می‌کند. در این دستگاه مختصات، هر دو ساعت A و B به طرف بالا در جهت B به سوی A شتاب دار می‌شوند. دستگاه مختصات را چنان اختیار می‌کنیم که در لحظه‌ای که ساعت B سیگنالش را می‌فرستد، در دستگاه مختصات ساکن باشد. نیز فرض می‌کنیم که فاصله آنها، h ، خیلی بزرگ نیست و در نتیجه سرعت هر دو ساعت در طول زمان مورد نظر کوچک باقی می‌ماند. در این صورت آثار نسبیتی خاصی به وجود نمی‌آید که در دستگاه مختصات با سقوط آزاد آن را به حساب بیاوریم. سیگنال نوری که B را در لحظه $t = 0$ ترک می‌کند در مدت زمان $t = h/c$ به A می‌رسد. در آن لحظه، ساعت A در جهتی به دور از B با سرعت $v = gt = gh/c$ حرکت می‌کند (البته ساعت B نیز در آن لحظه با همین سرعت حرکت می‌کند). بنابراین، بسامد f_A بنا بر اثر دوپلر به اندازه ضریب $[1 - (v/c)]$ کاهش می‌یابد. نتیجه می‌گیریم

$$f_A = f_B \left[1 - \left(\frac{gh}{c^2} \right) \right],$$

یا

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_B - f_A}{f_B} = \frac{gh}{c^2}. \quad (14-176)$$

از دیدگاه ساعت A ، به نظر می‌رسد که ساعت B آهسته کار می‌کند؛ تغییر بسامد $\Delta f/f$ که به کمک معادله بالا و بر حسب (gh) ، اختلاف پتانسیل گرانشی بین A و B ، به دست می‌آید. این کمیت انتقال به سرخ گرانشی است. این اثر بسیار کوچک است، جز در میدانهای گرانشی بزرگ g و در فاصله‌های زیاد h . به همین علت، تغییر چشمگیر بسامدهای خطوط طیفی که از نزدیکی سطح ستاره‌های کوتوله سفید می‌آیند، قابل انتظار است. به نظر می‌آید که چنین اثری مشاهده می‌شود، اگرچه واریسی عددی چنین اتفاقی دشوار است. اگر شتاب گرانشی در سطح زمین را به کار ببریم، و به ازای ارتفاع h یک فاصله ۱۰ متری در نظر بگیریم، نتیجه می‌گیریم که تغییر بسامد باید در حدود یک قسمت در 10^{15} باشد. اگرچه این اثر بسیار کوچک است، می‌توان آن را با استفاده از اثر موسباور اندازه‌گیری کرد. به

این ترتیب، این نتیجه گیری از نظریه نسبیت عام از طریق انجام آزمایشهایی در سطح زمین تأیید شده‌اند. نتیجه بالا را می‌توانیم در بحث مربوط به پارادوکس دوقلوها (بخش ۱۳-۶) از دیدگاه همزاد متحرک به کار ببریم. در نسبیت عام، مجازیم از دستگاه مختصاتی بهره گیریم که در آن فضاورد همواره ساکن است. به یاد آورید که، نسبت به فضاوردی که دارد از زمین دور می‌شود، ساعت زمین وقتی او به سیاره دور رسید $7/5$ سال را قرائت کرد، اما بعد از مدتی کوتاه وقتی روی سیاره فرود آمد، ساعت زمین 10 سال را نسبت به فضاورد ساکن نشان داد. در دستگاه مختصاتی که در آن فضاورد ثابت است، میدانی گرانشی وجود دارد که طی زمانی که موشک ترمز می‌کند (نسبت به زمین) جهت آن از زمین به طرف ستاره دور است. بنابراین، در دستگاه مختصات (شتاب‌دار) فضاورد، ساعت واقع در زمین نسبت به ساعتی که در سیاره قرار داده شده سریعتر کار می‌کند. اگرچه فرمول (۱۴-۱۷۶) تنها تا کمترین درجه بر حسب gh/c^2 استنتاج شد و بنابراین نمی‌تواند برای این مثال که در آن $gh/c^2 \gg 1$ ، به‌طور منطقی به کار رود، یک تجزیه و تحلیل نیستی عام دقیقاً از این موضوع به این نتیجه منجر می‌شود که در دستگاه مختصات شتاب‌دار، ساعت زمین در واقع در خلال فرود آمدن $2/5$ سال سود می‌برد.

در اینجا نیز باید تأکید شود که تمام فرایندهای فیزیکی با آهنگهایی روی می‌دهند که به وسیله ویژه زمانی تعیین می‌شوند که روی ساعتهای همراه محلی قرائت می‌شوند. هر فرایند فیزیکی که آهنگ رویدادش معلوم است می‌تواند به‌عنوان یک ساعت به کار برده شود. اختلاف در آهنگ کارکرد ساعتهای، و در نتیجه در تمام فرایندهای فیزیکی، ناشی از اختلاف سرعتها یا در پتانسیل گرانشی، از طریق نظریه خاص و عام نسبیت قابل پیش‌بینی‌اند. این اختلافهای آهنگ کارکرد واقعی‌اند، به این معنا که اگر بخواهیم پیامدهای زمانی رویدادها را در دستگاههای دور یا بسیار سریع به‌درستی بهم مربوط کنیم، باید آنها را به حساب آوریم. از طرف دیگر، این اختلافها نسبی‌اند، به این معنی که می‌توان دستگاه مختصاتی اختیار کرد که در آن هر ساعت خاصی در حال سکون است و سپس به‌عنوان ساعتی در نظر گرفته شود که با آهنگ معیار ثابتی کار می‌کند؛ بنابراین ناهماهنگیها در انطباق دنباله‌های زمانی با سایر دستگاهها به تغییرات در آهنگ کارکرد ساعتهایشان نسبت داده می‌شود. نسبت به فضاورد، سریع شدن کارکرد ناگهانی ساعتهای روی زمین طی فرایند ترمز کردن پیش می‌آید. همزادی که روی زمین می‌ماند سرعتی را در کارکرد ساعت مشاهده نمی‌کند؛ او تمامی رشته رویدادها را برحسب اتساع زمانی نشان داده شده در ساعت فضاورد، منظور می‌کند.

سومین آزمایش بسیار اساسی که به وسیله اینشتین در مقاله اصلی‌اش درباره نظریه نسبیت عام عنوان شد، مربوط می‌شود به حرکت حضیض سیاره عطارد در نقطه حضیض. ما در اینجا وسایل اندازه‌گیری برای برآورد کمی این اثر را در اختیار نداریم، جز اینکه مانند فصل ۳ اشاره کنیم که انتظار می‌رود هر استنتاجی از قانون گرانش نیوتنی یا قانون حرکت نیوتنی به حرکت تقدیمی محور بزرگ مدار بیضوی منجر شود. حرکت تقدیمی پیش‌بینی شده عبارت است از 43 ثانیه کمان در هر قرن. اندازه‌گیریهای ما و درک مدارهای سیاره‌ای اکنون به اندازه کافی دقیق هستند که بشود این حرکت تقدیمی را اندازه‌گیری کرد و با عدد پیش‌بینی شده اینشتین با اختلاف کمتر از 5 درصد، یعنی در حیطه دقت آزمایش، در توافق است.

یکی از انگیزه‌های اینشتین برای یافتن نظریه نسبیتی عام، نظر ماخ بود که بر پایه آن دستگاههای مختصات لخت دستگاههایی اند که نسبت به حرکت متوسط ماده در عالم ساکن اند یا دست کم شتاب ندارند. بنابراین، می توان انتظار داشت که جرمی که در مجاورت ما به سرعت می چرخد چرخش کوچکی در یک دستگاه مختصات لخت به وجود آورد. نظریه نسبیت در واقع چنین اثری را پیش بینی می کند. برای چرخشهای عملاً قابل حصول جرمهای معقول، این اثر بی نهایت کوچک است. ولی آزمایشهایی در جریان اند که امید می رود برای آشکارسازی این اثر به اندازه کافی دقیق باشند.

چون اصل نسبیت ایجاب می کند که آثار گرانشی نتواند به طور لحظه ای از یک جرم به دیگری منتقل شود بلکه باید از طریق فضای بینابینی انتشار یابد، شاید تعجب آور نباشد که نظریه نسبیت وجود امواج گرانشی را پیش بینی می کند که با سرعت c حرکت می کنند. انتظار می رود آثار چنین امواجی نیز ناچیز باشد. با همه این احوال، در سال ۱۹۶۹ میلادی، آزمایشات و بر ظاهرآ چنین امواجی را آشکارسازی کرده اند.^۱

یکی از نتایج مهم و جالب نظریه نسبیت عام از این قرار است که میدانهای گرانشی می توانند هندسه فضا را متأثر کنند. در میدان گرانشی، اصول موضوع هندسه اقلیدسی کاملاً برقرار نخواهند بود. از دیدگاه عملیاتی، مفاهیم هندسه، خط مستقیم، زوایا، و مانند آنها، باید برحسب اندازه گیریهای تعریف شوند که با ابراز فیزیکی انجام می گیرند. بنابراین، این ادعا که هندسه ناقلیدسی است، به این ادعا می انجامد که میدانهای گرانشی بر رفتار ابزارهای اندازه گیری به نحوی تأثیر می گذارند. برای اینکه مشاهده کنیم که چگونه این اتفاق می افتد، یک دستگاه مختصات لخت، به نام دستگاه ثابت، در نظر می گیریم که در آن فرض می کنیم قوانین معمولی فیزیک (به خصوص نسبیت خاص و هندسه اقلیدسی) برقرارند. فرض می کنیم یکی از این دستگاههای مختصات نسبت به دستگاه ثابت می چرخد که آن را دستگاه چرخان می نامیم. حال دایره ای را به مرکزی واقع بر محور چرخش در نظر می گیریم و فرض می کنیم که شعاع و پیرامون دایره به وسیله میله های سنجه ساکن در دستگاه ثابت و نیز به وسیله میله های سنجه ساکن در دستگاه چرخان، اندازه گیری می شوند. فرض خواهیم کرد که شعاع دایره و آهنگ چرخش چنان است که یک نقطه روی پیرامون در دستگاه چرخان با سرعتی کمتر از c حرکت می کند، اما این سرعت چندان زیاد است که ضریب γ به طور محسوسی با واحد اختلاف دارد. واضح است که مفهوم دستگاه مختصات چرخان صلب نمی تواند به شعاعهایی که در آنها $\omega r > c$ ، تعمیم داده شود بی آنکه به تعارضهایی با اصول نسبیت بر بخوریم. ابتدا اندازه گیریهای شعاع دایره را در نظر می گیریم. چون میله های سنجه در دستگاه چرخان عمود بر طولی حرکت می کنند که آن را اندازه گیری می کنند، بنابر بحثهای قبلی مان اندازه گیریهای شعاع دایره در دستگاههای چرخان و ثابت باید توافق کنند. فرض کنید که تعدادی میله سنجه در دستگاه مختصات چرخان چنان آراسته می شوند که به طور کامل پیرامون دایره را بپوشانند. اگر این میله سنجه را از دیدگاه دستگاه مختصات ثابت در نظر بگیریم، مجازیم قوانین نسبیت خاص را به کار بگیریم، که طبق آنها این میله ها به اندازه ضریب $\gamma = [1 - (\omega r/c)^2]^{-1/2}$ منقبض خواهند شد؛

در نتیجه، تعداد چنین میله‌های سنجه که بتوانند پیرامون دایره را بپوشانند به اندازه ضریب γ از تعدادی که در دستگاه مختصات ثابت پیرامون دایره را می‌پوشانند، بزرگتر خواهد بود. از آنجا که در دستگاه متحرک می‌توانیم پیرامون دایره را با شمارش میله‌های سنجه اندازه‌گیری کنیم، نتیجه می‌گیریم که پیرامون اندازه‌گیری شده، C^* ، بزرگتر خواهد بود از پیرامون C ، و در واقع $C^* = \gamma C$. چون $r^* = r$ ، نتیجه می‌گیریم که در دستگاه چرخان پیرامون دایره از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$C^* = 2\pi\gamma r^* = 2\pi r^* \left[1 - \left(\frac{\omega r^*}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (14-177)$$

پیرامون هر دایره در دستگاه مختصات چرخان، بسته به شعاع دایره، به اندازه ضریبی از مقداری بزرگتر است که به کمک فرمول اقلیدسی معمولی به دست می‌آید. هرچه دایره بزرگتر باشد این اثر بزرگتر است. برای دایره‌های به اندازه کافی کوچک، فرمول (۱۴-۱۷۷) به مقدار اقلیدسی نزدیک می‌شود.

از آنجا که واپیچش هندسه به شتاب دستگاه مختصات نسبت داده می‌شود، و از آنجا که این شتاب آثار گرانشی (میدانهای نیروی مرکزگریز و کوریولیس) نیز پدید می‌آورد، و از آنجا که بنابر اصل هم‌ارزی این آثار گرانشی به‌طور فیزیکی از آثار گرانشی ناشی از جرمهای گرانشی غیرقابل تمایزند، در نتیجه انتظار داریم انحرافات از هندسه اقلیدسی را بیابیم که در حالت کلی به میدانهای گرانشی نسبت داده می‌شوند. در دستگاه مختصات چرخان، یک میدان گرانشی مرکزگریز (و نیز میدان نیروی کوریولیس) داریم، و یک واپیچش در هندسه اتفاق می‌افتد که مربوط به آن است و در آن پیرامون یک دایره به تناسب با شعاعش بزرگتر است از آنچه از طریق فرمولهای اقلیدسی داده می‌شود. در همسایگی یک جرم گرانشی، میدان گرانشی مرکزگرا برقرار می‌شود. هیچ شتاب صلب دستگاه مختصات وجود ندارد که چنین میدانی گرانشی تولید کند، و بنابراین هیچ روشی در دست نداریم که به‌طور مستقیم با توجه به اصل هم‌ارزی، ماهیت هندسه مولد چنین میدانی را استنتاج کنیم. اگرچه نمی‌توانیم این معنی را با استدلال ساده‌ای توجیه کنیم، شاید خواننده تعجب نکند که نظریه اینشتین، وقتی تحقق یابد، پیش‌بینی می‌کند که میدان گرانشی مرکزگرای پیرامون یک جرم گرانشی به واپیچش هندسه‌ای بستگی دارد که در آن هندسه، پیرامون دایره کمتر از $2\pi r$ است. به همین ترتیب، سطح دایره‌ای پیرامون جرم گرانشی کمتر است از مقدار اقلیدسی $r^2(4\pi/3)$ ، و با سرعت کمتری به تناسب شعاع افزایش می‌یابد. یکی از پیامدهای این واپیچش هندسه عبارت است از ایجاد یک خمیدگی اضافی از پرتو نور روی و بالای آنچه که ممکن است از شتاب گرانشی به تنهایی محاسبه کرد. چون یک پرتو نوری که در فضای تهی حرکت می‌کند مسیری را دنبال می‌کند که کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه در سر راه آن است، می‌توان مشاهده کرد که به‌علت واپیچش هندسه، یک پرتو نوری که از نزدیک خورشید می‌گذرد درمی‌یابد که می‌تواند فاصله‌ای کوتاه‌تر را طی کند اگر مسیری به ظاهر خمیده را دنبال کند که در نقطه نزدیکترین فاصله‌اش آن را دورتر از خورشید می‌برد تا حالتی که اگر خطی مستقیم را در هندسه اقلیدسی معمولی دنبال می‌کرد. این اثر به تنهایی انحرافی از یک پرتو نوری را می‌دهد که مساوی انحرافی است که از شتاب گرانشی محاسبه می‌شود، و بنابراین تمامی انحراف پیش‌بینی شده از طریق نظریه نسبیت عام، دو برابر آن درمی‌آید که از شتاب گرانی محاسبه خواهد شد. اندازه‌گیریهای واقعی خمیدگی نور ستاره‌ای با پیش‌بینی اینشتین در حیطه

دقت اندازه گیریها (در حدود ۱۰ درصد) توافق دارد. همین اثر که اخیراً اندازه گیری شده است تأخیر در زمان رسیدن سیگنالهای رادیویی است که یا از منابع نجومی یا از ماهواره‌ها گسیل می‌شود که دور خورشید می‌گردند. طول یک خط از شیئی دور به زمین که از نزدیک خورشید می‌گذرد بزرگتر است از آنچه می‌بود در صورتی که خورشید نمی‌بود، و این سبب یک تأخیر پیش‌بینی شده در سیگنالی رادیویی می‌شود که اندازه گیریها آن را تأیید می‌کنند.

یکی از جنبه‌های جالب نظریه نسبیت عام از این قرار است که می‌توان آن را در مورد تمامی عالم و تمامی تاریخچه عالم و جهان هستی اعمال کرد. جوابهای معادلات میدان گرانشی اینشتین متعدد و گوناگون‌اند. جوابهایی وجود دارند که در آنها چگالی ماده در سرتاسر جهان هستی یکنواخت است و چنان است که آثار گرانشی فضایی بسته ایجاد می‌کنند که در آن حجم کل متنهایی است. حجم کره‌ای حول هر نقطه فرضی با شعاع خیلی آهسته‌تر افزایش می‌یابد تا آنچه از طریق فرمولهای اقلیدسی به دست می‌آید، و سرانجام در شعاع ماکسیمم معینی حجم با حجم کل فضا برابر می‌شود. پرتوی نوری یا یک ذره با سرعت زیاد سرانجام به همسایگی مبدأ خود برمی‌گردد، در صورتی که آزادانه به حرکتش ادامه دهد و بی‌آنکه منحرف یا جذب شود. این وضعیتی است که علی‌الاصول می‌توان آن را به اعتبار مشاهدات نجومی تأیید کرد. اگر، مثلاً، به این نتیجه برسیم که جهان هستی همگن است، به این مفهوم که چگالی کیهانشانها در تمام اجزای عالم یکسان است، در این صورت با شمارش تعداد کیهانشانها که می‌توانند به عنوان تابعی از فاصله تا کیهانشان مشاهده شوند، می‌توان به طور مؤثری حجم کره‌ای عظیم را به عنوان تابعی از شعاع آن اندازه گرفت. متأسفانه انجام و تجزیه و تحلیل مشاهدات ضروری بسیار دشوار است، و به علاوه به نظر می‌آید که عالم احتمالاً به مفهومی که تعریف شد، همگن نباشد.

چنان برمی‌آید که جوابهای استاتیکی معادلات میدان گرانشی اینشتین ناپایدارند، به طوری که این نظریه به طور مؤثری پیش‌بینی می‌کند که عالم یا باید انبساطی باشد یا انقباضی. مشاهدات با این پیش‌بینی موافق‌اند که در آن به نظر می‌رسد عالم در واقع انبساطی است. اینکه آیا عالم به طور نامتناهی منبسط خواهد شد یا به حداکثری خواهد رسید و سپس دوباره منقبض می‌شود، بنابر نظریه، به چگالی متوسط ماده بستگی دارد که تاکنون با دقت کافی اندازه گیری نشده است که پاسخ این پرسش را تعیین کند.

اگر هندسه فضا در پیرامون اجسام گرانشی ناعقلیدسی باشد، در این صورت دستگاههای مختصات فضایی دکارتی، x ، y ، و z ، از نوعی که در بحثمان راجع به نظریه نسبیت خاص به کار برده‌ایم به طور کلی وجود نخواهد داشت. مشکلی مشابه با مختصه زمان بروز می‌کند. در حضور میدانهای گرانشی، ساعتها در مکانهای مختلف ممکن است با آهنگهای مختلفی کار کنند، حتی اگر در دستگاه مختصات خاصی ساکن باشند. این موضوع را می‌توان با گنجانیدن ساعتها در بحث خودمان راجع به یک دستگاه مختصات چرخان یا با توجه به بحث انتقال به سرخ گرانشی مشاهده کرد. پس روشی منطقی وجود ندارد که با آن ساعتها را همزمان کرد تا همزمان بمانند. اگر یک مختصه زمان t در هر نقطه (x, y, z) از طریق تصحیح برای زمان سفر سیگنالهای نوری از یک ساعت معیار در مبدأ تعریف کنیم، این زمان (شاید جز برای یک لحظه) به زمانی که یک ساعت محلی در نقطه (x, y, z) نشان می‌دهد، منطبق نخواهد شد.

چنان برمی آید که در نظریه نسبیت عام راحت تر این است که در تلاش برای برقرار کردن دستگاه معیاری از مختصات مبتنی بر دستگاههای معیار از طولها و زمانهای اندازه گیری شده به منظور تعیین مکان رویدادها دست بکشیم. در عوض، فقط چهار مختصه، مثلاً q_0, q_1, q_2, q_3 را به رویدادها در فضا - زمان به هر روش (پیوسته) دلخواهی نسبت دهیم. بنابراین، دستگاه مختصات در خودش هیچ اطلاعاتی درباره فیزیک یا هندسه نگنجانده است، و هر تغییر دلخواهی در هر مجموعه دیگری از مختصات $q_0^*, q_1^*, q_2^*, q_3^*$ مجاز خواهد بود. در این صورت، هندسه از طریق مشخص کردن نتایج اندازه گیریهای زمانها و فاصله های بین رویدادها تعریف می شود.

در نزدیکی هر رویداد خاص در فضا - زمان، اصل هم ارزی تضمین می کند که می توانیم یک دستگاه مختصات لخت موضعی x_λ بر اساس اندازه گیریهای بر پا کنیم که به وسیله ساعتی با سقوط آزاد و میله های سنج انجام می پذیرند. پس، فاصله ds یا بازه زمانی $d\tau$ اندازه گیری شده بین دو رویداد نزدیک بهم بنابر معادله (۱۴-۴) از طریق فرمول زیر به دست می آید:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = \sum_{\lambda} g_{\lambda} (dx_{\lambda})^2, \quad (14-178)$$

که در آن dx_{λ} اختلافهای مختصه ای بین دو رویدادند، و فرمول (۱۴-۱۷۸) فقط درون ناحیه ای کوچک [به مفهوم اصل هم ارزی (۱۴-۱۷۵)] برقرار است که درون آن دستگاه لخت مان x_{λ} ممکن است برپا شود. اکنون اگر به دستگاه مختصات دلخواه q_{μ} برگردیم، مختصات موضعی x_{λ} را می توان بر حسب q_{μ} به کمک مجموعه ای از توابع بیان کرد

$$x_{\lambda} = x_{\lambda}(q_0, q_1, q_2, q_3). \quad (14-179)$$

در معادله (۱۴-۱۷۸) می نشانیم تا فرمولی برای فاصله بین دو رویداد نزدیک را بر حسب مختصات کلی q_{μ} به دست آوریم:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dq_{\mu} dq_{\nu}, \quad (14-180)$$

که در آن

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} g_{\lambda} \frac{\partial x_{\lambda}}{\partial q_{\mu}} \frac{\partial x_{\lambda}}{\partial q_{\nu}}. \quad (14-181)$$

فرمول (۱۴-۱۸۰) ارتباط موردنظر بین مختصات q_{μ} را به دست می دهد که می توانند اندازه گیریهای فیزیکی فواصل و زمانهای بین رویدادهای نزدیک بهم باشند که به دلخواه اختیار شده اند. روابط هندسی (فیزیکی) بین رویدادهای نزدیک بهم به کمک کمیتهای $g_{\mu\nu}$ مشخص می شوند، که به آنها مؤلفه های تانسور متر می گویند. چون $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ، فقط ده مقدار از $g_{\mu\nu}$ مستقل اند. اگر $ds^2 > 0$ ، در این صورت فاصله بین دو نقطه نزدیک به یکدیگر فضا - گونه و ds نتیجه اندازه گیری فاصله در دستگاه مختصاتی است که در آن دو رویداد به طور همزمان رخ می دهند. اگر $ds^2 < 0$ ، در این صورت دو رویداد از طریق فاصله ای زمان - گونه از هم جدا می شوند و $d\tau$ فاصله زمانی است که به کمک ساعتی اندازه گیری می شود که از هر دو رویداد عبور می کند.

تانسور متر $g_{\mu\nu}$ از یک طرف هندسه فضا - زمان، و از طرف دیگر میدان گرانشی در دستگاه مختصات q_{μ} را تشریح می کند. می توان معادله (۱۴-۱۸۱) را به عنوان تعریف عملگری $g_{\mu\nu}$ پنداشت؛ با فرض در اختیار داشتن یک دستگاه مختصات q_{μ} که به دلخواه انتخاب شده است،

نزدیک به هر نقطه فضا - زمان یک دستگاه لخت موضعی x_λ با به کار بردن اندازه گیریهای انجام شده با ساعتی که سقوط آزاد می کنند و با میله های سنجه برپا، و $g_{\mu\nu}$ را از معادله (۱۴-۱۸۱) محاسبه کنید. برعکس، با در دست داشتن $g_{\mu\nu}$ در ناحیه خاصی از فضا - زمان، می توان از معادله (۱۴-۱۸۰) به عقب رفت و مجموعه ای از توابع $q_\mu(x_\lambda)$ را طلب کرد که ds^2 را به صورت (۱۴-۱۷۸) برمی گردانند. [خواننده ای که فصل ۱۰ را مطالعه کرده باشد، تشخیص خواهد داد که اگر ناحیه مورد نظر به اندازه کافی کوچک باشد که $g_{\mu\nu}$ به عنوان ثابت تلقی شوند، باید مسئله قطری کردن تانسور متقارن در فضای چهاربعدی را حل کنیم.] بنابراین، کمیت های $g_{\mu\nu}$ به طور ضمنی دستگاههای مختصات با سقوط آزاد را نسبت به q_μ تعریف می کنند؛ بنابر اصل هم ارز، این دستگاهها میدان گرانشی در دستگاه q_μ را مشخص می کنند.

فرمول (۱۴-۱۸۰) تنها در حد، وقتی رویدادها به اندازه کافی بهم نزدیک باشند، به طوری که فاصله بین آنها بی نهایت کوچک تلقی می شود، برقرار است. در حالتی که فاصله رویدادها متناهی باشد، فاصله بین آنها باید از طریق انتگرال گیری از فرمول (۱۴-۱۸۰) تعریف شود. متأسفانه بسط ریاضی این نظر از حوصله این بحث، خارج است. در نتیجه، مجبور شده ایم خود را با این ملاحظات کیفی راضی نگه داریم. خواننده ای که می خواهد این مبحث را در دامنه ای گسترده تر پی گیرد، می تواند به هر یک از تعداد زیاد کتابهای تابناک درباره نسبیت رجوع کند.

مسائل

۱. بررسی کنید که روابط (۱۴-۱۳) برای حالت های خاص (۱۴-۷) و (۱۴-۸) برقرارند.
۲. با در نظر داشتن رویدادهای E^1 ، E^2 ، کمیت S^2 را که از طریق معادله (۱۴-۴) به دست آمده، در یک دستگاه مختصات ستاره دار بنویسید، (۱۴-۶) را جایگذاری کنید و تحقیق کنید که اگر معادلات (۱۴-۱۳) برقرار باشند، S^2 به همان شکل ۱۴-۴ به مختصات بی ستاره کاهش می یابد.
۳. نشان دهید که اگر A_μ و B_μ کمیت های چهار بردار باشند، حاصل ضرب اسکالر (۱۴-۲۰) تحت یک تبدیل لورنتس ناورد است.
۴. قضیه (۱۴-۲۱) را اثبات کنید. [راهنمایی. اگر به ازای B_μ دلخواه $\sum_\mu L_\mu B_\mu = \sum_\mu K_\mu B_\mu$ ، در این صورت $[K_\mu = L_\mu]$.
۵. فرمول (۱۳-۴۷)، که اثر دوپلر نسبیتی را با تشکیل یک تبدیل لورنتس روی بردار موج k_μ می دهید، به دست آورید.
۶. یک دستگاه مختصات ستاره دار با سرعت v نسبت به یک دستگاه بی ستاره حرکت می کند. سرعت v در صفحه xy تحت زاویه ای چون α با محور x قرار دارد که مخالف جهت حرکت ساعت نسبت به دستگاه بی ستاره اندازه گیری می شود. سرعت v با محور x^* یک زاویه α^* می سازد که مخالف جهت حرکت ساعت در دستگاه ستاره دار اندازه گیری می شود. محورهای z و z^* موازی اند. مبدأهای O و O^* در $t = t^* = 0$ بهم منطبق اند. ضرایب $a_{\mu\nu}$ در تبدیل (۱۴-۶) را برای این حالت پیدا کنید. [راهنمایی. سه تبدیل پیاپی از نوع (۱۴-۷) و (۱۴-۸) تشکیل دهید و

معادله (۱۴-۱۲) را به کار برید. [عملیات جبری خود را با نشان دادن اینکه مبدأ O در دستگاه مختصات ستاره‌دار به طور صحیح حرکت می‌کند، بررسی کنید.

نشان دهید که اگر $\alpha = 0$ ، ناممکن است که α^* را چنان بگیریم که محورهای x^* و y^* به ترتیب با محورهای x و y موازی باشند. به بیان دیگر، محورهای جدید در دستگاه مختصات قدیم زوایای قائمه نمی‌سازند (و برعکس). اگر $\alpha \neq 0$ ، چه مقداری از α^* محور x^* را با محور x موازی می‌کند؟ [راهنمایی. در $t=0$ ، می‌توان محور x^* را در دستگاه بی‌ستاره با قرار دادن $z^* = 0 = y^*$ پیدا کرد.]

اگر $\alpha = \alpha^*$ ، زاویه بین محورهای x^* و y^* اندازه‌گیری شده در دستگاه بی‌ستاره، چقدر است؟ نشان دهید که اگر $\beta \ll 1$ ، محورهای ستاره‌دار نسبت به دستگاه بی‌ستاره تقریباً زوایای قائمه می‌سازند.

۷. نشان دهید که اگر p در هر دستگاه مختصات لخت مثبت باشد، در تمام دستگاههای لخت مثبت است. (توجه کنید به تشابه با معنی مطلق مخروط نوری آینده در فضا-زمان).

نشان دهید که جرم سکون m ذره از نظر بزرگی و علامت تحت تبدیل لورنتس p_μ ، ثابت باقی می‌ماند.

۸. سرعت گروهی را، با مؤلفه‌های زیر به صورت تابعی از k برای رابطه پراکندگی (۱۴-۵۹)، محاسبه کنید.

$$v_{gi} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$$

سپس نشان دهید که از رابطه (۱۴-۵۸) نتیجه می‌شود که سرعت هر ذره، u ، با سرعت گروهی، v_g ، موج وابسته‌اش در مکانیک کوانتومی نسبیتی، برابر است.

۹. با در دست داشتن مجموعه‌ای از چهار بردارهای $p_{j\mu}$ ، جملگی زمان-گونه یا نور-گونه، نشان دهید که حاصل جمع آنها زمان-گونه یا نور-گونه است. نشان دهید که مجموع نور-گونه است فقط اگر تمام $p_{j\mu}$ نور-گونه باشند و تمام اجزای فضایی p_j موازی باشند.

۱۰. اظهار شده است که امکان وجود ذراتی وجود دارد که چهار تکانه آنها، p_μ ، فضا-گونه است. پارامتری مناسب برای چنین ذره‌ای مشابه جرم ذره عادی تعریف کنید، و معادلات مشابه معادلات (۱۴-۴۶) را بنویسید که p_μ را بر حسب سرعت u بیان کنند. چون $u > c$ ، چنین ذراتی تاخیر نامیده می‌شوند. فرمولهای تقریبی مربوط به E و p برای یک تاخیر را در حد فرانسبیتی $u \gg c$ پیدا کنید. در حد $u \rightarrow c$ چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا یک تاخیر می‌تواند هر سیگنالی را از یک محل به مکان دیگری حمل کند؟

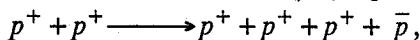
۱۱. یک باریکه افقی پادنوترون با انرژی جنبشی 100 MeV وارد اتاقک حباب هیدروژن می‌شود. واکنشی مشاهده می‌شود که در آن دو پيون مثبت با تکانه‌های $141 \text{ MeV}/c$ و $920 \text{ MeV}/c$ مسیرهایی در صفحه قائم باقی می‌گذارند که با جهت باریکه تابشی زاویه 45° می‌سازند؛ یکی بالای آن و یکی پایین آن. مسیر سومی از یک پيون منفی دیده می‌شود که به طور افقی تحت زوایای قائمه با باریکه تابشی با تکانه $145 \text{ MeV}/c$ حرکت می‌کند. تمام انرژیها و تکانه‌ها با دقت حدود 1% اندازه‌گیری می‌شود. فرض کنید که ذره هدف یک پروتون بود. جرم نوکلئون (نوترون یا پروتون) $938 \text{ MeV}/c^2$ ، و

جرم یک پیون $140 \text{ MeV}/c^2$ است. (راحت تر است انرژیهای ذرات پُرانرژی را بر حسب MeV ، جرما را بر حسب MeV/c^2 ، و تکانهها را بر حسب MeV/c اندازه گیری کنیم. در این صورت می توان محاسبات سینماتیکی را بدون تبدیل پرزحمت یکاها انجام داد.) (الف) نشان دهید که حداقل یک ذره مشاهده نشده (بنابراین نامتغیر) باید در واکنش تولید شده باشد، و نشان دهید که این ذره تقریباً با اطمینان یک پیون خنثی بود. بزرگی و جهت تکانه اش کدام بودند؟ (ب) گمان می رود که یک نرون ω^0 ممکن است در واکنش تولید شده باشد. ω^0 ذره ای است با طول عمر خیلی کوتاه (10^{-20} ثانیه)، با جرم $783 \text{ MeV}/c^2$ و بار الکتریکی صفر که به سه پیون وامی باشد. نشان دهید بسیار محتمل است که یک ω^0 تولید شده باشد، و انرژی جنبشی و جهت حرکت آن را پیدا کنید.

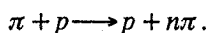
۱۲. کمیت T به دست آمده در معادله (۱۴-۶۷) را بر حسب جرمهای m_a ، m_b ، m_c ، m_d ، که از معادله (۱۴-۶۴) به دست آمده اند و ناوردهای M و S ، به دست آمده معادله (۱۴-۶۵) و (۱۴-۶۶)، بیان کنید.

۱۳. با در دست داشتن دستگاهی از ذرات با سه تکانه P و انرژی کل $E = P \cdot c$ ، یک دستگاه مختصات ستاره دار بیابید که در آن $P^* = 0$ ، و نشان دهید که $P^* = Mc$ (معادله ۱۴-۶۵). [راهنمایی. محور x را در جهت P بگیرید.]

۱۴. یک باریکه پروتون با انرژی جنبشی T وارد اتاقک حباب هیدروژنی می شود. انرژی آستانه T_f برای تولید پادپروتونها در واکنش زیر را پیدا کنید



که در آن پروتون هدف ساکن فرض شده است. انرژی سکون پروتون و پادپروتون 938 MeV است. ۱۵. یک پیون با انرژی جنبشی 1200 MeV بر یک پروتون ساکن می تابد، که تعدادی پیون در واکنش تولید می شود:



حداکثر تعداد پیونها، n ، که می توانند در واکنش تولید شوند، چیست؟ انرژی سکون پروتون 938 MeV و از آن پیون 140 MeV است. [راهنمایی. دستگاه مختصات مرکز جرم را به کار برید.]

۱۶. یک پیون با انرژی جنبشی 1000 MeV در برخوردی با یک پروتون ساکن، تحت یک زاویه 45° از جهت حرکت اصلی اش پراکنده می شود. زاویه پراکندگی پیون در دستگاه مختصات مرکز جرم چیست؟ جرمهای پیون و پروتون در مسئله ۱۵ داده شده اند.

۱۷. یک ذره فرودی (a) با ذره سکون (b) برهم کنش می کنند و ذرات (c) و (d) تولید می شوند. نشان دهید که اگر جرمها، ناوردهای M و S ، و زاویه θ_{ac} بین P_a و P_c داده شده باشند، تمام انرژیها و تکانهها و زاویه θ_{ad} را می توان تعیین کرد.

۱۸. مطلوب است عبارتی برای حاصل ضرب اسکالر ($P_{a\mu}, P_{d\mu}$) چهار تکانه ذرات (a) و (d) در واکنش نموده شده در شکل ۱۴-۱، بر حسب جرمهای چهار ذره و ناوردهای M و S تعریف شده به کمک معادلات (۱۴-۶۵) و (۱۴-۶۶).

۱۹. ناوردهای S را در یک دستگاه مختصات خاص بر حسب انرژیهای E_c ، E_a ، جرمهای m_c ، m_a و زاویه θ_{ac} بین جهت حرکت این دو ذره بنویسید.

۲۰. الف) نشان دهید که عنصر حجمی چهاربعدی $dV dt = dx dy dz dt$ یک کمیت اسکالر است. [راهنمایی. نشان دهید که برای تبدیلهایی از نوع (۷-۱۴) و (۸-۱۴)، ژاکوبین زیر برقرار است:

$$\partial(x^*, y^*, z^*, t^*) / \partial(x, y, z, t) = 1$$

و از آن نتیجه بگیرید که برای هر تبدیلی بین هر دو دستگاه مختصات لخت، ژاکوبین واحد است. [ب) نشان دهید که همین استدلال به این نتیجه گیری می انجامد که عنصر حجمی $dp_x dp_y dp_z dE$ در یک فضای انرژی - تکانه چهاربعدی نیز تحت یک تبدیل لورنتس ناورداست (به رابطه ای که با مسائل ۷ و ۱۹ از فصل ۱۳ برقرار است، توجه کنید).

۲۱. با محاسبه مستقیم نشان دهید که کمیت $\gamma_a \gamma_b |u_a - u_b|$ ، که در آن سرعت های u_b, u_a امتداد محور x توجیه می شوند، تحت یک تبدیل لورنتس خاص از نوع (۷-۱۴) ناورداست. سرعت های u_a و u_b براساس جهتهای حرکت در امتداد محور x ، مثبت یا منفی گرفته می شوند. ۲۲. نشان دهید که مقدار کمیت ناوردای لورنتس:

$$F_{ab} = [(p_{a\mu} p_{b\mu})^2 - m_a^2 m_b^2 c^4]^{1/2}$$

عبارت است از:

$$F_{ab} = m_a m_b c^2 \gamma_a \gamma_b |u_a \pm u_b|$$

اگر u_a موازی یا پادموازی با u_b باشد. با استفاده از این نتیجه، تعمیمی از معادله (۷۲-۱۴) را بنویسید که یک سطح مقطع σ تعریف کند که تحت تبدیلهای لورنتس دلخواه کمیتی اسکالر باشد. ۲۳. دو ذره (a) و (b) با چهار تکانه $p_{b\mu}$ و $p_{a\mu}$ جرمهای m_b و m_a و یک چهار تکانه کل معلوم $P_\mu = p_{a\mu} + p_{b\mu}$ مفروض اند. نشان دهید که کمیت

$$\frac{p_a^\mu d\Omega_a}{p_a \cdot (E_a p_a - E_a p_b)}$$

تحت یک تبدیل لورنتس ناورداست، که در آن p_a یک سه تکانه ذره (a) است و جهتش در زاویه فضایی $d\Omega_a = \sin \theta_a d\theta_a d\phi_a$ قرار دارد. (پیشنهاد. از ناوردایی عنصر حجمی

$$dp_a \cdot dp_{ax} dp_{ay} dp_{az} dp_b \cdot dp_{bx} dp_{by} dp_{bz}$$

در ۸ - فضا شروع کنید. ابتدا از p_{ax}, p_{ay}, p_{az} به مختصات کروی p_a, θ_a, ϕ_a در p_a - فضا تغییر متغیر بدهید، سپس تغییر متغیری به صورت زیر بدهید

$$p_b \cdot, p_{bx}, p_{by}, p_{bz}, p_a \cdot, p_a, \theta_a, \phi_a \rightarrow P \cdot, P_x, P_y, P_z, (m_a^2 c^2), (m_b^2 c^2), \theta_a, \phi_a$$

محاسبه ترمینان ژاکوبی 8×8 برای تبدیل اخیر خیلی دشوار نیست.)

با استفاده از نتیجه بالا، نشان دهید که سطح مقطع برای پراکندگی کشسان ذره (a) به وسیله ذره (b) درون یک زاویه فضایی $d\Omega_a$ می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$d\sigma_a = \frac{F(M, S) p_{aF}^\mu d\Omega_a}{p_{aF} \cdot (E_{bF} p_{aF} - E_{aF} p_{bF})}$$

که در آن $E_{bF}, p_{bF}, E_{aF}, p_{aF}$ انرژیها و تکانه های دو ذره بعد از پراکندگی اند، $S = (p_{aF\mu} - p_{aI\mu}, p_{aF\mu} - p_{aI\mu})$ و اندیس پایین I' مقادیر اولیه را نشان می دهد.

۲۴. سطح مقطع $d\sigma_a$ در مسئله ۲۳ را برای پراکندگی کشسان دو ذره با جرم مساوی در دستگاه مختصات مرکز جرم محاسبه کنید. نتیجه را بر حسب جرم m ، جرم ناوردای M ، و زاویه Θ که درون آن ذره (a) پراکنده می‌شود، بیان کنید. ناوردای S را بر حسب m ، M ، و Θ بیان کنید. نشان دهید که اگر برای انرژی مرکز جرم، $M_0 c^2$ ، پراکندگی همسانگرد باشد، یعنی اگر سطح مقطع در واحد زاویه فضایی $d\sigma_a/d\Omega_a$ مستقل از Θ باشد، در این صورت تابع $F(M_0, S)$ در انرژی مرکز جرم، از S مستقل است.

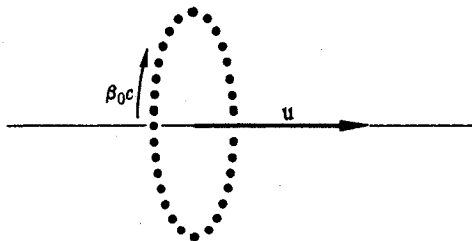
به فرض اینکه $F(M_0, S) = F_0$ مستقل از S باشد، $d\sigma_a/d\Omega_a$ را در دستگاه مختصات آزمایشگاهی (که در آن ذره (b) ساکن است) محاسبه، و سپس توزیع زاویه‌ای در آزمایشگاه فرایند پراکندگی را پیدا کنید که در مرکز جرم همسانگرد است.

۲۵. درستی معادلات (۱۴-۸۳) را تحقیق کنید. اطمینان پیدا کنید که وقتی F^* به کمک معادلات (۱۴-۸۳) داده می‌شود، هر چهار مؤلفه F_μ^* به طور صحیح ظاهر می‌شوند.

۲۶. ذره‌ای با تکانه p از مبدأ در امتداد محور y شروع می‌کند. ذره تحت تأثیر نیروی ثابت F در جهت x قرار می‌گیرد. مدارش چگونه با سهمی‌ای که به دست می‌آید، اگر معادلات کلاسیک حرکت به کار می‌رفت، مقایسه می‌شود؟

۲۷. در یک شتابگر حلقه‌ای الکترون، یک حلقه دایره‌ای از الکترونها با سرعت u در امتداد محور تقارن حلقه (شکل ۱۴-۴) حرکت می‌کند. در دستگاه مختصات ساکن در آن حلقه، حلقه شامل تعداد زیادی، N ، الکترون است که به طور یکنواخت در پیرامون حلقه دایره‌ای به شعاع a توزیع شده و با انرژی γmc^2 اطراف حلقه حرکت می‌کنند. نشان دهید که در دستگاه مختصات شتابگر، انرژی و تکانه‌اش با انرژی و تکانه یک تک ذره به جرم $N\gamma mc^2$ که با سرعت u روی محور تقارن به پایین حرکت می‌کند، یکسان است.

۲۸. ذره‌ای به جرم m که در امتداد محور x حرکت می‌کند تحت تأثیر نیروی $F \cos \omega t$ در جهت x قرار می‌گیرد. (الف) اگر v سرعت اولیه ذره باشد، $v(t)$ را بیابید. (ب) اگر تصحیحهای نسبیتی اندک باشند، مکان $x(t)$ را تا مرتبه اول در c^{-2} به دست آورید. (پ) اگر F کوچک، اما $\gamma \gg 1$ ، γ ، $x(t)$ را تا مرتبه اول در F به دست آورید. (ت) اگر $v_0 = 0$ ، اما $F_0 \gg \omega mc$ ، طرح کلی نمایش تغییرات $v(t)$ را به اختصار ترسیم و حرکت را تشریح کنید.



شکل ۱۴-۴ یک حلقه الکترون.

۲۹. ذره‌ای که در امتداد محور x حرکت می‌کند تحت تأثیر یک نیروی بازگرداننده خطی $F = -kx$ قرار می‌گیرد. حرکتش را تشریح کنید. جواب را حتی الامکان با روش انرژی بسط دهید. این حرکت تحت چه شرایطی با حرکت یک نوسانگر هماهنگ کلاسیک موافق است؟ مطلوب است کوچکترین مرتبه تصحیح‌های نسبیتی به بسامد نوسان و به حرکت $x(t)$.

۳۰. ذره‌ای تحت یک نیروی پتانسیل

$$V(x) = (Ax^2 - B)e^{-ax^2}$$

در امتداد محور x حرکت می‌کند. اگر این حرکت از مبدأ با سرعت v شروع شود، با استفاده از انتگرال انرژی (۱۴-۹۲) درباره حرکت بحث کنید. انواع حرکت را که ممکن است پیش آیند، توصیف کنید و برای هر یک گستره سرعت‌های اولیه v را به دست آورید. اگر ذره بتواند بگریزد، سرعت نهایی‌اش را بر حسب v به دست آورید.

۳۱. یک تابع نیروی $F(x)$ طراحی کنید که در آن معادلات نسبیتی حرکت به طور دقیق دارای جواب سینوسی $x = A \sin \omega t$ به ازای دامنه داده شده A ، باشند.

۳۲. ذره سبک و پرسرعتی به جرم m و بار $-e$ به وسیله یک بار ثابت سنگین Ze که آن را با نیروی کولنی $-Ze^2/r^2$ جذب می‌کند، پراکنده می‌شود. با در دست داشتن سرعت اولیه u و پارامترهای برخورد (بخش ۳-۱۶)، فاصله نزدیکترین دسترسی را پیدا کنید. فرض کنید بار ثابت در حال سکون باقی می‌ماند. نشان دهید که اگر $m\gamma \ll M$ ، که در آن M جرم ذره ثابت است، در این صورت به طور منطقی درست است که از حرکت ذره اخیر چشم‌پوشی کنیم. (اگر بار ثابت در حال سکون باقی بماند، در این صورت به کار بردن قانون کولن معمولی برای نیرو نیز درست است.)

۳۳. مسئله ۲۹ را با استفاده از پتانسیل هم‌ارز V_{rel} (معادله ۱۴-۱۰۱) حل کنید. نشان دهید که این روش نیز به همان نتیجه منجر می‌شود.

۳۴. با استفاده از قضیه (۱۴-۱۰۲) و نتیجه مسئله ۶۷ از فصل ۳، پایین‌ترین مرتبه تصحیح نسبیتی به فرمول سطح مقطع پراکندگی رادرفورد (۳-۲۷۶) را به دست آورید.

۳۵. نشان دهید که در حد $E_c \gg V$ ، مدار نسبیتی ذره‌ای به جرم m تقریباً همان مدار کلاسیک ذره‌ای به جرم $m(m c^2/E)$ است که در همان پتانسیل $V(x)$ با همان انرژی $E_c = E - m c^2$ حرکت می‌کند.

۳۶. قضیه (۱۴-۱۰۲) را به حالتی تعمیم دهید که ذره‌ای باردار تحت تأثیر یک میدان الکتروستاتیکی $E = -\nabla\phi$ و یک میدان مغناطیسی استاتیکی B قرار می‌گیرد. قضیه خود را برای حل کردن مسئله ۷۵ از فصل ۳ برای حالت نسبیتی، به کار برید.

۳۷. ذره‌ای با بار q در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متعامد $E = E_x \hat{x}$ و $B = B_y \hat{y}$ حرکت می‌کند. نشان دهید که اگر $E_c < B$ ، تصویر حرکتش روی صفحه xz یک بیضی با خروج از مرکز E_c/B است، و در جهت z با یک سرعت متوسط $cE_c/\gamma B$ حرکت می‌کند، و اثبات کنید که روی بیضی با بسامد زاویه‌ای ω_1 از این قرار،

$$\omega_1 = \frac{q(B^2 - E_c^2)^{1/2}}{\gamma m c}$$

پس و پیش می‌رود، که در آن $\gamma \cdot mc^2$ انرژی ذره است وقتی که ذره در انتهای یک قطر اصلی بیضی واقع باشد. ماهیت حرکت γ چیست؟ [راهنمایی. ویژه زمان را به عنوان متغیر مستقل به کار برید. مسئله مربوطه در مکانیک کلاسیک در بخش ۳-۱۷ حل شد.]

۳۸. با محاسبه مستقیم نشان دهید که چهار کمیت

$$B_{\mu} = \sum_i a_{\mu i} V_i,$$

به کار رفته در تعریف (۱۴-۱۲۶) برای چهار پیشران یک موتور موشکی، مانند مؤلفه‌های یک چهار بردار تبدیل می‌شوند. به یاد داشته باشید که V_i مؤلفه‌های سرعت خروجی نسبت به موشک هستند و بنابراین تبدیل نمی‌شوند، و $\alpha_{\mu\nu}$ ضرایب تبدیل از چارچوب سکون موشک به دستگاه مختصاتی اند که در آن B_{μ} محاسبه می‌شود. [راهنمایی. از این مسئله هراس به خود راه ندهید. فقط B_{μ} را محاسبه کنید و بقیه عوامل بی‌درنگ ظاهر خواهند شد.]

۳۹. یک سفینه فضایی سوار بر موشکی به جرم کل $M(t)$ ، جرم ساکن را با آهنگ dM_e/dt و با سرعت V نسبت به موشک، خارج می‌کند. به علاوه، مواد زائدی با سرعت صفر نسبت به موشک با آهنگ dM_w/dt به خارج پرتاب می‌شوند. (الف) نشان دهید که معادله حرکت (۱۴-۱۲۸) هنوز کاربرد دارد، اما پیشران T باید بر حسب dM_e/dt تعریف شود. (ب) با در دست داشتن V و dM_e/dt ، نشان دهید که سرعت نهایی حداکثر موشکی که از حال سکون شتاب‌دار می‌شود، به دست خواهد آمد اگر مواد زائد در حداقل زمان ممکن بیرون ریخته شوند. (پ) نشان دهید که به ازای هر سوخت داده شده، یک سرعت خروجی بهینه به معنای زیر وجود دارد. فرض کنید خواص سوخت چنان‌اند که امکان دارد بخشی از α از جرم سکونش به انرژی جنبشی تبدیل شود به طوری که $dE_k = \alpha c^2 dM_f$ ، که در آن dM_f جرم سوخت مصرف شده در زمان dt است. این انرژی برای شتاب دادن قسمتی از سوخت مصرفی جرم سکون $dM_e = -\eta dM_f$ به سرعتی به کار می‌رود که با انرژی جنبشی dE_k مطابقت کند. سوخت مصرفی باقیمانده $(1 - \alpha - \eta) dM_f$ بیرون ریخته می‌شود. نشان دهید که حداکثر پیشران با گرفتن مقدار ممکن حداکثر η به دست می‌آید، یعنی تمام سوخت مصرفی را در اگروز بگذاریم. مقدار بهینه V چیست؟ فرض کنید که قرار است به موشک در خط مستقیمی شتاب داده شود که V در جهت $-u$ قرار گیرد.

۴۰. معادلات (۶-۱۶) و (۶-۳۳) یک قانون گرانش نسبیتی ممکن پیشنهاد می‌کنند که در آن نیروی وارد بر ذره‌ای به جرم m بر حسب یک پتانسیل چهار اسکالری Φ به کمک فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{F}_{m\mu} = m \square_{\mu} \Phi.$$

یک معادله هموردا بنویسید که بتوان آن را بر حسب Φ حل کرد و در حالت استاتیکی (تمام جرمها در حال سکون، $\partial\Phi/\partial t = 0$) به معادله (۶-۳۳) تبدیل شود. نشان دهید که متأسفانه این نظریه ساده، در معادله (۱۴-۸۲) صدق نمی‌کند، و در نتیجه جرم سکون یک ذره، ثابت باقی نمی‌ماند. آنگاه نشان دهید که بنابر این نظریه خواهیم داشت:

$$\frac{dm}{dt} = -m \frac{d\Phi}{dt},$$

که در آن $d\Phi/dt$ آهنگ تغییر Φ در مکان ذره متحرک است.

۴۱. یک بردار dA یک عنصر سطح از مساحت و سمتگیری ثابتی را می‌نمایاند که با سرعت u در دستگاه مختصات بی‌ستاره حرکت می‌کند. با بهره‌گیری از این حقیقت که فشار کمیتی اسکالر است، بردار dA^* را به دست آورید که همان عنصر سطح را در دستگاه مختصات ستاره‌داری به دست می‌دهد که محورهاش موازی‌اند و با سرعت βc در امتداد محور x نسبت به دستگاه بی‌ستاره حرکت می‌کند.

۴۲. تحقیق کنید که معادله (۱۴-۱۶۳) یک روایت چهار برداری صحیح از معادلات پیشین برحسب \mathcal{F} و \mathcal{F}_i است.

۴۳. تحقیق کنید که چهار نیروی الکترومغناطیسی به دست آمده از معادله (۱۴-۱۶۴)، در معادله (۱۴-۸۲) صدق می‌کند. (اثبات فقط به دو یا سه سطر نیاز دارد.)

۴۴. نشان دهید که تابع لاگرانژی

$$L = -mc^2(1 - u^2/c^2)^{1/2} - q\phi + qu \cdot A/c$$

معادله حرکت نسبیتی صحیح (۱۴-۷۹) را برای ذره‌ای باردار به دست می‌دهد.

۴۵. می‌توان نشان داد که اگر Ldt یک چهار اسکالر باشد، در این صورت تابع لاگرانژی L را به معادلات حرکتی هدایت می‌کنند که تحت یک تبدیل لورنتس هموردایند. نشان دهید که برای تابع لاگرانژی L داده شده از مسئله ۴۴، کمیت Ldt یک چهار اسکالر است.

۴۶. نشان دهید که تابع لاگرانژی L داده شده در مسئله ۴۴ تابع هامیلتونی زیر را به دست می‌دهد:

$$H = mc^2\gamma + q\phi.$$

H را برحسب مختصات و تکانه‌ها بیان کنید.

۴۷. ثابت کنید که مجموعها، حاصل ضربها، و ادغامها که طبق فرمولهای (۱۴-۱۶۶)، (۱۴-۱۶۷)، و (۱۴-۱۶۸) شکل می‌گیرند، مانند چهار تانسورهای از مرتبه مناسب تبدیل می‌شوند.

۴۸. ثابت کنید که اگر یک چهار تانسور در دو اندیس خاص متقارن یا پادمقارن باشد، این خاصیت تحت یک تبدیل لورنتس حفظ می‌شود.

۴۹. تعداد مؤلفه‌های مستقل یک چهار تانسور کاملاً پادمقارن از مرتبه‌های مختلف را بشمارید، یعنی یک پادمقارن را در هر زوج از اندیسه‌ها، نشان دهید که هیچ چهار تانسوری به‌طور کامل پادمقارن غیریدیهی از مرتبه بزرگتر از چهار وجود ندارد. نشان دهید که یک چهار تانسور به‌طور کامل پادمقارن از مرتبه چهار فقط یک مؤلفه مستقل دارد. آیا این تانسور مانند یک چهار اسکالر تبدیل می‌شود؟

۵۰. یک چهار تانسور متقارن از مرتبه دوم چند مؤلفه مستقل دارد؟ چند تا چهار تانسور کاملاً متقارن از مرتبه سوم، یعنی متقارن در هر زوج اندیس، دارد؟

۵۱. تحقیق کنید که تانسور میدان الکترومغناطیسی تعریف شده به کمک معادله (۱۴-۱۷۱) به‌طور صحیح بر حسب E و B به کمک معادله (۱۴-۱۷۲) به دست می‌آید.

۵۲. مطلوب است مؤلفه‌های E^* و B^* در یک دستگاه مختصات ستاره‌دار بر حسب E و B در دستگاه بی‌ستاره‌ای که از طریق ضرایب تبدیل (۱۴-۷) به آن مربوط می‌شود (رابطه (۱۴-۱۷۲) را به کار ببرید).

۵۳. الف) سیال متحرکی به سرعت u دارای چگالی جرمی ρ در دستگاه مختصاتی است که در آن سیال ساکن است. نشان دهید که چگالی جرم سکون و قتی سیال با سرعت u حرکت می‌کند عبارت است از $\gamma\rho$ ، و اینکه چگالی انرژی کل $\gamma^2\rho \cdot c^2$ است. ب) تانسور انرژی جنبشی - تکانه

برای این سیال، بنابر تعریف، عبارت است از:

$$T_{\mu\nu} = \rho \cdot U_\mu U_\nu.$$

نشان دهید که $T_{..}$ چگالی انرژی، $T_{.i}$ جریان انرژی در جهت i ، $c^{-1}T_{.i}$ چگالی مؤلفه i تکانه، و T_{ij} جریان تکانه، یعنی جریان مؤلفه i تکانه در جهت j ، است.

۵۴. (الف) اگر f چگالی نیروی جسمی (۳- نیرو بر واحد حجم) باشد، نشان دهید که چهار کمیت f_i و $f_0 = u \cdot f_c$ مؤلفه‌های یک چهار بردارند، که در آن u سرعت ماده‌ای است که نیرو بر آن عمل می‌کند. (ب) با استفاده از نتیجه بالا و مسئله ۵۳، نشان دهید که پایستگی انرژی و تکانه در یک سیال متحرک متأثر از چگالی نیروی جسمی، f ، ممکن است به شکل زیر بیان شود

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = f_\mu.$$

*۵۵. مقایسه نتیجه بالا با مسئله ۳۵ از فصل ۱۰ قانون پایستگی را برای محیطی پیشنهاد می‌کند که شامل تنشهایی از قرار زیر است

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} (T_{\mu\nu} + P_{\mu\nu}) = f_\mu,$$

که در آن $P_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه تنش است. فرض کنید که در سیال ساکن تنها مؤلفه‌های ناصفر $P_{\mu\nu}$ عبارت‌اند از $P_{11} = P_{22} = P_{33} = p$ ، که در آن p فشار است. مطلوب است $P_{\mu\nu}$ در دستگاه مختصاتی که در آن سیال با سرعت u در امتداد محور x حرکت می‌کند. نشان دهید که $P_{.i}$ جریان انرژی ناشی از فشار، و P_{ij} جریان تکانه حاصل از فشار است.

۵۶. فرض کنید فوتونی که با سرعت c حرکت می‌کند وقتی از خورشید خیلی دور است، به کمک میدان گرانش خورشید شتاب‌دار می‌شود، و این شتاب به کمک قانون گرانش نیوتن به دست می‌آید. مطلوب است زاویه انحراف α در جهت پرتو نور عبوری از نزدیکی خورشید، به صورت تابعی از پارامتر برخورد b .

۵۷. بنابر قوانین مکانیک کوانتومی، فوتونی با بسامد ν دارای انرژی $h\nu$ است، و در نتیجه بنا به نظریه نسبیت خاص، دارای جرم (جنبشی) $h\nu/c^2$ است. فوتونی به طرف بالا در قبال یک میدان گرانشی یکنواخت حرکت می‌کند که شتابش g است. فرض کنید انرژی کل، شامل انرژی پتانسیل گرانشی، حفظ می‌شود و بسامد ν' فوتون را وقتی به اندازه فاصله s بالا رفته است، به دست آورید. نشان دهید که نتیجه‌ای که به دست آورده‌اید، با معادله (۱۴-۱۷۶) می‌خواند.

۵۸. سفینه‌ای سوار بر موشکی زمینی را ترک می‌کند و با سرعت βc ، $\beta \ll 1$ ، فاصله L را می‌پیماید تا به سیاره‌ای، ساکن نسبت به زمین، می‌رسد. ساعتها در زمین، در سیاره، و در موشک همزمان شده‌اند که در لحظه عزیمت صفر را نشان دهند. مطلوب است زمان نشان داده شده t_p توسط ساعت در سیاره در لحظه ورود موشک. مطلوب است زمان نشان داده شده t_R توسط ساعت موشک. زمان نشان داده شده توسط ساعت زمین را، t_E ، وقتی موشک به سیاره می‌رسد، نسبت به دستگاه مختصاتی که در آن موشک ثابت است، پیدا کنید. سفینه اکنون با شتاب $-g$ در مدت زمان Δt_R ترمز می‌کند تا نسبت به سیاره به سکون برسد. با استفاده از فرمول (۱۴-۱۷۶) در یک دستگاه مختصات ترمزی (شتاب‌کننده) که در آن موشک همواره در حال سکون باقی می‌ماند، زمان

$\Delta t_E - \Delta t_R$ کسب شده به وسیله ساعت زمین نسبت به ساعت موشک را در طی زمان شتاب کندشونده (تا مرتبه اول در β) محاسبه کنید. نشان دهید که زمان کسب شده صحیح برای آوردن ساعت زمین به عقب در همزمانی با ساعت سفینه، کافی است.

۵۹. یک ساعت A در حال سکون روی محور یک دستگاه مختصات چرخان سیگنالی با بسامد f_A که توسط ساعت اندازه گیری می شود، به خارج گسیل می کند. سیگنال به ساعت B می رسد، که آن هم در دستگاه چرخان در حال سکون است و به فاصله r از محور قرار دارد. (الف) با استفاده از قوانین نسبیت خاص، در یک دستگاه ناچرخان، نشان دهید که بسامد سیگنال، f_B ، آن طور که به وسیله ساعت B اندازه گیری می شود، می تواند از این قرار نوشته شود:

$$f_B = f_A \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

که در آن v اختلاف پتانسیل گرانشی بین A و B است که به کمک معادله (۶-۱۷)، برای میدان نیروی مرکزگرایز در دستگاه چرخان، تعریف می شود. (ب) نشان دهید که همین فرمول تا مرتبه اول در g/c^2 با فرمول (۱۴-۱۷۶) که برای یک میدان گرانشی یکنواخت به دست آمد، می خواند. (فرمول (۱۴-۱۷۶) فقط تا مرتبه اول در gh/c^2 به دست آمده بود).

۶۰. (الف) با توجه به نتیجه (۱۴-۱۷۷) نشان دهید که فاصله ds ، اندازه گیری شده در دستگاه مختصات چرخان، بین دو نقطه نزدیک بهم می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$(ds)^2 = (dr^*)^2 + r^{*2} \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-1} (d\theta)^2,$$

که در آن r^* و θ مختصات قطبی در دستگاه چرخان اند، و v پتانسیلی گرانشی است که به کمک معادله (۶-۱۷) تعریف شد و از میدان نیروی مرکزگرایز در دستگاه چرخان ناشی می شود. شعاع مرجع را جایی بگیرید که در آن با $g = 0$ می رسیم به $r^* = 0$. (ب) فرض کنید که نتیجه بالا، دست کم به طور تقریبی، در مورد میدان گرانشی اطراف خورشید نیز به کار می آید، اما اکنون v در $r = \infty$ صفر تعریف می شود به طوری که دور از خورشید، هندسه اقلیدسی برقرار است. «خط مستقیمی» در نظر بگیرید که در فاصله ای، h ، از خورشید می گذرد. افزایش طول این خط ناشی از میدان گرانشی خورشید را تا مرتبه اول در v پیدا کنید. افزایش متناظر در زمان سفر یک سیگنال رادیویی که از نزدیکی خورشید می گذرد، چیست؟ (پ) با فرض اینکه نتیجه مسئله ۵۹ در نزدیکی خورشید به کار می رود، و با به خاطر آوردن این موضوع که سرعت نور، c ، با استفاده از ساعتهای محلی اندازه گیری می شود، مطلوب است افزایش در زمان سفر یک سیگنال رادیویی عبوری در فاصله ای، h ، از خورشید ناشی از آهنگ کارکرد آهسته تر ساعتهای محلی در نزدیکی خورشید. نشان دهید که این اثر تأخیر زمانی برابر با آن را می دهد که در قسمت (ب) محاسبه شد، به طوری که تأخیر زمان کل دو برابر می شود.

کتابنامه

در فهرست زیر که ابدأ کامل نیست کتابهایی معرفی شده‌اند که به موضوع این کتاب مربوط‌اند و می‌تواند برای خواننده سودمند باشند.

مکانیک مقدماتی

1. J. W. Campbell, *An Introduction to Mechanics*. New York: Pitman, 1947.
2. R. A. Millikan, D. Roller, and E. C. Watson, *Mechanics, Molecular Physics, Heat, and Sound*. Boston: Ginn and Co., 1937.

مکانیک متوسط

3. W. Arthur, and S. K. Fenster, *Mechanics*. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1969.
4. R. A. Becker, *Introduction to Theoretical Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1954.
5. R. B. Lindsay, *Physical Mechanics*, 2nd ed. New York: D. Van Nostrand, 1950.
6. W. D. MacMillan, *Theoretical Mechanics*. New York: McGraw-Hill. Vol. 1: *Statics and Dynamics of a Particle*, 1927. Vol. 3: *Dynamics of Rigid Bodies*, 1936.
7. W. F. Osgood, *Mechanics*. New York: Macmillan, 1937.
8. M. Scott, *Mechanics, Statics and Dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1949.
9. R. J. Stephenson, *Mechanics and Properties of Matter*. New York: John Wiley & Sons, 1952.
10. J. L. Synge, and B. A. Griffith, *Principles of Mechanics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

مکانیک پیشرفته

11. H. C. Corbin, and P. Stehle, *Classical Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 1950.
12. H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1950.
13. H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1932. (New York: Dover Publications, 1945.)
14. L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Mechanics*. London: Pergamon Press, 1960. (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960.)
15. L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. London: Pergamon Press, 1959. (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1959.)
16. L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*. London: Pergamon Press, 1959. (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1959.)
17. Lord Rayleigh, *The Theory of Sound* (2 vols.), 2nd ed. London: Macmillan, 1894-96. (New York: Dover Publications, 1945.)
18. E. J. Routh, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Advanced Part, 6th ed. London: Macmillan, 1905. (New York: Dover Publications, 1955.)
19. J. C. Slater, and N. H. Frank, *Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1947.
20. A. G. Webster, *The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic, and Fluid Bodies*. Leipzig: B. G. Teubner, 1904.

21. E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1937. (New York: Dover Publications, 1944.)
22. A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1941.

الکتریسیته و مغناطیس

23. R. G. Fowler, *Introduction to Electric Theory*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1953.
24. N. H. Frank, *Introduction to Electricity and Optics*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1950.
25. G. P. Harnwell, *Principles of Electricity and Magnetism*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1949.
26. A. F. Kip, *Fundamentals of Electricity and Magnetism*. New York: McGraw-Hill, 1969.
27. L. Page, and N. I. Adams, *Principles of Electricity*. New York: D. Van Nostrand, 1931.
28. W. T. Scott, *Physics of Electricity and Magnetism*. New York: John Wiley & Sons, 1966.
29. J. C. Slater, and N. H. Frank, *Electromagnetism*. New York: McGraw-Hill, 1947.

نظریه الکترومغناطیس پیشرفته

30. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1962.
31. W. K. H. Panofsky, and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.

نسبیت مقدماتی (کتاب و کتاب درسی)

32. A. Einstein, and L. Infeld, *The Evolution of Physics*. New York: Simon & Schuster, 1938. An excellent popular account.
33. A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl, H. Minkowski, *The Principle of Relativity*. New York: Dover Publications, 1952. (Originally published London: Methuen, 1923.) A collection of translations of the original papers by the authors, remarkably readable.
34. D. Bohm, *The Special Theory of Relativity*. New York: W. A. Benjamin, 1965.
35. M. Born, *Einstein's Theory of Relativity*. New York: Dover Publications, 1962.
36. R. B. Lindsay, and H. Margenau, *Foundations of Physics*. New York: John Wiley & Sons, 1936. Contains two chapters on the special and general theories of relativity.
37. N. D. Mermin, *Space and Time in Special Relativity*. New York: McGraw-Hill, 1968.
38. R. D. Sard, *Relativistic Mechanics*. New York: W. A. Benjamin, 1970.
39. J. H. Smith, *Introduction to Special Relativity*. New York: W. A. Benjamin, 1965.
40. E. F. Taylor, and J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*. San Francisco: W. H. Freeman, 1963.

نسبیت پیشرفته

41. P. G. Bergmann, *An Introduction to the Theory of Relativity*. New York: Prentice-Hall, 1946.
42. R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. Oxford: Oxford University Press, 1934.

کوانتوم مکانیک

43. W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, trans. by C. Eckart and F. C. Hoyt. Chicago: University of Chicago Press, 1930. (New York: Dover Publications, 1949.)

44. D. Bohm, *Quantum Theory*. New York: Prentice-Hall, 1951.
45. M. Born, *Atomic Physics*, trans. by John Dougall, 4th ed. New York: Hafner, 1946.
46. L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics—Non-relativistic Theory*. London: Pergamon Press, 1958. (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958.)
47. R. B. Lindsay, and H. Margenau, *Foundations of Physics*. New York: John Wiley & Sons, 1936. Contains a chapter on quantum mechanics.

ریاضیات (کتابهای درسی و رساله‌ها)

48. R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1953.
49. R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*. New York: McGraw-Hill, 1941.
50. R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, trans. by E. F. McShane. London: Blackie & Son, 1934.
51. L. Hopf, *Introduction to the Differential Equations of Physics*, trans. by Walter Nef. New York: Dover Publications, 1948.
52. D. Jackson, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*. Menasha, Wisc.: George Banta Publishing Co., 1941.
53. T. von Karman, and M. A. Biot, *Mathematical Methods in Engineering*. New York: McGraw-Hill, 1940.
54. W. Kaplan, *Advanced Calculus*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1952.
55. O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*. Berlin: J. Springer, 1929.
56. M. S. Knebelman, and T. Y. Thomas, *Principles of College Algebra*. New York: Prentice-Hall, 1942.
57. W. Leighton, *An Introduction to the Theory of Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1952.
58. H. Levy, and E. A. Baggott, *Numerical Solutions of Differential Equations*, New York: Dover Publications, 1950.
59. W. E. Milne, *Numerical Calculus*. Princeton: Princeton University Press, 1949.
60. W. F. Osgood, *Introduction to Calculus*. New York: Macmillan, 1922.
61. W. F. Osgood, *Advanced Calculus*. New York: Macmillan, 1925.
62. W. F. Osgood, and W. C. Graustein, *Plane and Solid Analytic Geometry*. New York: Macmillan, 1938.
63. B. O. Peirce, *Elements of the Theory of the Newtonian Potential Function*, 3rd ed. Boston: Ginn & Co., 1902.
64. B. O. Peirce, *A Short Table of Integrals*, 3rd ed. Boston: Ginn & Co., 1929.
65. H. B. Phillips, *Vector Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1933.
66. E. T. Whittaker, and G. Robinson, *The Calculus of Observations*. New York: Van Nostrand, 1924.
67. A. P. Wills, *Vector Analysis, with an Introduction to Tensor Analysis*. New York: Prentice-Hall, 1931.
68. E. B. Wilson, *Advanced Calculus*. Boston: Ginn & Co., 1912.
69. D. R. Wylie, Jr., *Advanced Engineering Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1951.

پاسخ مسائل فرد

فصل ۱

$$۴/۰۶ \times ۱۰^{-۳} \text{ dyne}; ۹/۲۲ \times ۱۰^{-۳} \text{ dyne} .۱$$

$$\mu mg / (\sin \theta - \mu \cos \theta) \text{ (ب) } .۷$$

$$t = (v_0/g)[(\sin \theta + \mu \cos \theta)^{-1} + (\sin^2 \theta + \mu^2 \cos^2 \theta)^{-1/2}] .۹$$

$$۲/۲۰ \times ۱۰^{۲۷} \text{ tons} .۱۱$$

$$۱/۴ \times ۱۰^{۱۱} \text{ برابر جرم خورشید} .۱۳$$

فصل ۲

$$۱۶۰ \text{ hp}, ۸۰۱ \text{ hp}, ۲۴۰۳ \text{ hp (الف) } .۱$$

$$۳۰۱۱ \text{ lb-wt}, ۶۰۲ \text{ lb-wt}, ۲۰۱ \text{ lb-wt (ب) } .۲$$

$$p = p_0 \cdot v_\infty = v_0 + (p_0/m) .۳$$

$$v = (F_0/4\omega m)(2\omega t - \sin 2\omega t), x = (F_0/8\omega^2 m)(2\omega^2 t^2 - 1 + \cos 2\omega t) \text{ (ب) } .۵$$

$$v = v_0, x = v_0 t, t < t_0 \text{ (الف) وقتی } .۷$$

$$v = v_0 + p_0(t-t_0)/m \delta t, x = v_0 t + p_0(t-t_0)^2/2m \delta t,$$

$$t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t \text{ وقتی}$$

$$v = v_0 + p_0/m, x = v_0 t - p_0 \delta t/2m + p_0(t-t_0)/m,$$

$$t > t_0 + \delta t \text{ وقتی}$$

$$x = 200t - 2000(1 - e^{-t/20})(3 - e^{-t/20}), (t \text{ بر حسب sec}, x \text{ بر حسب ft}) .۹$$

$$v_\infty = 200 \text{ ft/sec به فرض اینکه } F \text{ از } v \text{ مستقل باشد.}$$

$$t_s = m(1 - e^{-\alpha v_0})/(\alpha b), x_s = [m/(\alpha^2 b)] [1 - e^{-\alpha v_0} - \alpha v_0 e^{-\alpha v_0}] \text{ (ب) } .۱۱$$

$$v = (\sqrt{F_0/b}) \tanh(\sqrt{bF_0} t/m) .۱۳$$

$$v = (\sqrt{P/b}) (1 - e^{-\gamma bt/m}) \quad .15$$

$$v = [v_0^{(1-n)} - (1-n)(bt/m)]^{1/(1-n)}; \quad .17$$

$$x = m \{ v_0^{(\gamma-n)} - [v_0^{(1-n)} - (1-n)(bt/m)]^{(\gamma-n)/(1-n)} \} / (\gamma-n)b;$$

$$t_s = mv_0^{(1-n)} / (1-n)b, \quad (n < 1);$$

$$x_s = mv_0^{(\gamma-n)} / (\gamma-n)b, \quad (n < \gamma).$$

$$m\ddot{x} = k/x^\nu, \quad x = [x_0^\nu + (kt^\nu/mx_0^\nu)]^{1/\nu} \quad .19$$

$$F = -\gamma ax + \gamma bx^\nu \quad (\text{الف}) \quad .21$$

$$v_c^\nu = \gamma ma^\nu / \gamma v b^\nu \quad (\text{ب})$$

$$x^\nu = \frac{E}{k} + \frac{\sqrt{E^\nu - ka}}{k} \cos \left(\gamma \sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta \right) \quad (\text{الف}) \quad .23$$

$$x \doteq \sqrt{\frac{a}{\gamma E}} + \sqrt{\frac{\gamma E}{k}} \left| \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta \right) \right|; \quad (\text{ب}) \text{ تعبير كنيد}$$

$$(\gamma b/a)^{1/\nu}, (\gamma \pi/\nu) (m^\nu b^\nu / \gamma a^\nu)^{1/\nu} \quad (\text{پ}) \quad .25$$

$$x_{eq} = 0, \quad \pm \sqrt{\gamma} a, \quad \omega = (v/\gamma ma^\nu)^{1/\nu} \quad (\text{ب}) \quad .27$$

$$\alpha > [1 + (\gamma V_0/\gamma m v_0^\nu)]^{-1}, \quad \alpha > [1 + (\gamma V_0/\gamma m v_0^\nu)]^{-1}, \quad (\text{پ})$$

$$x = a, \quad (\gamma/\gamma)^{1/\nu} a.$$

$$x = \frac{m}{\gamma b} \ln \left(1 + \frac{bv_0^\nu}{mg} \right) + \frac{m}{b} \ln \cos \left[\sqrt{\frac{bg}{m}} (t_0 - t) \right], \quad (0 < t < t_0), \quad .31$$

$$= \frac{m}{\gamma b} \ln \left(1 + \frac{bv_0^\nu}{mg} \right) - \frac{m}{b} \ln \cosh \left[\sqrt{\frac{bg}{m}} (t - t_0) \right], \quad (t > t_0),$$

$$t_0 = \sqrt{m/bg} \tan^{-1} (\sqrt{b/mg} v_0) \quad \text{كه در آن}$$

$$x = (x_0^\nu/\nu + t\sqrt{\gamma MG/\gamma})^{1/\nu} \quad .33$$

$$C_1 = A \cos \theta, \quad C_2 = -\omega_1 A \sin \theta \quad .37$$

$$x = x_0 e^{-\gamma t} [\cos \omega_1 t + (\gamma/\omega_1) \sin \omega_1 t], \quad .39$$

$$x = x_0 (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}, \quad x = x_0 (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1} (\gamma_1 e^{-\gamma_2 t} - \gamma_2 e^{-\gamma_1 t}).$$

$$x = [(\gamma_1 x_0 + v_0) e^{-\gamma_2 t} - (\gamma_2 x_0 + v_0) e^{-\gamma_1 t}] / (\gamma_1 - \gamma_2), \quad (v_0 < 0) \quad .41$$

$$k = 4/9 \times 10^8 \text{ kgm sec}^{-2}, \quad b = \sqrt{10} \times 10^8 \text{ kgm sec}^{-1} \quad (\text{الف}) \quad .43$$

$$0.076 \text{ sec} \quad (\text{ب})$$

$$x = (F_0/k) + Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad .۴۵$$

$$x = [F_0/m\omega_0 (\omega_0^2 - \omega^2)] (\omega_0 \sin \omega t - \omega \sin \omega_0 t) \quad .۴۷$$

$$x = \frac{F_0}{m(\gamma^2 + \omega^2)^2} \left[(\gamma^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\gamma\omega \sin \omega t - (\gamma^2 - \omega^2 + \gamma^2 t - 2\gamma\omega t) e^{-\gamma t} \right] \quad .۴۹$$

$$+ (x_0 + v_0 t + \gamma x_0 t) e^{-\gamma t}$$

$$x = (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t, t \leq \pi/\omega_0; \quad .۵۳$$

$$x = (B/m) (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} [\cos(\omega t + \theta) + \cos \alpha \sin \omega_0 t + (\omega/\omega_0) \sin \alpha \cos \omega_0 t]$$

$$+ (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t, \alpha = (2\pi\omega/\omega_0) + \theta, t \geq \pi/\omega_0.$$

$$x = 0 \text{ اگر } t < t_0, x = (p_0/k\delta t) [1 - \cos \omega_0(t - t_0)], \text{ اگر } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t, \text{ (الف)} \quad .۵۵$$

$$x = (2p_0/k\delta t) \sin\left(\frac{1}{\gamma} \omega_0 \delta t\right) \sin \omega_0 \left(t - t_0 - \frac{1}{\gamma} \delta t\right) \text{ اگر } t > t_0 + \delta t.$$

$$m\omega_0^2 x = \left(\frac{\gamma}{\gamma} A + \frac{1}{\gamma^2} B\right) e^{-\omega_0 t/\gamma} \cos\left(\frac{\gamma}{\gamma} \sqrt{\gamma} \omega_0 t\right) \quad \text{(الف)} \quad .۵۷$$

$$+ \left(\frac{\gamma}{\lambda} \sqrt{\gamma} A + \frac{\gamma^2}{13\gamma^2} \sqrt{\gamma} B\right) e^{-\omega_0 t/\gamma} \sin\left(\frac{\gamma}{\gamma} \sqrt{\gamma} \omega_0 t\right)$$

$$- \frac{\gamma}{\gamma} A \cos \omega_0 t - \frac{1}{\gamma^2} B \cos \gamma \omega_0 t - \frac{\gamma}{1\gamma} B \sin \gamma \omega_0 t.$$

$$x = (F_0/ma^2) [1 - (1 + at + \frac{1}{\gamma} a^2 t^2) e^{-at}] \quad .۵۹$$

$$x = (2F_0/\pi\omega_0^2) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\omega_0 t \right] \quad .۶۱$$

.۶۳

$$x = \begin{cases} 0, & t < t_0 \text{ اگر} \\ \frac{P_0}{m\omega_0^2 \delta t} \left[1 - e^{-\gamma(t-t_0)} \cos \omega_1(t-t_0) - \frac{\gamma}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin \omega_1(t-t_0) \right], & t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t, \text{ اگر} \\ \frac{P_0}{m\omega_0^2 \delta t} e^{-\gamma(t-t_0)} \left[\left(e^{\gamma \delta t} \cos \omega_1 \delta t - 1 - \frac{\gamma}{\omega_1} e^{\gamma \delta t} \sin \omega_1 \delta t \right) \cos \omega_1(t-t_0) \right. \\ \left. + \left(e^{\gamma \delta t} \sin \omega_1 \delta t + \frac{\gamma}{\omega_1} e^{\gamma \delta t} \cos \omega_1 \delta t - \frac{\gamma}{\omega_1} \right) \sin \omega_1(t-t_0) \right], & t > t_0 + \delta t \text{ اگر} \end{cases}$$

فصل ۳

F.R .۱۱

$$-k\pi/\sqrt{r} \text{ (ب)؛ } k \left[1 - \sqrt{\delta} + \ln \frac{1}{r} (1 + \sqrt{\delta}) \right] \text{ (الف) .۱۳}$$

$$(\ddot{A}_\rho - \gamma \dot{A}_\rho \dot{\phi} - A_\rho \ddot{\phi} - A_\rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\ddot{A}_\phi + \gamma \dot{A}_\rho \dot{\phi} + A_\rho \ddot{\phi} - A_\rho \dot{\phi}^2) \hat{\phi} + \ddot{A}_z \hat{z} \text{ .۱۵}$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial f} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{h}{f} \right)^{1/\gamma} \frac{\hat{h}}{(f+h)}, \quad \frac{\partial f}{\partial h} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{f}{h} \right)^{1/\gamma} \frac{\hat{h}}{(f+h)} \text{ (ب) .۱۷}$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial f} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{h}{f} \right)^{1/\gamma} \frac{\hat{f}}{f+h}, \quad \frac{\partial \hat{h}}{\partial h} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{f}{h} \right)^{1/\gamma} \frac{\hat{f}}{(f+h)};$$

$$\dot{r} = (f+h)^{1/\gamma} \left(\frac{\dot{f}}{f^{1/\gamma}} \hat{f} + \frac{\dot{h}}{h^{1/\gamma}} \hat{h} \right).$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} + \frac{A_\phi}{\rho} \right) \hat{z} \text{ .۲۱}$$

$$F_x = \frac{1}{\gamma} F_0 + \left(\frac{mv^2}{R} - \frac{1}{\gamma} F_0 \right) \cos \frac{vt}{R}, \quad F_y = \left(\frac{1}{\gamma} F_0 - \frac{mv^2}{R} \right) \sin \frac{vt}{R} \text{ (الف) .۲۳}$$

$$\frac{\pi F_0 R}{\gamma v} \hat{x} + \left(\frac{F_0 R}{v} - \gamma mv \right) \hat{y} \text{ (ب)}$$

$$L = (-\gamma m b c t^2, m a c t^2 - m c x, m a b t^2 + \gamma m b x t^2), \text{ .۲۵}$$

$$F = (\gamma m a, \gamma m b t, 0),$$

$$N = (-\gamma m b c t^2, \gamma m a c t, \gamma m a b t^2 + \gamma m b x t).$$

$$\delta = \exp(-b v_z / mg) \text{ .۲۹}$$

$$\alpha_0 = \sin^{-1} \left(\frac{g x_0}{v^2} \right) \text{ (الف) .۳۳}$$

(ب) زاویه پرتاب باید به اندازه $\delta = 1 - \cot^2 \alpha_0 \cdot \gamma b v \cdot \cos \alpha_0 / \gamma m g$ اضافه شود که در آن α_0

زاویه پرتاب بی مقاومت هوا است.

$$\delta b x^2 y^2 - \gamma a b x y z^2; \text{ (الف) .۳۵}$$

$$-\int_{x_0}^x F_x dx - \int_{y_0}^y F_y dy - \int_{z_0}^z F_z dz \text{ (ب)}$$

$$\frac{1}{\gamma} e^{-R} \text{ (الف) .۳۷}$$

$$-\int_{s=A}^{s=r} f(s) ds \text{ (ب)}$$

$$F_x = -ae^{\gamma}(r_1^{-\gamma} - r_2^{-\gamma}) - xe^{\gamma}(r_1^{-\gamma} - r_2^{-\gamma}), \quad .۴۱$$

$$F_y = -ye^{\gamma}(r_1^{-\gamma} - r_2^{-\gamma}), \quad F_z = -ze^{\gamma}(r_1^{-\gamma} - r_2^{-\gamma})$$

$$\dot{\theta} = (k/m)^{1/2}, \quad \omega_r = \gamma(k/m)^{1/2} \quad .۴۳$$

$$kr^{\gamma} = E + (E^2 - \omega^2 L^2)^{1/2} \cos(\gamma \omega t + \gamma \alpha_0), \quad \omega = (k/m)^{1/2}, \quad .۴۵$$

$$\tan(\theta - \theta_0) = (\omega L)^{-1} [E - (E^2 - \omega^2 L^2)^{1/2}] \tan(\omega t + \alpha_0),$$

$\theta =$ زاویه در نقطهٔ اوج خورشیدی است. (این شکل لیسازو $\omega_x = \omega_y$ است، یعنی یک بیضی.)

$$F = (1 + \alpha r) K e^{-\alpha r} / r^{\gamma}; \quad (\text{الف}) \quad .۴۷$$

$$L^2 = -mKa(1 + \alpha a)e^{-\alpha a}, \quad E = (1 - \alpha a)Ke^{-\alpha a} / \gamma a; \quad (\text{ت})$$

$$\tau_c = 2\pi [-K(1 + \alpha a)]e^{-\alpha a} / m a^{\gamma}]^{-1/2}, \quad (\text{ث})$$

$$\tau_r = 2\pi [-K(1 + \alpha a - \alpha^2 a^2)]e^{-\alpha a} / m a^{\gamma}]^{-1/2}.$$

[حرکت دایره‌ای شکل پایدار در صورتی که $\alpha a \geq \frac{1}{\gamma}(1 + \sqrt{\delta})$ غیرممکن است.]

$$۱/۲ \times ۱۰^{-۷} \text{ gm-m}^{-۳}, \quad (\text{ب}) \text{ در جهت مخالف}, \quad .۴۹$$

۵۱. (پ) بیضی در هر دوران به اندازه $2\pi(1 - \alpha)/\alpha$ رادیان حرکت تقدیمی انجام می‌دهد، این

حرکت اگر $\alpha < ۱$ هم جهت $\dot{\theta}$ و اگر $\alpha > ۱$ مخالف جهت $\dot{\theta}$ است که در آن $\alpha^2 = 1 + (mK^2/L^2)$.

$$۱۳۰۱ \text{ km} \quad .۵۳$$

$$\omega_p \doteq \frac{\gamma}{\delta} \eta (R/r)^{\gamma} (MG/r^3)^{1/2} \text{ و } ۰/۸۸ \text{ درجه بر دوران} \quad .۵۵$$

$$\omega_p \doteq \frac{1}{\gamma} k^{2/\gamma} m^{-2/\gamma} r^{-5/\gamma} c^{-2} \quad .۵۷$$

$$۲/۸ \text{ kms}^{-1}, \quad ۱۲/۳ \text{ kms}^{-1} \quad .۵۹$$

$$v_1 = (2\pi r_1 / Y_1) \{ [2r_1 / (r_1 + r_2)]^{1/2} - 1 \}, \quad .۶۱$$

$$v_2 = (2\pi r_2 / Y_2) (r_1 / r_2)^{1/2} \{ [2r_1 / (r_1 + r_2)]^{1/2} - 1 \}.$$

مریخ: ۶۷۰۰ mi hr^{-1} ; زهره: -۵۷۰۰ mi hr^{-1}

$$a^{\gamma} = gR^{\gamma} \tau^2 / 4\pi^2 \text{ و } \dot{\theta} \text{ می‌نیم} \quad .۶۳$$

$\lambda, \epsilon = (\lambda - 1)/(\lambda + 1)$ = نسبت ماکزیمم به می‌نیم $\dot{\theta}$ ، (جوابهای ممکن دیگری نیز

وجود دارد.)

$$x = (E_0 / \gamma m \omega^{\gamma}) (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t), \quad .۷۳$$

$$y = (E_0 / \gamma m \omega^{\gamma}) (\gamma \cos \omega t - \gamma + \omega t \sin \omega t),$$

$$z = 0$$

۷۵. (ب) اگر $\dot{z}_s = \dot{\rho}_s = 0, \dot{\phi}_s = -(qB/\gamma mc) \pm [(qB/\gamma mc)^2 - (qa/m\rho_s^2)]^{1/2}$

(ت) $\omega_p = \pm [(qB/\gamma mc)^2 - (qa/\gamma m\rho_s^2)]^{1/2}$

فصل ۴

۳. $\gamma [1 + (M/m)] (gl)^{1/2} \sin \frac{1}{\gamma} \theta$

۵. $\cos^{-1} [1 - 0.293 m_1^2 / (m_1 + m_2)^2]$

۷. ۳۷۱ ثانیه

۹. (سوخت + موشک) $M_1 = 39800 \text{ kgm}, M_2 = 1946 \text{ kgm}$

۱۳. $r = r_s [1 + (\Delta\pi)^{-1} (a^2/r_s^2) (\omega_s - \omega) Y_s]^2, Y_s =$ طول سال فعلی. ۴۹mi

اگر ماه هم منظور شود، کمتر می شود.

۱۷. $m_1 (1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \theta_1) / (1 - \alpha^2), \alpha = \frac{P_{1F}}{P_{1I}}$ θ_1 را اندازه بگیرد.

۲۱. $(1 + \gamma) P_{1F} = (P_{1I} - P_{2I}) \cos \vartheta_1 \pm [(\gamma P_{1I} + P_{2I})^2 - (P_{1I} - P_{2I})^2 \sin^2 \vartheta_1]^{1/2}$

$\gamma = m_2/m_1$

۲۳. $Q = \frac{p_1^2}{\gamma m_1} \left[\frac{(m_1/m_2) \sin^2 \vartheta_2 + (m_1/m_2) \sin^2 \vartheta_1}{\sin^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)} - 1 \right]$

۲۹. $\gamma m V^2 (1 + \gamma + \gamma^2)^{-1} [\gamma - (v/V) (1 + \gamma)^{1/2}]$ که در آن $\gamma = MG/R (v^2 + V^2)$

۳۹. $x_1 = x_2 = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \gamma = b_1/\gamma m_1, \omega_1^2 = -\gamma^2 + (k'_1 + k_2)/m_1$

و $\omega_2^2 = -\gamma^2 + (k'_1 - k_2)/m_1$

۴۱. $x_1 = \frac{(m_2 \omega^2 - k'_2) F_s \cos \omega t}{k_1^2 - (m_1 \omega^2 - k'_1) (m_2 \omega^2 - k'_2)}, x_2 = \frac{k_2 F_s \cos \omega t}{k_1^2 - (m_1 \omega^2 - k'_1) (m_2 \omega^2 - k'_2)}$

فصل ۵

۵. دور $\omega^2 k^2 (1 + \mu^2)^{1/2} / 4\pi m g a$

۷. $\theta = \theta_s + (N_s/b)t + [\alpha N_s / (I^2 \omega_s^2 + b^2 \omega_s)] [b \sin \omega_s t - I \omega_s \cos \omega_s t]$

۱۱. (الف) 60° بالای خط افقی:

(ب) $\frac{1}{3} \pi (l/g)^{1/2}$ ، در مقایسه با $\frac{1}{3} \pi (l/g)^{1/2}$

$$g = [4\pi^2 (h + h') / \tau^2] [1 + 2h' \delta / (h - h')] \quad .13$$

$$x_G = 0, y_G = -2a/9\pi; I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Gy} = 3\pi a^2 \sigma / 8, I_{Oz} = 3\pi a^2 \sigma / 4, \quad .15$$

$$I_{Gz} = (81\pi^2 - 32) a^2 \sigma / 108\pi, I_{Gx} = (81\pi^2 - 64) a^2 \sigma / 216\pi$$

$$2112 \rho c m^5, 2491 \rho c m^5, 1169 \rho c m^5 \quad .17$$

$$.19 \quad 30 \text{ يارد}$$

$$.23 \quad \frac{5}{36} Ml^2 \text{ (ب)}; I \sin(\alpha\sqrt{3}) \text{ (الف)}$$

.25 $27\sqrt{2} \text{ kgm-wt}$ ، بر نقطه‌ای واقع بر روی امتداد ضلع سوم و به فاصله 0.75 متر از گوشه، وارد می‌شود. جهت نیروی ضد متوجه عبارت است از 135° از نیروی 3-kgm-wt در جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

.27 (الف) $F_c = (0, -3\text{lb}, -8\text{lb})$ در مرکز، و $F_c = (0, -6\text{lb}, -14\text{lb})$ در گوشه جلویی $-F_c$ و محور z قائم و مبدأ در مرکز مکعب فرض می‌شود.)
 و F_c در گوشه عقبی مجاور (جهت محور x به طرف خارج و محور y افقی و به طرف راست و محور z قائم و مبدأ در مرکز مکعب فرض می‌شود.)

(ب) $F_1 = (0, 0, 2\text{lb})$ در مرکز، و $F_2 = (0, -6\text{lb}, -16\text{lb})$ در مرکز وجه جلویی (جوابهای صحیح دیگری نیز وجود دارد).

(پ) F_c (قسمت الف) در نقطه $(65/116\text{ft}, 0, 0)$ ، $(9/58\text{lb-ft}, 21/58\text{lb-ft})$ ، $N = (0, 9/58\text{lb-ft}, 21/58\text{lb-ft})$

$$\beta_{opt} = \frac{1}{4} \alpha, \quad \alpha_{opt} = 60^\circ \quad .29$$

$$A = (100W/Y) e^{100wz/Y} \quad .31$$

.33 (الف) C ، 8 فوت از A در جهت $22^\circ 50'$ زیر خط افقی قرار دارد، 463lb-wt ، 235lb-wt

(ب) C ، $8/283$ فوت از A در جهت $28^\circ 45'$ زیر خط افقی قرار دارد، $223/4\text{lb-wt}$

$$.428/7\text{lb-wt}$$

$$y = w(x^2 - \frac{1}{4}D^2)(4\tau^2 - w^2D^2)^{-1/2} \quad .35$$

$$L = \sqrt{3}l, \quad \frac{2WL^2}{Yl^3}, \quad \frac{2WL^2}{Yl^3} \quad .37$$

$$-\rho L^3 / 192Y(b^2 + a^2) - \rho L^3 / 8n \quad .39$$

$$1/55 \times 10^5 \text{ lb in}^{-2} \quad .41$$

$$p = p_0 (1 - \alpha z)^{Mg/RT}, \quad T = T_0 (1 - \alpha z) \quad .43$$

فصل ۶

$$x = aa [\alpha^2 + (1 - \alpha)^2 (a^2/b^2)]^{-2/3}, \quad y = (1 - \alpha)b [(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 (b^2/a^2)]^{-2/3} \quad .3$$

$$g = -(MG/r^2)(r/r), (r \geq a), = -(MGr/a^2), (r \leq a), \quad ۵$$

$$G = (MG/r), (r \geq a) = (MG/\gamma a^2)(\gamma a^2 - r^2), (r \leq a).$$

$$M = \int_0^\infty \frac{4\pi A p r^2}{RT} dr \quad \text{ضرایب دلخواه به وسیله } T \frac{d}{dr} \left(\frac{R^2 T r^2}{A^2 p} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi r^2 G p \quad ۹$$

تعیین می شوند ($r \rightarrow \infty$ وقتی $p \rightarrow 0$). A وزن مولکولی است.

$$p = \frac{M^2 G}{4\pi a^2} \left[\ln \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2} \right) - \frac{a^2}{2(r^2 + a^2)^2} - \frac{a^2}{r^2 + a^2} \right], \quad ۱۱$$

$$T = \frac{AMGr}{2a^2 R} \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{a^2} \right] \ln \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2} \right) - \frac{3}{2} - \frac{r^2}{a^2} \right].$$

$$g - g_0 = -\frac{3}{4}(MG/a^2) \quad (\text{ب}) \quad ; \quad g - g_0 = (MG/a^2)(2 - \sqrt{2}) \quad (\text{الف}) \quad ۱۳$$

$$; (MG/r) + (MGa^2/4r^2)(1 - 3\cos^2\theta) \quad (\text{الف}) \quad ۱۵$$

$$g_r = (MG/r^2) - (3MGA^2/4r^2)(1 - 3\cos^2\theta) \quad (\text{ب})$$

$$g_\theta = (3MGA^2/4r^2) \sin^2\theta.$$

$$۱۹. \quad (\text{الف}) \quad 2\pi\sigma G, \quad \text{به قسمت لایه. (ب) مقدار آن نصف میدان بیرون پوسته است.}$$

فصل ۷

$$ma^* = -bv^* - bgt \quad (\text{ب}) \quad ۱.$$

$$۵. \quad \omega = \text{سرعت زاویه ای دوران زمین, } \theta = \text{عرض جغرافیایی متمم؛}$$

$$\text{تقریباً } 0.10003 \text{ lb in}^{-2} \text{ mile}^{-1}$$

$$۷. \quad (\text{الف}) \quad \text{به سمت شرق } 2m\omega g t \sin\theta; \quad (\text{ب}) \quad (\lambda\omega^2 h^3/9g)^{1/2} \sin\theta.$$

$$۹. \quad \text{رادیان } 5/25 \times 10^{-2}$$

$$۱۳. \quad \omega = (k/m)^{1/2}; \quad \text{در دستگاه دوران کننده, } m \text{ با سرعت زاویه ای } 2\omega - \text{روی دایره ای با شعاع}$$

و مرکز دلخواه حرکت می کند.

$$۱۷. \quad \omega = 0.173 \times 10^6 \text{ radians sec}^{-1}, \quad \text{اگر الکترون در جهت مثبت نسبت به } B \text{ حرکت دایره ای می کند،}$$

ω را کم کنید و گرنه ω را زیاد کنید.

$$۲۱. \quad (2MG)^{1/2} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{a-R} - \frac{2}{a} + \frac{(a-2R)^2}{4a^3} \right]^{1/2}$$

فصل ۸

$$۱. \quad u = A \sin(n\pi x/\lambda l) \cos(n\pi ct/\lambda l) + B \sin(n\pi x/\lambda l) \sin(n\pi ct/\lambda l),$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

$$u = \frac{\gamma l}{\omega \pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi ct}{l} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi ct}{l} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{l} \cos \frac{5\pi ct}{l} - \dots \right) \quad ۳$$

$$u = A \sin \omega t (\cos kx - \text{ctn} k l \sin kx), k = \omega / c \quad ۵$$

$$u = A e^{-bt/\gamma\sigma} \sin(n\pi x/l) \cos \{[(n^2 \pi^2 c^2 / l^2) - (b^2 / \gamma\sigma^2)]^{1/2} t + \theta\} \quad ۷$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\left(b \frac{\partial u}{\partial t} = -\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}; g(\eta) = \frac{\tau - bc}{\tau + bc} f(\xi), \xi = -\eta \quad ۹$$

$$۱۱. u = f(x - ct) + g(x + ct), \text{ که در آن } g(\xi) = f(\xi) = \text{تابعی است که به وسیله وصل کردن}$$

$$\text{نقاط } \xi = (n + \frac{1}{4})l \text{ و } f = (-1)^n l / \gamma\sigma \text{ با خطوط مستقیم به دست آمده است.}$$

$$۱۷. u = (RT/M) \ln(p/p_0)$$

$$v^2 - v^2 + (\gamma RT/M) \ln(vS/v_0 S_0) = \gamma gh \text{ معادله } \gamma$$

$$p = p_0 v_0 S_0 / vS$$

$$۱۹. v = -(a/r^2) \hat{r}$$

$$۲۳. v_x = -(\pi A / \omega \rho_0 L_x) \sin(\pi x / L_x) \cos(m\pi y / L_y) \sin(k_z z - \omega t),$$

$$v_y = -(m\pi A / \omega \rho_0 L_y) \cos(\pi x / L_x) \sin(m\pi y / L_y) \sin(k_z z - \omega t),$$

$$v_z = -(k_z A / \omega \rho_0) \cos(\pi x / L_x) \cos(m\pi y / L_y) \cos(k_z z - \omega t).$$

$$۲۵. A \cos(\pi x / L_x) \cos(m\pi y / L_y) \cos(k_z z + \omega t)$$

$$۲۷. v_g = \left(\frac{\tau h}{m} \right)^{1/2} \cos \frac{kh}{\gamma}, c = \left(\frac{\tau h}{m} \right)^{1/2} \frac{\gamma}{kh} \sin \frac{kh}{\gamma}$$

$$۲۹. v = (\gamma I / \gamma \rho l^2) (l^2 - \gamma x^2), dp/dz = \gamma \eta I / \rho l^2,$$

که در آن x فاصله صفحه واسطی مابین دو دیوار است.

فصل ۹

$$۱. T = \frac{1}{\gamma} m a^2 (\dot{w}^2 \cos^2 \xi + \dot{u}^2 \sin^2 \xi) \exp(\gamma w \cos^2 \xi + \gamma u \sin^2 \xi),$$

$$Q_u = a \sin \xi (F_r \sin \xi - F_\theta \cos \xi) \exp(w \cos^2 \xi + u \sin^2 \xi),$$

$$Q_w = a \cos \xi (F_r \cos \xi + F_\theta \sin \xi) \exp(w \cos^2 \xi + u \sin^2 \xi);$$

$$Q_u = -\gamma m \dot{s}^2 \sin^2 \xi, Q_w = -m \dot{s}^2 \cos^2 \xi.$$

$$۳. T = \frac{1}{\gamma} m (f+h) \left(\frac{\dot{f}^2}{f} + \frac{\dot{h}^2}{h} \right), P_f = \frac{m(f+h)}{f} \dot{f}, \text{ (الف)}$$

$$P_h = \frac{m(f+h)}{f} \dot{h}.$$

$$Q_r' = F_r' = mr\omega' \sin^2\theta + \gamma mr\omega \dot{\varphi} \sin^2\theta, \quad (ب) .5$$

$$Q_\theta' = r F_\theta' = mr^2\omega' \sin\theta \cos\theta + \gamma mr^2\omega \dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta,$$

$$Q_\varphi' = r \sin\theta F_\varphi' = -\gamma mr^2\dot{\omega} \sin^2\theta - \gamma mr^2\omega \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta.$$

$$\omega' = [\gamma g/\mu(l_1 + l_2)][1 \pm (1 - \mu)^{1/2}], \quad \mu = [m_1/(m_1 + m_2)][\gamma l_1 l_2 / (l_1 + l_2)^2] .11$$

$$\theta \doteq [a\omega' / (g - l\omega')] \cos \omega t \quad (ب) .15$$

$$\cos \theta_1 = \gamma E / \gamma mgR \quad \text{اگر } p_\varphi' < \frac{\gamma}{3} mR^2 E - \lambda E^2 / \gamma \sqrt{mg} \quad .17$$

ریخت.

$$z = \gamma l - \gamma(m + M)g / (m\omega'), \quad (ب) .19$$

$$\omega_z' = (m + M)g \sin^2\theta / (m + \gamma M \sin^2\theta) l \cos\theta,$$

$$\cos\theta = l - (z/\gamma l) \quad \text{که در آن}$$

$$U = -\frac{1}{\gamma} m\omega' (x' + y') - m\omega (xy - yx) \quad (ب) .21$$

$$= -\frac{1}{\gamma} m\omega' r' \sin^2\theta - m\omega r' \dot{\varphi} \sin^2\theta.$$

$$H = c \left[m'c' + \left(p_x - \frac{q}{c} A_x \right)' + \left(p_y - \frac{q}{c} A_y \right)' + \left(p_z - \frac{q}{c} A_z \right)' \right]^{1/2} + q\phi .29$$

$$H = \frac{p_x' + p_y' + p_z'}{\gamma(m_1 + m_2)} + \frac{p_r'}{\gamma\mu} + \frac{p_\theta'}{\gamma\mu r'} + \frac{p_\varphi'}{\gamma\mu r' \sin^2\theta} - (m_1 + m_2)gZ - \frac{m_1 m_2 G}{r} , 31$$

$$V_z = -(m_1 + m_2)gZ, \quad V_r = \frac{p_\theta'}{\gamma\mu r'} + \frac{p_\varphi'}{\gamma\mu r' \sin^2\theta} - \frac{m_1 m_2 G}{r} .$$

فصل ۱۰

$$T'_{11} = -40, \quad T'_{12} = 15, \quad T'_{13} = 35\sqrt{2}, \quad .5$$

$$T'_{22} = 10, \quad T'_{23} = 15\sqrt{2}, \quad T'_{33} = 40.$$

$$T'_1 = 4, \quad T'_2 = 10, \quad T'_3 = -8, \quad \hat{e}'_1 = (\sqrt{3}\hat{e}_1 + \sqrt{2}\hat{e}_2 - \hat{e}_3)/\sqrt{6} .13$$

$$\hat{e}'_2 = (-\sqrt{3}\hat{e}_1 + \sqrt{2}\hat{e}_2 - \hat{e}_3)/\sqrt{6}, \quad \hat{e}'_3 = (\hat{e}_2 + \sqrt{2}\hat{e}_3)/\sqrt{3}.$$

$$\text{مقادیر مشخص } +1, e^{\pm i\alpha}; \cos\alpha = \frac{1}{\gamma} (\cos\psi + \cos\theta + \cos\psi \cos\theta) .21$$

$$I = (5/36) M l^2 \mathbf{1}, \quad M = 6m .23$$

$$\bullet / 15 m h^2 \sin^2\alpha (\phi + \tan^2\alpha) .25$$

$$I_{xx} = \frac{M}{12} \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + c^2 \right), \quad I_{xy} = \frac{M}{12} \left(\frac{ab^2 - a^2b}{a^2 + b^2} \right), \quad .27$$

$$I_{xx} = 0, \quad I_{yy} = \frac{M}{12} \left(\frac{\gamma a^2 b^2}{a^2 + b^2} + c^2 \right), \quad I_{yz} = 0, \quad I_{zz} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2).$$

۲۹. (الف) $I_1 = mb^2 / 12, I_y = ma^2 / 12, I_z = m(a^2 + b^2) / 12; \hat{e}_1 \parallel a, \hat{e}_2 \parallel b$

(ب) $I_1 = \frac{1}{6} ma^2 + \left(\frac{16}{15} - \frac{\sqrt{3}}{5} \right) mb^2, I_y = \frac{3}{4} ma^2 + \left(\frac{29}{60} - \frac{\sqrt{3}}{5} \right) mb^2,$

$I_z = \frac{11}{12} ma^2 + \frac{1}{4} mb^2; (\hat{e}_z \text{ قائم}).$

$(w^x + h^x)x^x + (h^y + l^y)y^y + (l^z + w^z)z^z = \Delta a^x / M$ ۳۱

$P = [p_x - (\Delta pz / l)] \hat{i} + (r \Delta p / 2l) (\hat{p} \hat{z} + \hat{z} \hat{p})$ ۳۷

(پ) $2\eta |(\nabla v)_{\text{is}}|^2 + \eta' (\nabla \cdot v)^2$ ۳۹

$= \left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right) \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 - \left(\frac{4}{3} \eta - 2\eta' \right) \sum_{i>j} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$

$+ \eta \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - 2\eta \sum_{i>j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i},$

که در آن

$|T|^2 = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij}^2,$

$P = c_1 \hat{z} \hat{z} \frac{\partial \xi}{\partial z} + c_2 \left(\hat{z} \frac{\partial \rho_{\perp}}{\partial z} + \frac{\partial \rho_{\perp}}{\partial z} \hat{z} \right) + c_3 (\hat{z} \nabla_{\perp} \xi + \nabla_{\perp} \xi \hat{z})$ ۴۱

$+ c_4 [\nabla_{\perp} \rho_{\perp} + (\nabla_{\perp} \rho_{\perp})^T] + \frac{1}{\gamma} (c_5 - c_6) \nabla_{\perp} \cdot \rho_{\perp} (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}),$

که در آن z محور تقارن است، و

$\nabla_{\perp} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}, \rho_{\perp} = \hat{x} \xi + \hat{y} \eta.$

فصل ۱۱

$\omega_r = N_r(t + t_0) / I_r, \omega_1 = \omega_1 \cos[\alpha(t + t_0)^2] - \omega_r \sin[\alpha(t + t_0)^2], \Delta$

$\omega_r = \omega_1 \sin[\alpha(t + t_0)^2] + \omega_r \cos[\alpha(t + t_0)^2],$

$\alpha = N_r (I_r - I_1) / (2I_r I_1), t_0 = \omega_r I_r / N_r.$

۹

$\cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi$	$\cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi$	$\sin \psi \sin \theta$
$-\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi$	$-\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi$	$\cos \psi \sin \theta$
$\sin \theta \sin \phi$	$-\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta$

$L = \frac{\Delta}{\gamma} Ma^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\Delta}{\gamma} Ma^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\gamma} Ma^2 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$ ۱۳
 $+ \frac{3}{\lambda} Ma^2 (\dot{\psi}' + \dot{\phi}' \cos \theta)^2 - \frac{1V}{14} Mag \cos \theta,$

که در آن ψ و ψ' به ترتیب به قرص و حلقه‌ها مربوط می‌شوند. سرعت‌های زاویه‌ای ω_p و ω'_p قرص و حلقه‌ها به طور جداگانه ثابت‌اند. حرکت تقدیمی و ترقصی همانند که در فرفره بخش ۱۱-۵ دیدیم ولی به عوض P_ψ باید $P'_\psi + P_\psi$ و به عوض I_1 باید $\frac{5}{4}Ma^2$ و به عوض I_p باید $\frac{1}{4}Ma^2$ و به عوض ω_p باید $\omega'_p + \frac{a}{r}\omega_p$ را قرار داد.

۱۵. فرفره بعد از $\theta_1 / (2\pi\mu)$ دور چرخش تقدیمی در زمان $t \doteq (r^2 \omega_p \theta_1) / \mu gl$ بلند می‌شود. مرکز جرم در دایره‌ای به شعاع $(gl^2 / \mu \omega_p^2)^{1/3}$ با سرعت زاویه‌ای $gl / r^2 \omega_p$ حرکت می‌کند و به اندازه 90° با حرکت تقدیمی اختلاف فاز دارد. فرفره بعد از $t \doteq (r^2 \omega_p) / (2\mu ga)$ شروع به لنگیدن می‌کند.

$$L = \frac{1}{4} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} I_1 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{4} I_p (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + \frac{1}{4} (M+m) (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2) - (M+m) M' G / r - m M' G a^2 / (4r^3) [1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 (\phi - \alpha)]. \quad 17$$

$$M = 6/0 \times 10^3 \text{ kgm}, \quad m = 1/6 \times 10^3 \text{ kgm}, \quad a = 6400 \text{ km}, \quad \text{سال } 24000. \quad 19$$

$$(2\pi)^{-1} [(\omega_p \cos \theta_1) (I_p \omega_p - I_1 \omega_p \cos \theta_1) / I_1]^{1/2}. \quad 23$$

فصل ۱۲

$$x_1 = \kappa^2 [m_1 S \Delta \omega^2]^{-1/2} q_1 - \frac{1}{\gamma} [m_1 S / \Delta \omega^2]^{-1/2} q_2 \quad 1$$

$$x_2 = \frac{1}{\gamma} [m_2 S / \Delta \omega^2]^{-1/2} q_1 + \kappa^2 [m_2 S \Delta \omega^2]^{-1/2} q_2$$

$$S = \frac{1}{\gamma} \Delta \omega^2 + \frac{1}{\gamma} (\omega_1^2 - \omega_2^2), \quad \text{علائم بخش (۴-۱۰)}$$

$$\omega_j^2 = \frac{\Delta V_j}{m a^2} e^{-\gamma V_j}, \quad \frac{V_j}{\gamma m a^2} e^{-\gamma V_j} (13 + \sqrt{13}), \quad \frac{V_j}{\gamma m a^2} e^{-\gamma V_j} (13 - \sqrt{13}). \quad 3$$

$$x_1 = a + A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad 5$$

$$x_2 = a + A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2),$$

$$y_1 = A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3),$$

$$y_2 = -A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3),$$

$$z_1 = A_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3) + A_4 \cos(\omega_4 t + \theta_4),$$

$$z_2 = -A_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3) + A_4 \cos(\omega_4 t + \theta_4),$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2 = k/m, \quad \omega_4^2 = k(l + 6a) / (l + 2a),$$

$$\omega_5^2 = \omega_6^2 = kl / m(l + 2a),$$

که در آن (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) به ترتیب از A و B اندازه‌گیری می‌شوند. محور x به موازات \overline{AB} است و a ریشه مثبت $ka(l + 2a)^2 - q^2 = 0$ است.

۷. هر دو یون به موازات میدان الکتریکی با دامنه $(\omega_1^2 - \omega^2) / (qE_0/m)$ به طور هم فاز نوسان می کنند.

$$x_k^* = \Delta_k' / \Delta. \quad .11$$

که در آن $\Delta_0 = |K_{lm}^*|$ و Δ_k همان Δ است به شرطی که به عوض K_{lk}^* از $(\partial V' / \partial x_l)$ استفاده شود

$$K_{lk}^* = \left(\frac{\partial^2 V'}{\partial x_k \partial x_l} \right) + \sum_m \frac{\Delta_m'}{\Delta_0} \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m} \right).$$

$$W_1^* = W_{11}^* + \sum_{r=2}^f \frac{W_{1r}^* W_{r1}^*}{W_1^* - W_r^*} + \sum_{r,l=2}^f \frac{W_{1r}^* W_{rl}^* W_{l1}^*}{(W_1^* - W_r^*)(W_1^* - W_l^*)} \quad .13$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \left(1 + \frac{m}{M} \right), \quad \omega_2^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \frac{g}{l} \left[1 - (\sqrt{2}+1) \frac{m}{M} \right], \quad .15$$

$$\omega_3^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \frac{g}{l} \left[1 + (\sqrt{2}-1) \frac{m}{M} \right].$$

$$x_1 = x_p = (1 + \sqrt{\delta}) A \cos(\omega_1 t + \theta), \quad x_2 = x_q = -2A \cos(\omega_1 t + \theta), \quad .17$$

$$\omega_1 = [k(\gamma + \sqrt{\delta}) / \gamma m]^{1/2};$$

$$x_1 = -x_p = [(1 + \sqrt{\delta}) + \gamma(k' / k\sqrt{\delta})] A \cos(\omega_2 t + \theta),$$

$$x_2 = -x_q = -[\gamma - \gamma(1 + \sqrt{\delta})(k' / k\sqrt{\delta})] A \cos(\omega_2 t + \theta),$$

$$\omega_2 = \omega_1 [1 + (\gamma k' / k) / (\gamma + \sqrt{\delta})];$$

$$x_1 = x_p = \gamma A \cos(\omega_3 t + \theta), \quad x_2 = x_q = (1 + \sqrt{\delta}) A \cos(\omega_3 t + \theta),$$

$$\omega_3 = [k(\gamma - \sqrt{\delta}) / \gamma m]^{1/2};$$

$$x_1 = -x_p = [\gamma + (1 + \sqrt{\delta})(k' / k\sqrt{\delta})] A \cos(\omega_4 t + \theta),$$

$$x_2 = -x_q = [(1 + \sqrt{\delta}) - \gamma(k' / k\sqrt{\delta})] A \cos(\omega_4 t + \theta),$$

$$\omega_4 = \omega_3 [1 + (\gamma k' / k) / (\gamma - \sqrt{\delta})].$$

بنا به تقارن، وجوه ۱ و ۳ درست همانند جوابهای فوق برای هر k' اند. بنابراین دو ریشه ω_1 و ω_3 معلوم اند و از معادله ویژه می توان فاکتورگیری کرد.

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^2}{4} \frac{\pi}{l^2 \sigma_0} \left[1 - \frac{\lambda a}{3\pi \sigma_0} + \frac{64a^2}{9\pi^2 \sigma_0} + \frac{64a^2}{\pi^2 \sigma_0} \sum_{j=2,5,7,\dots} \frac{1}{j^2(j-1)(j^2-4)} \right] \quad .19$$

$$u = A \cos(\omega_1 t + \theta) \left[\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{\lambda a}{\pi \sigma_0} \sum_{j=2,5,7,\dots} \frac{j^{1/2}}{(j-1)(j^2-4)} \right].$$

۲۱. حرکات پایدار: $z = 0, r = r_0, \dot{\theta} = \omega$.

(مختصات استوانه‌ای با $+Ze$ در $z = \pm a$ و $r = 0$)

ارتعاشات طبیعی: $r = r_0 + A \cos(\omega_1 t + \theta), z = 0, r = 0, z = A \cos(\omega_2 t + \theta)$

در صورتی که $r > \sqrt{2}a$ وگرنه ناپایدار است.

$$\omega_1^2 = \frac{Ze^2}{ma^2} \left(1 + \frac{r_0^2}{a^2}\right)^{-3/2}, \quad \omega_2^2 = \omega_1^2 \left(\frac{r_0^2}{a^2} + 2\right) / \left(\frac{r_0^2}{a^2} + 1\right),$$

$$\omega_3^2 = \omega_1^2 \left(\frac{r_0^2}{a^2} - 2\right) / \left(\frac{r_0^2}{a^2} + 1\right).$$

۲۳. حرکات پایدار:

$$r = r_0, \theta = \theta_0, \ddot{\alpha} = Mg/(mr_0 \cos \theta_0), \dot{\phi}^2 = g/[(l - r_0) \cos \theta_0]$$

$$\omega^2 = \dot{\phi}^2 (A \pm B), \quad A = \frac{3M}{M+m} \left(\frac{l}{r_0} - \cos^2 \theta_0\right) + 1 + 3 \cos^2 \theta_0,$$

$$B^2 = A^2 + \frac{3M}{M+m} \left[3 \cos^2 \theta_0 - \frac{l}{r_0} (1 - 3 \cos^2 \theta_0)\right].$$

[وجه پایین ناپایدار است اگر $\cos^2 \theta_0 < \frac{1}{3}$ و $r_0 < \frac{1}{3}l(\sec^2 \theta_0 - 3)$ باشد.]

۲۵. حرکات پایدار: ثابت $\omega_\varphi = 0, \phi = 0, \theta = \theta_0$

ارتعاشات طبیعی: $\theta = \theta_0 + A\lambda\omega_\varphi \cos(\omega t + \beta),$

$$\phi = (\omega/\sin \theta_0) A \sin(\omega t + \beta), \quad \omega^2 = \lambda^2 \omega_\varphi^2 + (\omega_\varphi^2/\sin^2 \theta_0), \quad \lambda = I_\varphi/I_1;$$

(وجه ناپایدار با $\omega_\varphi = 0$) $\theta = \theta_0 + A + (\omega_\varphi^2 B t / \lambda \omega_\varphi \sin \theta_0), \phi = B,$

۲۷. حرکات پایدار: $r = r_0, \alpha = \pi$ وجه همیشه ناپایدار؛

$r = r_0, \alpha = 0$ وقتی امکان پذیر است که $l < 3r_0$ ، هر دو وجه همیشه پایدارند.

۳۳. $X_1 = X_\varphi = 0, E_1 = E_\varphi = A$ حدس بزنید که $x_1 = x_\varphi = B$ و $\varepsilon_1 = \varepsilon_\varphi = \dot{\alpha}t$ ؛ اگر

$\alpha = -3\omega B/2a$ باشد توافق دارد.

فصل ۱۳

۳. یک میکروثانیه بعد از b فرستاده می‌شود.

فصل ۱۴

۱۱. (الف) $p_x = -305 \text{ MeV}/c, p_y = -145 \text{ MeV}/c, p_z = -553 \text{ MeV}/c$

که در آن دسته اشعه تابنده در جهت محور x است.

(ب) $260 \text{ MeV}, p_x = -205 \text{ MeV}/c, p_y = 0, p_z = -653 \text{ MeV}/c$

$$S = (m_a^{\gamma} + m_c^{\gamma})c^{\gamma} - \gamma E_a E_c / c^{\gamma} + \gamma p_a p_c \cos \theta_{ac} \quad .19$$

$$[p = (E^{\gamma} - m^{\gamma}c^{\gamma})^{1/2}/c]$$

$$ct = \int \{1 - [1 + (T - \frac{1}{\gamma} kx^{\gamma})/mc^{\gamma}]^{-\gamma}\}^{-1/2} dx, \quad T = E - mc^{\gamma} \quad .29$$

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{\gamma T}{\gamma mc^{\gamma}}\right) + \dots\right],$$

$$x = \left(\frac{\gamma T}{k}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\gamma T}{\gamma mc^{\gamma}}\right) \sin(\omega t + \theta) - \left(\frac{\gamma T}{k}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma T}{\gamma mc^{\gamma}}\right) \sin^3(\omega t + \theta) + \dots$$

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad V = -mc^{\gamma} [1 - \omega^{\gamma} (A^{\gamma} - x^{\gamma})/c^{\gamma}]^{-1/2} \quad .31$$

$$V = c [1 - (1 - \alpha)^{\gamma}]^{1/2} \quad (\text{پ}) \quad .39$$

۴۱. در معادله (۸۳-۱۴) به جای dA ، F را قرار دهید.

۴۹. شش تا از رده دو، چهار تا از رده سه، یکی از رده چهار.

کلید علائم

اگرچه صورت زیر کامل نیست ولی شامل علائم مهم و علائمی است که ممکن است باعث ابهام شوند به طور کلی علائم ریاضی معمول، و علائمی که به مفهوم خاصی فقط یک مرتبه به کار رفته‌اند، حذف شده‌اند. برای سهولت مراجعه، صفحه‌ای که در آن علامتی برای اولین بار ظاهر شده است، بلافاصله تعریف آن علامت، داده شده است. وقتی استفاده از یک علامت به مفهوم خاصی به یک یا دو بخش یا فصل منجر است، این مطالب را بعد از تعریف علامت، به وسیله شماره بخش یا فصل در پرانتز مشخص کرده‌ایم.

کمیت‌های اسکالر (شمارواره‌ای) در کتاب با حروف مایل نمایش داده شده‌اند. از فصل ۳ به بعد، کمیت‌های برداری به وسیله حروف مایل سیاه مشخص شده است. یک حرف مایل برای اندازه بردار به وسیله همان حرف ولی سیاه ارائه شده است. حروف مایلی که دارای اندیس‌اند برای مشخص کردن مؤلفه‌های بردار به کار رفته‌اند به وسیله همان حروف ولی سیاه ارائه شده‌اند. علامت « $\hat{\quad}$ » روی بردار، برداری به طول واحد را مشخص می‌کند. به علامت « $\hat{\quad}$ » روی مؤلفه (سیاه) برداری واحد را در جهتی مشخص می‌کند که مؤلفه افزایش پیدا می‌کند. در فصل دوم، از حروف رومی برای کمیت‌های مختلط استفاده شده است. تانسورها، از فصل ۱۰ به بعد، به وسیله حروف بزرگ ضخیم سیاه و بی‌زائده مشخص شده‌اند. مؤلفه‌های تانسور به وسیله همان حروف مایل و ۲ اندیس مشخص می‌شوند، در حالی که مقادیر مشخص آن به وسیله حروف مایل و زبردار یا یک اندیس، نشان داده می‌شوند. وجود نقطه روی یک حرف نمایشگر مشتق آن نسبت به زمان است. از علامت ' برای کمیت‌هایی استفاده شده است که وابسته به نیروهای کاذب‌اند و در دستگاه مختصات متحرک ظاهر می‌شوند.

حروف لاتین

A دامنه ارتعاش، ۳۲

A مساحت، ۲۲۴

A ضریب ثابت، ۵۹

AA' صفحه عمود بر تیر، ۲۴۱، (بخش ۵-۱۰)

پتانسیل برداری، ۳۸۶ (بخشهای ۹-۸، ۱۲-۷، ۱۴-۶)	A
چهار پتانسیل، ۵۷۳، (فصل ۱۴)	A_{μ}
مختصه تعمیم یافته مقید، ۳۷۱ (بخش ۹-۴)	a
فاصله از کانون تا خط هادی در سهمی، ۱۳۳ (فصل ۳)	a
نیم محور اصلی بیضی یا هذلولی، ۱۳۱ (فصل ۳)	a
شتاب، ۵، ۹۳	a, a
ضرایب تبدیل مختصات، ۴۱۰	a_{ij}
ضرایب تبدیل لورنتس، ۵۳۹	$a_{\mu\nu}$
ضریب حجمی، ۲۳۶ (فصلهای ۵ و ۸)	B
ضریب ثابت، ۴۵	B
القای مغناطیسی، ۱۴۱	B
ثابت نیروی اصطکاک، ۲۸	b
نیم محور کوچک بیضی، ۱۳۱ (فصل ۳)	b
یک منحنی در فضا، ۸۸	C
ضریب ثابت دلخواه، ۴۲	C
تعداد قیود، ۳۷۰ (فصل ۹)	c
سرعت حرکت موج، ۲۹۷ (فصل ۸)	c
سرعت نور، ۲۷	c
کرل، ۱۰۱	curl
ضریب ثابت، ۲۹۸	D
مؤلفه جابه‌جایی الکتریکی، ۲۷ (فصل ۲)	D_x
دترمینان یک تانسور، ۴۱۵	det
دیورژانس، ۱۰۰	div
عنصر سطح، ۱۰۰، ۴۳۱	dS, dS
سطح مقطع پراکندگی، ۱۳۸	$d\sigma$
نموی زمانی مناسب، ۵۲۳	dt
عنصر زاویه فضایی، ۲۶۵	$d\Omega$
مشق زمانی نسبت به دستگاه مختصات ستاره‌دار، ۲۷۴	d^*/dt
انرژی کل، ۳۰	E
انرژی کل کاذب در دستگاه مختصات متحرک، ۲۸۷	' E '
مؤلفه میدان الکتریکی، ۲۵	E_x

دامنه شدت میدان الکتریکی هارمونیک، ۲۵ (فصل ۲)	E .
شدت میدان الکتریکی، ۱۴۱	E
اندازه بار الکتریکی بنیادی، ۲۵	e
بردار یکه (معمولاً با اندیسی که نمایشگر جهت یا محور است)، ۴۰۶	\hat{e}
نیرو، ۷، ۷۷	F, F'
کانونهای بیضی یا هذلولی یا سهمی، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳ (فصلهای ۳ و ۴)	F, F'
دامنه حقیقی نیروی هارمونیک F ، ۵۰	F .
دامنه مختلط نیروی هارمونیک F ، ۵۰	F .
نیروی خارجی کل، ۱۶۱	F
نیروی کل خارجی وارد بر k امین ذره، ۱۶۰	F_k^e
نیروی کل داخلی وارد بر k امین ذره، ۱۶۰	F_k^i
نیروی خارجی وارد بر k امین ذره به وسیله l امین ذره، ۱۶۱	$F_{l \rightarrow k}^i$
تانسور میدان الکترومغناطیسی، ۵۷۵، (بخش ۱۴-۷)	$F_{\mu\nu}$
چهار نیرو، ۵۵۸	\mathcal{F}_μ
تابع دلخواه، ۳۰۲ (بخشهای ۳-۸، ۸-۱۰)	f
نیروی اصطکاک، ۱۶ (فصلهای ۱ و ۹)	f
تعداد درجات آزادی، ۳۷۰	f
نیرو برحسب واحد طول، ۲۳۹، ۲۹۶ (بخشهای ۵-۹، ۸-۱)	f, f'
چگالی نیروی حجمی، ۲۴۸ (فصلهای ۵ و ۸)	f
ضریب ثابت ثقل، ۱۰	G
مرکز جرم یا مرکز ثقل، ۲۱۶	G
پتانسیل ثقل، ۲۶۲	\mathcal{G}
تابع دلخواه، ۳۰۲ (بخش ۳-۸)	g
شتاب ثقل، ۱۰، ۲۳۰	g, g
شدت میدان ثقل، ۲۶۱	g
شدت ثقل مؤثر، ۲۸۰	g_e
ضریب علامت، ۵۳۸ (فصل ۱۴)	g_μ
تانسور متری، ۵۸۴ (بخش ۱۴-۸)	$g_{\mu\nu}$
گرادیان، ۹۸	grad
تابع هامیلتون، ۳۹۳	H
فاصله مرکز جرم تا محور و فاصله مرکز جرم تا مرکز نوسان، ۲۱۶ (بخش ۵-۴)	h, h'
تابع برداری دلخواه، ۳۳۲ (بخش ۸-۱۰)	h

بردار مکانی O^* نسبت به O ، ۲۷۱ (فصلهای ۷ و ۱۳)	h
سیلان جریان، ۳۲۹ (فصل ۸)	I
گشتاور ماند حول محور z ، ۲۱۰	I_z
تانسور ماند، ۴۰۵	I
۴۴، $\sqrt{-1}$	i
ضربه، ۲۱۷	J
چهار جریان، ۵۷۳	J_u
چگالی جریان الکتریکی، ۵۷۱	j
ثابت نیروی مرکزی، ۱۲۸	K
عدد موج زاویه‌ای، ۳۰۲ (فصل ۸)	k
ثابت فنر، ۳۱	k
شعاع چرخش سطح مقطع تیر، ۲۴۵ (بخش ۵-۱۰)	k
شعاع چرخش حول محور z ، ۲۱۰	k_z
نسبت شتاب منفی، ۶ (فصل ۱)	k_{12}
بردار موج، ۳۳۳	k
اندازه حرکت زاویه‌ای، ۱۰۵، ۱۰۶	L, L
تابع لاگرانژ، ۳۶۵	L
طول، ۲۴۶	L
اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه O ، ۱۰۵، ۱۰۶	L_0, L_0
طول، ۱۲	l
طول ساکن شیء، ۵۲۲	l
عدد ماخ، ۳۴۴ (بخشهای ۸-۱۴، ۸-۱۵)	M
جرم، معمولاً جرم کل یک جسم یا دستگاهی از ذرات، ۱۰	M
وزن ملکولی، ۲۵۱ (بخش ۵-۱۱)	M
جرم ناوردا، ۵۵۴ (بخش ۱۴-۳)	M
جرم، معمولاً جرم یک ذره، ۶، جرم ساکن، ۵۴۸	m
گشتاور خمشی، ۲۴۱ (بخش ۵-۱۰)	N
گشتاور-نیرو، ۱۰۶، ۱۰۷	N, N
تعداد کل ذرات، ۱۶۰ (فصلهای ۴ و ۹)	N
گشتاور-نیرو حول نقطه O ، ۸۴، ۸۵	N_0, N_0

ضریب برشی، ۲۳۷ (فصل ۵، بخش ۱۰-۶)	n
بردار یکه عمود بر سطح، به طرف خارج از یک سطح بسته، ۱۰۰	\hat{n}
نقطه‌ای در فضا، معمولاً مبدأ، ۹۱	O
خط گذرنده از مرکزوار سطح مقطع تیر، ۲۴۳ (بخش ۵-۱۰)	OO'
نقاطی در فضا، ۲۲۹	P, P'
توان، ۳۰۳ (فصل ۸)	P
توان در واحد سطح، ۳۳۳ (بخش ۸-۱۰)	P
مؤلفه گشتاور دو قطبی در واحد حجم، ۲۷ (فصل ۲)	P_x
اندازه حرکت خطی کل، ۱۶۱	P
تانسور تنش، ۴۳۲	P
ضریب مختلط در وابستگی نمایی به زمان (e^{pt}) ، ۴۴	p
اندازه حرکت تعمیم یافته (معمولاً با اندیس)، ۳۶۰	p
فشار، ۲۴۸	p
اندازه حرکت خطی، ۸، ۱۰۳	p, p
چهار اندازه حرکت، ۵۴۸	p_μ
فشار اضافی، ۳۱۱ (فصل ۸)	p'
انرژی جذب شده در برخورد غیرالاستیک (ناکشوار)، ۱۸۰ (فصلهای ۴ و ۱۴)	Q
نیروی تعمیم یافته (معمولاً با اندیس)، ۳۶۱	Q
نقطه در فضا، ۱۶۳ (فصل ۴)	Q
چگالی منبع، ۳۲۳ (فصل ۸)	Q
بار الکتریکی، ۸۱	q
مختصات تعمیم یافته (معمولاً با اندیس)، ۳۵۴	q
ضریب گاز، ۲۵۱ (بخش ۵-۱۱)	R
عدد رینولدز، ۳۴۸ (بخش ۸-۱۵)	R
بردار مختصه مرکز جرم، ۱۶۲	R
فواصل از کانونهای بیضی یا هذلولی، ۱۳۱ (فصل ۳)	r, r'
فاصله شعاعی از محور z ، ۲۱۰ (فصل ۵)	r
شعاع، فاصله شعاعی از مبدأ، ۱۷، ۹۳، ۹۷	r
بردار یکه در طول شعاع در مختصات قطبی، ۹۳، در مختصات کروی، ۹۷	\hat{r}
بردار مکان، ۸۳	r
مختصه نسبی، ۱۸۲	r

نقطه شاخص، ۱۱۶	r_s
نقاط برگشت در حرکت ۳، ۱۳۰ (فصل ۳)	r_1, r_2
قسمت حقیقی، ۵۰	Re
نیروی برشی، ۲۴۲ (بخش ۵-۱۰)	S
سطح، مساحت سطح، ۱۰۰ (بجز در فصل ۵)	S
بازه مجذور ناوردا بین دو رویداد، ۵۱۹	S
پارامتر ناوردا در یک برخورد، ۵۵۴ (بخش ۱۴-۳)	S
تانسور تغییر طول نسبی، ۴۳۷	S
فاصله، ۷۷	s, s
پارامتر برخورد، ۱۳۷ (فصل ۳)	s
درجه حرارت مطلق، ۲۵۱، (بخش ۵-۱۱)	T
انرژی جنبشی، ۲۱	T
زمان تناوب تحول، ۱۷ (فصل ۱)	T
زمان تناوب نیروی متناوب، ۶۰ (فصل ۲)	T
پارامتر ناوردا در یک برخورد، ۵۵۴ (بخش ۱۴-۳)	T
جملات مستقل از سرعت در انرژی جنبشی، ۳۵۷ (فصل ۹)	T_0
جملات خطی سرعت در انرژی جنبشی، ۳۵۷ (فصل ۹)	T_1
جملات درجه دوم سرعت در انرژی جنبشی، ۳۵۷ (فصل ۹)	T_2
زمان، ۴	t
تریس، ۴۱۴	tr
تابع x ، y ، و z در جدا کردن متغیرها، ۳۳۵ (فصل ۸)	U
پتانسیل وابسته به سرعت، ۳۸۵ (بخش ۹-۸)	U
چهار سرعت، ۵۴۳	U_μ
ارتفاع نخ در بالای محور افقی، ۲۹۵ (بخشهای ۸-۱ تا ۸-۵)	u
انرژی پتانسیل بر حسب واحد جرم، ۳۲۷ (بخشهای ۸-۸ تا ۸-۱۰)	u
۱/۲ در مدار نیروی مرکزی، ۱۲۶ (فصل ۳)	u
سرعت یک ذره، ۵۲۹ (فصلهای ۱۳ و ۱۴)	u, u
انرژی پتانسیل مؤثر، ۱۲۵	V
انرژی پتانسیل، ۳۰	V
حجم، ۱۰۰	V
سرعت مرکز جرم، ۱۸۴	V

سرعت، ۹۲، ۴	v, v'
سرعت گروه، ۳۴۱ (بخشهای ۸-۱۳، ۱۴-۱)	v_g
سرعت سیال، ۳۱۴ (فصل ۸)	v
سرعت نسبی، ۱۸۴ (فصل ۴)	v
سرعت باد، ۱۱۵	v_w
کار، ۷۷	W
وزن تیر، ۲۴۶ (بخش ۵-۱۰)	W
بار بر روی تیر، ۲۴۶ (بخش ۵-۱۰)	W'
وزن برحسب طول، ۲۳۹ (فصل ۵)	w
تابع x در جدا کردن متغیرها، ۲۹۷ (فصل ۸)	X
مختصه x مرکز جرم، ۱۶۳	X
مختصه قائم، ۴	x
عدد مختلط که قسمت حقیقی آن x است، ۵۱	x
مختصه نقطه معیار، ۳۰	x_g
چهار مختصه، ۵۳۷	x_μ
دامنه مختلط مختصه x نوسان‌کننده هارمونیک، ۵۱	x_0
بردار واحد موازی با محور x ، ۷۵	\hat{x}
تابع y در جدا کردن متغیرها، ۳۳۶ (فصل ۸)	Y
مختصه y مرکز جرم، ۱۶۳	Y
ضریب ارتجاعی الاستیک (کشور)، ۲۳۶ (فصل ۵)	Y
مختصه قائم، ۴	y
بردار واحد موازی با محور y ، ۷۵	\hat{y}
تابع z در جدا کردن متغیرها، ۳۳۶ (فصل ۸)	Z
مختصه z مرکز جرم، ۱۶۳	Z
مختصه قائم، ۴	z
بردار واحد موازی با محور z ، ۷۵	\hat{z}

حروف یونانی

شتاب زاویه‌ای، ۲۱۱ (بخش ۵-۱۲)	α
زاویه مجانب هذلولی، ۱۳۲ (فصل ۳)	α
زاویه فاز برای نوسانهای واداشته، ۵۱ (فصل ۲)	β

β	v/c ، ۵۲۳
γ	ضریب میرایی، ۴۷
γ	نسبت بین گرماهای ویژه، ۳۳۱ (بخش ۸-۱۰)
γ	$(1-\beta^2)^{-1/2}$ ، ۵۲۳
γ_1, γ_2	ضرایب میرایی برای نوسانگر پیش میرا، ۴۸ (فصل ۲)
γ_1, γ_2	ضرایب میرایی برای نوسانگرهای جفت شده، ۱۹۹ (فصل ۴)
Δ	نمو، ۸۶
$\Delta\omega^2$	$\omega_2^2 - \omega_1^2$ برای نوسانگر جفت شده، ۱۹۴
δ	نمو در جابه‌جایی مجازی، ۱۶۲ (فصلهای ۴ و ۹)
δ_{ik}	علامت Kronecker، ۴۱۱
δm	جرم عنصر حجم سیال، ۳۱۶ (فصل ۸)
δt	نمو زمانی کوچک، ۵۸
δV	نمودار انرژی پتانسیل، ۳۶۲ (فصل ۹)
δV	عنصر حجم، ۳۱۴ (فصل ۸)
ε	ضریب خروج از مرکز بیضی یا هذلولی، ۱۳۱، ۱۳۲
ε	ثابت دی‌الکتریک، ۲۶ (فصل ۲)
η	ضریب چسبندگی، ۱۸، ۳۴۶
η	فاز موج، ۳۰۲ (بخش ۸-۳)
Θ	زاویه پراکندگی در مسأله برخورد یک جسم، ۱۳۷
Θ	تابع t در جدا کردن متغیرها، ۲۹۷ (فصل ۸)
θ	زاویه بین ریسمان و افق، ۲۳۹ (بخش ۵-۹، فصل ۸)
θ	زاویه بین دو بردار، ۷۷ (فصل ۳)
θ	زاویه دوران حول محور، ۲۱۰
θ	زاویه برش، ۲۳۷ (بخشهای ۵-۸، ۵-۱۰)
θ	زاویه فاز، ۲۵
θ	زاویه قطبی، مختصات قطبی، ۹۳ و مختصات کروی ۹۷
θ	زاویه اویلر، ۴۵۲
$\hat{\theta}$	بردار واحد در جهت افزایش θ ، مختصات قطبی، ۹۳ و مختصات کروی ۹۷
θ_1	زاویه پراکندگی در مختصات آزمایشگاه، ۱۷۶
$\theta_p, \theta_r, \theta_s$	زاویه‌های برگشت ذرات m_p, m_r, m_s در برخورد، ۱۷۶، ۱۸۰

ثابت جفت شدگی، ۱۹۴ (فصل ۴)	κ
طول موج، ۳۰۲	λ
ضریب اصطکاک لغزشی، ۱۶	μ
جرم کاهش یافته، ۱۸۳	μ
ضریب اصطکاک استاتیکی، ۱۶	μ_s
فرکانس (در ثانیه یا دور در ثانیه)، ۱۴۴	ν
فاز موج، ۳۰۱ (فصل ۸)	ξ
خط گره، ۴۵۲ (فصل ۱۱)	ξ
چگالی، ۵، ۲۰۸	ρ
فاصله شعاعی از محور z ، ۹۵ (فصل ۳، بخش ۱۲-۷)	ρ
بردار واحد شعاعی خارج از محور z ، ۹۵	$\hat{\rho}$
چگالی خطی ریسمان، ۲۹۶ (بخشهای ۸-۱ تا ۸-۵، ۹-۹)	σ
زمان تناوب، ۱۱۰	τ
زمان عادی، ۵۲۳	τ
کشش، ۱۴، ۲۳۹	τ, τ
زاویه سمتی، ۹۵	φ
زاویه خمش تیر، ۲۴۴ (بخش ۵-۱۰)	φ
بردار واحد در جهت افزایش φ ، ۹۵	$\hat{\varphi}$
پتانسیل الکتریکی، ۱۴۲	ϕ
پتانسیل سرعت، ۳۳۲ (بخش ۸-۹)	ϕ
زاویه اوپلر، ۴۵۲	ϕ
زاویه اوپلر، ۴۵۲	ψ
سرعت زاویه‌ای، ۲۸۲	Ω
سرعت زاویه‌ای (رادیان بر ثانیه)، ۳۲	ω
سرعت زاویه‌ای، ۲۱۱، ۲۷۵	ω, ω
فرکانس زاویه‌ای قطع، ۳۰۸	ω_c
فرکانس (زاویه‌ای) طبیعی نوسانگر نامیرا، ۴۴	ω_0
فرکانس (زاویه‌ای) طبیعی نوسانگر میرا، ۴۷ (فصل ۲)	ω_1
فرکانسهای (زاویه‌ای) طبیعی نوسانگرهای جفت نشده، ۱۹۳ (فصل ۴)	ω_{10}, ω_{20}
فرکانسهای (زاویه‌ای) طبیعی نوسانگرهای جفت شده، ۱۹۴ (فصل ۴)	ω_1, ω_2

علائم دیگر

تانسور صفر، ۴۴۰	0
بردار صفر، ۷۹	0
تانسور یکه، ۴۰۴	1
del، اپراتور دل، ۹۹	∇
چهارگرادیان، ۵۴۶ (فصل ۱۴)	\square_{μ}
حاصل ضرب اسکالر \square_{μ} در خودش، ۵۴۷ (فصل ۱۴)	\square^2
حاصل ضرب نقطه‌ای، ۷۷	$A \cdot B$
حاصل ضرب خارجی، ۷۹	$A \times B$
مقدار متوسط، ۵۳	$\langle \rangle_{av}$

اندیسه‌های پایین

مقدار نهایی (بعد از برخورد)، ۱۷۶ (فصل ۴)	F
مقدار اولیه (قبل از برخورد)، ۱۷۶ (فصل ۴)	I
G, O, O', Q مقادیر کمیاب در، یا نسبت به نقطه G, O, O', Q ، و غیره، ۸۳	G, O, O', Q
کمیت وابسته به ذره a, b, c, d ، ۵۵۳ (فصل ۱۴)	a, b, c, d
کمیت وابسته به ذره i, j, k, l, m ، و غیره. $(i, j = 1, 2, \dots)$ ، ۱۶۰ (فصلهای ۴ و ۵)	i, j, k, l, m
و غیره. بردار کمیت و مؤلفه‌های تانسور، ۴۰۶	i, j, k, l
کمیت مربوط به حالت تغییر یا فرکانس نوسان را مشخص می‌کنند، ۵۸	j, k, l, m, n
ماکزیمم مقدار، ۱۱۳، ۱۹	m, \max
می‌نیمم مقدار، ۱۹	\min
	$x, y, z, r, \theta, \varphi, \rho$

و غیره. اندیس بردار، نمایشگر مؤلفه بردار متناظر است، ۴، معمولاً کمیتی را مشخص

می‌کند که وابسته به x, y, z, r ، و غیره باشد. مختصه یا محور، ۱۰۹

\hat{n} مؤلفه در جهت \hat{n} ، ۸۱

مقدار اولیه یا معیار، ۱۳

مقدار نسبی از دستگاه مختصاتی که در آن شیء ساکن است، ۵۲۲

و غیره. نمایشگر مقدار در زمان t_1, t_2, t_3 ، و غیره، ۲۱؛ یا مقادیر در نقاط $0, 1, 2, \dots$

و غیره، ۱۱۵؛ یا کمیات وابسته به ذره شماره ۱، ۲، و غیره، ۱۴؛ یا به سادگی برای

نمره‌گذاری مجموعه‌ای از کمیات به کار می‌رود، ۴۲

نمایشگر t, x, y, z مؤلفه چهار بردار، ۵۳۷
 و غیره. اندیسه‌های پایین چهار بردار، (۳، ۲، ۱، ۰ = v, μ ، و غیره)، ۵۳۷
 μ, v, λ, κ

اندیسه‌های بالا

e خارجی، ۱۶۰

i داخلی، ۱۶۰

t ترانسپوز تانسور، ۴۰۸

$1, 2, \dots, 0, 0^*$

کمیت مربوط به رویداد خاصی که با شماره (۱، ۲، ...) یا برچسب ($O'O^*$) مشخص می‌شود،

۵۳۷، ۵۳۹، (فصل ۱۴)

متغیرهای بی‌بعد، ۳۴۳ (بخشهای ۸-۱۴، ۸-۱۵)

نسبت به دستگاه مختصات زبردار، ۲۱۹

مزدوج مختلط، ۴۴ *

نسبت به یک دستگاه مختصات متحرک، ۲۷۱ *

سرعت نسبی در دستگاه مختصات ساکن، ۵۶۸ •

معکوس تبدیل، ۵۴۰ -۱

واژه‌نامه انگلیسی - فارسی^۱

apex	رأس
aphelion	اوج خورشیدی
apogee	اوج
associative	جمع پذیر
	مت: شرکت پذیر
asteroid	شبه ستاره
beam	تیر
	مت: دسته اشعه
beat	تپیدن
beating	تپش
body force	نیروی حجمی
bound	کرانه
catenary	زنجیری
cavitation	حفره سازی
cavity	حفره
centrifugal	گریز از مرکز
centripetal	روبه مرکز
centroid	شبه مرکز
colatitude	متمم عرض جغرافیایی
collision	برخورد
commutative	نقل پذیر
compressibility	تراکم پذیری

۱. این واژه‌نامه واژه‌های به کار رفته در فصل ۱ تا ۱۲ است. در فصلهای ۱۳ و ۱۴ برخی معادله‌ها از واژه‌نامه فیزیک مرکز نشر دانشگاهی اخذ شده است.

compressible	تراکم پذیر
compression	تراکم
conservative force	نیروی کنسرواتیو
constraint	مت: نیروی ابقایی
cornerstone	قید
couple	سنگ بنا
coupled	جفت نیرو
coupling	جفت شده
critical damping	جفت شدگی
cross-section	میرایی بحرانی
damped	سطح مقطع عرضی
damping	میرا
damping force	میرایی
deceleration	نیروی میران
deflection	شتاب کندکننده
degeneracy	انحراف
deviation	چندگانگی
diffraction	انحراف
disk	پراش
dispersion	قرص
distributive	پاشیدگی
domain	توزیع پذیر
double degeneracy	پهنه
dyad	مت: حوزه
dyadic	دوگانگی
eigen value	دوتایی
eigen vector	جمع دوتاییها
elastic collision	مقدار مشخص
endoergic collision	بردار مشخص
	برخورد الاستیک
	مت: برخورد کشوار
	برخورد گرماگیر

equilibrant	ضد منتجه
	مت: متعادل‌کننده
exoergic collision	برخورد انرژی‌ده
falling body	جسم افتان
fictitious force	نیروی کاذب
flow	سیلان
forced	واداشته
forces of constraint	نیروهای قیدی
friction force	نیروی اصطکاکی
	مت: نیروی مالشی
gap	فاصله
generating angle	زاویه مولد
glancing collision	برخورد کناری
gyration	چرخش
hamiltonian	تابع هامیلتونی
head-on collision	برخورد روباروی
idealization	آرمانی‌سازی
impulse	ضربه
incident	تابنده
incident particle	ذره تابنده
incompressible	تراکم‌ناپذیر
indeterminate	نامعین
inelastic collision	برخورد غیرالاستیک
	مت: برخورد ناکشوار
interaction	برهم‌کنش
invariant	تغییرناپذیر
isochronus	تک‌زمان
	مت: یک‌زمان

jelly model	مدل هندوانه‌ای
joint	مفصل
left-handed system	دستگاه چپ‌گرد
longitudinal wave	موج طولی
macroscopic body	جسم کلان
magnetic permeability	قابلیت نفوذ مغناطیسی
magnitude	اندازه
mesh	مت: قدر مطلق حلقه
microscopic body	جسم خرد
modulus	ضریب
moment	گشتاور
moment of force	گشتاور نیرو
momentum	اندازه حرکت
multiple degeneracy	چندگانگی
no-load speed	سرعت بی‌باری
nondegeneracy	یگانگی
normalization	نورمالیزگی مت: نورمالیزه‌سازی
nutation	حرکت ترقصی مت: رقص محوری
oblate	پخت
oblateness	پختی
oblation	پختی
observation	رصد
observatory	رصدخانه
orientation	توجیه
oscillator	نوسانگر
oscillogram	نوسان‌نگاره مت: نوسان‌نگاشته

oscillograph	نوسان نگار
oscilloscope	نوسان بین
overestimation	بیش انگاری
overshoot	فراجست
perigee	حضیض
perihelion	حضیض خورشیدی
permeability	قابلیت نفوذ
perturbation	اختلال
plane wave	موج مسطح
planetary model	مدل منظومه‌ای
polarization	پلاریزگی
precession	حرکت تقدیمی
prevailing wind	باد غالب
recoiled particle	ذره پس زده
rectifier	راست‌گر
reflected wave	مته: راست‌ساز
resonance	موج بازتابیده
restitution	همسازی
restoring force	برگشت
right-handed system	نیروی بازگرداننده
rigid body	دستگاه راست‌گرد
rotor	جسم سخت
runner	چرخنده
	مته: دستگاه چرخنده
	کفشک
self inductance	خود القایی
separation constant	ثابت تفکیک
shock front	جبهه ضربه
shock wave	موج ضربه‌ای
spectral	طیفی

spectrometry	طیف‌سنجی
spectroscope	طیف‌بین
spectroscopic	طیف‌شناختی
	مت: طیف‌بینی
spectroscopy	طیف‌شناخت
spectrum	طیف
stable	پایدار
standard body	جسم معیاری
standing wave	موج ایستاده
statement	بیانیه
stationary wave	موج پایا
thrust	پیشران
torque	گشتاور - نیرو
torsion	پیچش
transmitted wave	موج عبور کرده
transverse wave	موج عرضی
travelling wave	موج متحرک
triple degeneracy	سه گانگی
universal constant	ثابت کیهانی
	مت: ثابت کلی
viscosity	چسبندگی
viscous	چسبنده
vortex	گرداب
wave	موج
wave front	جبهه موج
waveguide	لوله موج
wobble	لنگیدن
wobbling motion	حرکت لنگی

واژه‌نامه فارسی - انگلیسی

idealization	آرمانی‌سازی
perturbation	اختلال
deflection	انحراف
deviation	انحراف
magnitude	اندازه
momentum	مت: قدر مطلق اندازه حرکت
apogee	اوج
aphelion	اوج خورشیدی
prevailing wind	باد غالب
collision	برخورد
elastic collision	برخورد الاستیک
exoergic collision	مت: برخورد کشوار برخورد انرژی‌ده
head-on collision	برخورد رویاروی
inelastic collision	برخورد غیرالاستیک
glancing collision	مت: برخورد ناکشوار برخورد کشوار ← برخورد الاستیک
endoergic collision	برخورد کناری
eigen vector	برخورد گرماگیر
restitution	برخورد ناکشوار ← برخورد غیرالاستیک
interaction	بردار مشخص
statement	برگشت
	برهم‌کنش
	بیانیه

overestimation	بیش انگاری
dispersion	پاشیدگی
stable	پایدار
oblate	پخت
oblateness	پختی
oblation	پختی
diffraction	پراش
polarization	پلاریزگی
domain	پهنه
	مت: حوزه
torsion	پیچش
thrust	پیشران
hamiltonian	تابع هامیلتونی
incident	تابنده
beating	تپش
beat	تپیدن
compression	تراکم
compressible	تراکم پذیر
compressibility	تراکم پذیری
incompressible	تراکم ناپذیر
invariant	تغییر ناپذیر
isochronus	تک زمان
	مت: یک زمان
orientation	توجیه
distributive	توزیع پذیر
beam	تیر
	مت: دسته اشعه
separation constant	ثابت تفکیک
universal constant	ثابت کیهانی
	مت: ثابت کلی

shock front	جبهه ضربه
wave front	جبهه موج
falling body	جسم افتان
microscopic body	جسم خرد
rigid body	جسم سخت
macroscopic body	جسم کلان
standard body	جسم معیاری
coupling	جفت‌شدگی
coupled	جفت شده
couple	جفت نیرو
associative	جمع‌پذیر
dyadic	مته: شرکت‌پذیر جمع دو تاییها
gyration	چرخش
rotor	چرخنده
viscosity	مته: دستگاه چرخنده چسبندگی
viscous	چسبنده
degeneracy	چندگانگی
multiple degeneracy	چندگانگی
nutaton	حرکت ترقصی
precession	مته: رقص محوری حرکت تقدیمی
wobbling motion	حرکت لنگی
perigee	حضیض
perihelion	حضیض خورشیدی
cavity	حفره
cavitation	حفره‌سازی
mesh	حلقه
self inductance	حوزه ← پهنه خود القایی

left-handed system	دستگاه چپ‌گرد
right-handed system	دستگاه چرخنده ← چرخنده دستگاه راست‌گرد
dyad	دو تایی
double degeneracy	دوگانگی
recoiled particle	ذرهٔ پس‌زده
incident particle	ذرهٔ تابنده
rectifier	راست‌گر
apex	مت: راست‌ساز رأس
observation	رصد
observatory	رصدخانه
centripetal	رقص محوری ← حرکت ترقصی رو به مرکز
generating angle	زاویهٔ مولد
catenary	زنجیری
no-load speed	سرعت بی‌باری
cross-section	سطح مقطع عرضی
cornerstone	سنگ بنا
triple degeneracy	سه گانگی
flow	سیلان
asteroid	شبه‌ستاره
centroid	شبه‌مرکز
deceleration	شتاب کندکننده شرکت پذیر ← جمع‌پذیر
equilibrant	ضد‌منتجه مت: متعادل‌کننده

impulse	ضربه
modulus	ضریب
spectrum	طیف
spectroscope	طیف‌بین
spectrometry	طیف‌بینی ← طیف‌شناخت، طیف‌شناختی
spectroscopy	طیف‌سنجی
spectroscopic	طیف‌شناختی
spectral	مت: طیف‌بینی طیف‌بینی
gap	فاصله
overshoot	فراجست
permeability	قابلیت نفوذ
magnetic permeability	قابلیت نفوذ مغناطیسی
disk	قدر مطلق ← اندازه قرص
constraint	قید
bound	کرانه
runner	کفشک
vortex	گرداب
centrifugal	گریز از مرکز
moment	گشتاور
moment of force	گشتاور نیرو
torque	گشتاور - نیرو
wobble	لنگیدن
waveguide	لوله موج

	متعادل‌کننده ← ضد متجه
colatitude	متمم عرض جغرافیایی
planetary model	مدل منظومه‌ای
jelly model	مدل هندوانه‌ای
joint	مفصل
eigen value	مقدار مشخص
wave	موج
standing wave	موج ایستاده
reflected wave	موج بازتابیده
stationary wave	موج پایا
shock wave	موج ضربه‌ای
longitudinal wave	موج طولی
transmitted wave	موج عبور کرده
transverse wave	موج عرضی
travelling wave	موج متحرک
plane wave	موج مسطح
damped	میرا
damping	میرایی
critical damping	میرایی بحرانی
indeterminate	نامعین
normalization	نرمالیزگی
	مت: نرمالیزه‌سازی
commutative	نقل پذیر
oscilloscope	نوسان بین
oscillogram	نوسانگاره
	مت: نوسان نگاشته
oscillator	نوسانگر
oscillograph	نوسان نگار
	نوسان نگاشته ← نوسانگاره
forces of constraint	نیروهای قیدی
	نیروی ابقایی ← نیروی کنسرواتیو
friction force	نیروی اصطکاکی
	مت: نیروی مالشی

restoring force	نیروی بازگرداننده
body force	نیروی حجمی
fictitious force	نیروی کاذب
conservative force	نیروی کنسرواتیو
	مت: نیروی ابقایی
	نیروی مالشی ← نیروی اصطکاکی
damping force	نیروی میران
forced	واداشته
resonance	همسازی
	یک‌زمان ← تک‌زمان
nondegeneracy	یگانگی

فهرست راهنما

<p>اندازه حرکت زاویه‌ای برداری ۱۰۵، ۱۲۳، ۱۶۳، ۳۵۹</p> <p>انرژی پتانسیل ۱۱۵، ۳۰، ۱۶۶</p> <p>انرژی پتانسیل ریسمان مرتعش ۳۸۹، ۳۹۰</p> <p>انرژی پتانسیلی دستگاهی از ذرات ۱۶۶، ۱۶۸</p> <p>انرژی پتانسیلی یک ذره ۳۱، ۳۳، ۱۰۸، ۱۱۵</p> <p>در مختصات تعمیم یافته ۳۶۱</p> <p>در یک سیال ۳۲۶</p> <p>مؤثر ۱۲۶، ۱۲۹، ۳۸۱، ۳۸۴، ۴۵۶، ۴۸۲</p> <p>براهه، تیکو ۱۳۵</p> <p>برخورد انمی یا هسته‌ای ۱۷۹، ۱۸۱</p> <p>برخورد ناکشسان ۱۳۷، ۱۷۵، ۱۸۶</p> <p>بردار ۷۲</p> <p>تفاضلی ۷۷</p> <p>حاصل ضرب برداری ۷۹</p> <p>حاصل ضربهای سه گانه ۸۰</p> <p>سه برداری ۵۴۱</p> <p>بُور ۱۳۷، ۵۰۵</p> <p>بیضوی ماند یا لختی ۴۳۱، ۴۴۹</p> <p>پتانسیل</p> <p>الکتریکی ۱۴۲، ۲۶۲، ۳۸۶</p> <p>ثقلی ۲۶۲</p> <p>سرعتی ۳۳۰</p> <p>شمارواره‌ای (اسکالری) و برداری ۳۸۶، ۵۷۰</p> <p>وابسته به سرعت ۳۸۵</p> <p>پتانسیل برداری ۳۸۶، ۵۷۰</p>	<p>آنالیز برداری ۹۸</p> <p>آینده مطلق ۵۱۸</p> <p>ابراهی (سرگردانی) ۵۰۳</p> <p>اتاقک حباب ۱۴۳</p> <p>اتحاد برداری ۹۹</p> <p>اثر دوپلر، نسبیتی ۵۲۷، ۵۳۴، ۵۴۵</p> <p>فرمول اثر دوپلر ۵۲۹</p> <p>اصل تطابق ۵۰۵، ۵۴۸</p> <p>اصل موضوع سرعت نوری ۵۰۳، ۵۰۴</p> <p>اصل موضوع نسبیت ۲، ۳، ۱۶۹، ۳۸۰</p> <p>انتگرال فوریه ۶۰</p> <p>انتگرال گیری</p> <p>انتگرال گیری از یک بردار ۱۴۸</p> <p>انتگرال یک معادله دیفرانسیل</p> <p>انتگرال اندازه حرکت زاویه‌ای ۱۲۴</p> <p>انتگرال انرژی ۳۲، ۱۰۹، ۱۱۸، ۳۷۹، ۵۶۱</p> <p>ثابت حرکت ۳۲، ۱۰۹، ۱۲۶، ۲۹۰، ۳۷۸، ۵۶۱</p> <p>اندازه حرکت پتانسیلی ۳۸۷</p> <p>اندازه حرکت خطی</p> <p>اندازه گیری ۱۴۳</p> <p>برداری ۱۰۳</p> <p>پتانسیل ۳۸۷</p> <p>چگالی ۳۱۹، ۳۲۴</p> <p>داخلی ۱۸۹</p> <p>در مسئله دو جسمی ۱۸۴</p> <p>نسبیتی ۱۷۹، ۵۴۹</p>
---	--

تبادل یک جسم صلب ۲۳۱	پتانسیل (شمارواره) اسکالر ۵۷۰، ۳۸۶
تبادل یک ریسمان ۲۳۷	پراکندگی ۱۸۵، ۱۷۸، ۱۳۷
حالت تعادل یک تیر ۲۴۱	زاویه پراکندگی ۱۳۷، ۱۷۶، ۱۷۸، ۱۸۶
نقطه تعادل ۳۴، ۲۹۰، ۳۷۷	پراکندگی سطح مقطع عرضی رادرفورد ۱۴۰، ۱۸۸، ۱۸۵
تبادل دینامیکی ۴۴۶	پلازیگی ۵۵
تغییر شکل یا واپیچش تیر ۲۴۳	پولود ۲۵۱
تغییر مکان، چهار برداری ۵۴۱	
تغییر مکان چهار برداری ۵۴۱	
	تابع برداری خطی ۴۰۳، ۴۰۶، ۴۰۷
جای دیگر مطلق ۵۱۹	تابع نقطه‌ای برداری ۸۷
جمع دو تاییها ۴۰۷	تابع نقطه‌ای (شمارواره) اسکالر ۸۷
	تاسون، جی. جی. ۱۴۳
چهار برداری ۵۴۱، ۵۲۷	تانسور ۲۳۵، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۱۱
جمع چهار بردار ۵۴۱	اسکالره‌ای (شمارواره‌ها) پایا ۲۲۱
چهار بردار رسمی ۵۴۴	بردار مشخص ۴۱۶
چهار بردار فیزیکی ۵۴۴	ترانسپوز ۴۰۸
ضرب چهار بردار ۵۴۱، ۵۴۲	تریس ۴۱۴، ۴۲۱
چهار پتانسیل ۵۷۱	تهی (خالی) ۴۴۰
چهار پیشران ۵۶۶	چهار تانسور ۵۷۴
چهار تانسور ۵۷۴	حاصل جمع ۴۰۴، ۴۰۸
انقباض چهار تانسور ۵۷۵	حاصل ضرب با یک شمارواره یا اسکالر ۴۰۴، ۴۳۹
چهار تانسور پادمتقارن ۵۷۵	
چهار تانسور متقارن ۵۷۵	حاصل ضرب (ضرب) نقطه‌ای ۴۰۷
حاصل جمع (جمع) چهار تانسور ۵۷۴	متعامد ۴۱۳
حاصل ضرب (ضرب) چهار تانسور ۵۷۴	متقارن ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۳۱، ۴۳۷
چهار شمارواره (چهار اسکالر) ۵۳۸، ۵۳۷	محوره‌ای اصلی ۴۱۶
	مقدار مشخص ۴۱۶
حاصل ضرب دو تایی ۴۰۳	واحد ۴۰۵
حاصل ضرب سه گانه (شمارواره‌ای) اسکالری ۸۰	تانسور ماند یا لختی ۴۰۵، ۴۲۴
حاصل ضرب (ضرب) اسکالری (شمارواره‌ای) ۷۷	تبدیل مختصات ۴۱۰
حاصل ضرب (ضرب) چهار شمارواره یا چهار اسکالر ۵۴۲	تبادل ۳۴، ۲۲۹، ۴۶۵
حاصل ضرب (ضرب) داخلی ۷۷	آرایش در حال تعادل ۴۶۵
حاصل ضرب (ضرب) نقطه‌ای ۴۰۷، ۷۷	تبادل پایدار ۳۴، ۴۶۵
حالت طبیعی ارتعاش ۴۱، ۱۹۵، ۴۶۹	تبادل خشتی ۳۴
حالت طبیعی ارتعاش ریسمان مرتعش ۲۹۹، ۳۱۰	تبادل سیال ۲۴۷
	تبادل ناپایدار ۳۴، ۶۶، ۴۶۶، ۴۷۲

سرعت ۴

سرعت در مختصات استوانه‌ای ۹۵
 سرعت در مختصات قطبی ۹۳
 مؤلفه‌های سرعت ۹۵
 سرعت زاویه‌ای برداری ۲۱۱
 سرعت نهایی ۱۱۴، ۳۶، ۳۷
 سری فوریه ۳۸۸، ۳۴۱، ۳۰۰، ۶۰

شتاب ۵

اثر شتاب روی (بر) ساعت ۵۲۰
 شتاب در مختصات دکارتی یا متعامد ۵، ۹۱
 ۹۵
 شتاب در مختصات قطبی ۹۴
 شتاب در مختصات کروی ۹۸
 شتاب روبه مرکز ۲۷۸، ۹۴
 شتاب کوریولی ۲۷۸، ۹۴
 شتاب مماسی ۱۵۰
 مؤلفه‌های شتاب، در دستگاه مختصات استوانه‌ای ۹۶

مؤلفه عمودی شتاب یا شتاب عمودی ۱۰

۵۷۷، ۲۸۰، ۲۶۱

نسبت شتاب ۶

شتاب کوریولی ۲۷۸، ۹۴

شرایط اولیه ۲۳، ۳۲، ۴۲، ۱۰۷، ۱۷۶، ۲۹۷

شرایط مرزی

شرایط مرزی برای ریسمان ۲۹۷، ۲۹۸، ۳۴۹

شرایط مرزی برای لوله سرباز ۳۳۸

شرایط مرزی برای هوای در جعبه ۳۳۶

شرویدینگر، ئی. ۲

شکل لیسازو ۱۱۰

شکم ۳۳۷

شمارواره یا اسکالر ۷۳

چهار (شمارواره) اسکالر ۵۳۷، ۵۴۱

سه شمارواره یا سه اسکالر ۵۴۱

حالت طبیعی ارتعاش سیال در جعبه ۳۳۵
 حالت طبیعی ارتعاش نوسانگرهای جفت شده

۱۹۵، ۳۱۰، ۴۶۸

حساب تغییرها ۳۸۸

حفره ۲۰۱، ۳۳۸

ارتعاشات طبیعی در حفره ۲۰۱، ۳۳۸

خطوط نیرو ۲۶۴

دستگاه مختصات

آزمایشگاهی ۱۸۵

انتقال ۲۷۱

بردار قطبی ۹۳، ۹۷، ۱۰۵

چپ‌گرد ۴۱۲

در نسبت عام ۵۸۳، ۵۸۴

دکارتی (متعامد) ۴، ۹۱، ۹۴، ۲۲۲

دوران‌کننده ۹۷، ۱۰۳، ۲۲۲

سه‌می شکل ۱۴۹، ۳۹۷

کروی ۹۷، ۱۰۳، ۲۲۲

ماند یا لختی ۵۰۲، ۵۰۸، ۵۷۶

متحرک ۲۷۱، ۳۵۳، ۳۵۵، ۳۶۷، ۳۷۱، ۳۹۳

دستگاه مختصات ماند یا لختی ۵۰۲، ۵۰۸، ۵۷۶

دستگاه مقایسه‌ای ۲۷۲، ۵۰۸

دوتایی ۴۰۳

دوران (چرخش)

دوران مجازی ۱۶۵

دو ستاره‌ای ۵۰۳

دینامیک ۳، ۵

دیورژانس یا واگرایی تابعی برداری ۱۰۰، ۱۰۳

۳۱۵

رابطه پاشیدگی، برای موج ۵۴۵

رادر فوردد ۵۷، ۱۳۷، ۱۴۰، ۱۸۵

ریسمان ۲۳۷

ضدمتجه یا متعادل‌کننده ۲۳۰

زننجیری ۲۴۱

- ضرب جسمی ۲۳۶، ۲۵۰، ۳۲۲، ۳۲۷، ۳۳۱، ۴۳۸
- علیت ۵۱۴
- عملگر یا اپراتور برداری خطی ۴۰۳، ۴۰۷
- فرکانس طبیعی ارتعاش ۲۹۹، ۳۱۰، ۳۳۷
- قانون توزیع پذیر ۷۳
- قانون سوم نیوتن ۷، ۱۴۱، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۹
- ۲۰۷، ۲۳۵، ۳۲۴، ۳۲۸
- حالت ضعیف ۱۴۲، ۱۶۲، ۱۶۸، ۱۸۱، ۱۸۲
- حالت قوی ۱۴۲، ۱۶۴، ۱۷۱
- در نظریه نسبیت ۵۶۸
- قضیه اندازه حرکت خطی ۲۱، ۱۰۳، ۱۶۱، ۳۲۴
- قضیه کوریولی ۲۷۸، ۲۸۴
- قضیه لیوویل ۳۹۵
- قضیه واگرایی ۱۰۰، ۲۵۰، ۳۱۸، ۳۲۹، ۳۹۵
- قوانین حرکت نیوتن ۳، ۷، ۱۶۵، ۲۷۲، ۳۵۳
- ۳۶۶، ۵۰۲، ۵۰۴، ۵۰۵
- قید غیرهولونومیک ۳۷۰
- گذشته مطلق ۵۱۹
- گشتاور برداری ۸۵
- گشتاور برداری ۸۴
- گشتاور ماند یا لختی ۲۱۰، ۲۲۵، ۴۲۴
- لحظه اولیه ۲۳، ۱۰۷
- ماند یا لختی ۲۱۰، ۲۲۵، ۴۲۴
- ماهواره ۱۲۹، ۱۶۹
- مختصات طبیعی ۴۷۲، ۴۷۴، ۴۸۰، ۴۸۴
- مختصات طبیعی برای ریمان مرتعش ۳۹۱
- مخروط جسم ۴۴۷
- مدار تعادل ۴۸۷
- مدار کراندار ۱۲۷، ۱۳۶
- مسئله سه جسمی ۲۸۶، ۴۹۰
- مسئله سه جسمی در حالت خاص ۲۸۶
- معادلات خطی شده حرکت ۴۶۷
- معادله حالت ۲۴۷، ۳۱۳، ۴۳۳
- معادله دیفرانسیل ناهمگن ۴۲، ۵۸
- معادله ویژه ۱۹۳، ۱۹۹، ۴۱۸، ۴۶۸، ۴۷۰، ۴۸۳
- نقطه زین ۲۸۹
- نوسانگر خطی ۳۲، ۳۹، ۳۹۴، ۳۹۶
- نوسانگر هارمونیک ۳۲، ۳۹، ۳۹۴، ۳۹۶
- نوسانهای بتاترون ۴۸۶
- نیروی حجمی ۲۴۸، ۳۲۰، ۳۴۴
- نیروی کوریولی ۲۷۸، ۲۸۱، ۲۸۴، ۳۶۷، ۳۹۷، ۴۰۰
- نیروی ماند یا لختی ۵۷۷
- وایپچش شکل موج ۳۴۲